数理解析研究所講究録
第510巻 1984年 45-58

級数解の収束と解の解析性について

宇都宮大教養　徳田　尚之 (Naoyuki Tokuda)

§1．いとぐち

級数解は，問題の線形・非線形性にかかわらず，工学・物理数学の多くの問題の解法として基本的な役割りを果している。この解法を適用する上で重要な基礎になっているのはその級数の収束性であることはいうまでもない．一般的には展開する関数が解析的で，そのテーラー級数は収束することを仮定してしまうことが多い．理由は求める関数が非線形方程式の解である場合にはその関数の解析性とか級数の収束を証明することは非常に難かしい場合が多いからである．また級数解が収束するのに展開する点でその関数が解析的である必要性は必ずしもなく，関数の連続性を保障すれば充分な場合も多い．例えば Widder (1975) は，前者の解析関数をクラスIの関数，後者の収束する非解析的関数をクラスIIと分類している．

本論文では表面輻射を伴う非線形熱伝導問題を取り上げその壁面温度 $u_w(t)$ はクラスIに属し，温度場関数 $u(x,t)$

けｔについてクラスII型に属することを証明し，級数解の妥当性を確立する．§2ではWidder (1975) によるクラスI，II型の定義を紹介し，§3では非線形熱伝導問題を定式化する。§4では $u_w(t)$ の解析性と収束を，§5では $u(x,t)$ の収束を証明する。

§2. Widderによる実関数の分類

Goursat - Widderによる実関数の分類の定義を次に述べる．

定義1．　独立変数 t と任意の数 k に独立に

$$|f^{(k)}(t)| < \frac{M\,k!}{r^k}, \quad a \leq t \leq b, \quad k=0,1,2,\cdots \qquad (1)$$

を満す様に M, r が選べるとき $f(t)$ をクラスIの関数という。

定義2．　独立変数 t と任意の数 k に独立に

$$|f^{(k)}(t)| < \frac{M\,(2k)!}{r^k}, \quad a \leq t \leq b, \quad k=0,1,2,\cdots \qquad (2)$$

を満す様に M, r が選べるとき $f(t)$ をクラスIIの関数という。

定義1は実解析関数の定義そのものであり，式(1)はテーラー展開の各項の係数を表わす．定義2の関数はクラスIの関数に較べると高次の微係数がもっと急速に増加することを許し，実際 $t=0$ で非解析的な関数を包含していることに注意しよう．

クラスIIの関数例．次式で定義される関数$f(t)$

$$f(t)=\frac{1}{t^m}\exp\left(-\frac{p}{t}\right) \qquad t>0$$
$$=0 \qquad\qquad t\leqq 0 \qquad (3)$$

は，$-\infty<t<\infty$，$\gamma<2p$ の区间でクラスIIに属する。たゞし $\overbrace{m>0.}^{p>0\text{とする}}$

証明．$m=1/2$，$p=x^2$ とおくと $f(t)$ は熱伝導方程式の基本解で，本論文の§3以降でも重要な役割りを果す関数である．これを証明するのに $t>0$ として，$f(t)$ を複素平面 $S=t+is$ 上でのコーシー積分で表わす。$S=t[1+(1-\epsilon)e^{i\theta}]$ の如く実数軸上の t を原点とし半径が $t(1-\epsilon)$ $(\epsilon>0)$ の円をその積分路Γとすれば（図1を参照のこと）

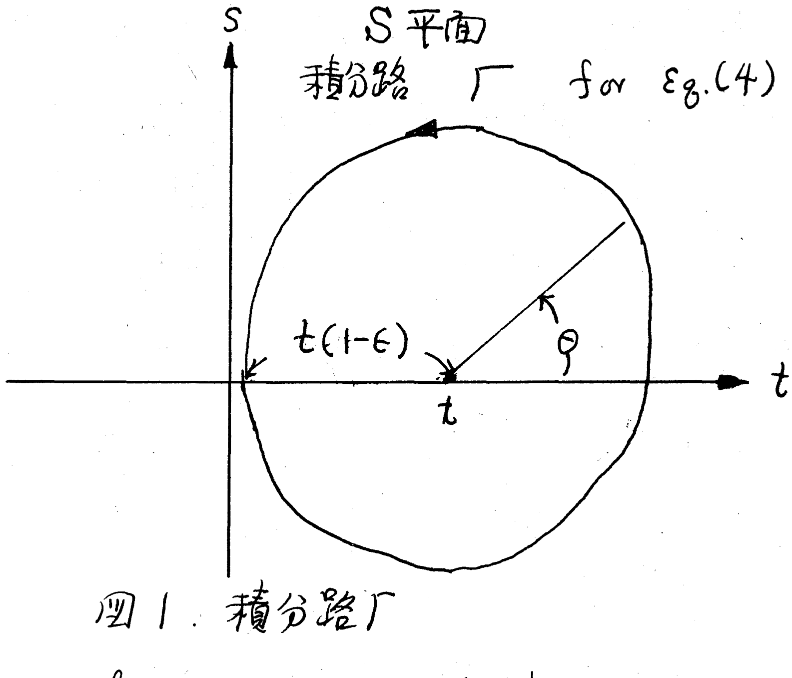

図1．積分路Γ

$k=0,1,2,\cdots\cdots$ に対し

$$f^{(k)}(t)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\exp(-P/S)}{(S-t)^{k+1}S^m}dS \qquad (4)$$

式(4)は $0 \leqq t < \infty$ で成り立つ．いま $Re\left(\frac{1}{S}\right) = \frac{1+\rho\cos\theta}{t[1+2\rho\cos\theta+\rho^2]} \geqq \frac{1}{t(1+\rho)}$，但し $\rho = 1-\epsilon$ に注意すれば

$$|f^{(k)}(t)| < \frac{k!\,\exp\left[-\frac{\rho}{t(1+\rho)}\right]}{(t\rho)^k\,(1-\rho)^m\,t^m} \qquad (5)$$

Widder (1975, p15) の関係式

$$\exp\left[-\frac{\rho}{t(1+\rho)}\right] t^{-(k+m)} \leqq \left[\frac{(1+\rho)(k+m)}{e\rho}\right]^{k+m} \qquad (6)$$

を用いると(5)式は

$$|f^{(k)}(t)| < \frac{k!}{\rho^k(1-\rho)^m}\left[\frac{(k+m)(1+\rho)}{e\rho}\right]^{k+m} \quad 0 \leqq t < \infty \qquad (7)$$

と表わされる。隣接項比をとるとすぐ分るように

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r k}{2k(2k-1)}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{1+\rho}{e\rho}\,(k+m)\left(1+\frac{1}{k+m-1}\right)^{k+m-1} = \frac{r(1+\rho)}{4\rho\rho} < 1$$

の範囲で(4)式を係数とするべき級数は収束する。$\exp(-\frac{\rho}{S})$ は $S=0$ のみで特異性をもつので関数 $f(t)$ は $\epsilon \to 0$ 即ち $\rho \to 1$ と取ってよく，$r < 2\rho$ の範囲で収束する。(7)式は $t<0$ でも勿論成り立つので，$-\infty < t < \infty$，$r < 2\rho$ の範囲で $f(t)$ はクラスⅡに属することが証明された．これは連続性さえ保障すれば，$t=0$ で解析的でない関数でも級数で定義出来ることを示す。これらの結果を使って§3以下で非線形熱伝導問題の級数解は収束することを証明してゆこう。

§3．非定常熱伝導問題の定式化．

表面熱輻射を伴う熱伝導問題を定式化しよう。$t=0$ で加熱物体の熱輻射による冷却(Case A)，または加熱(Case B)

が始まったとすると、一次元物体の熱伝導を支配する方程式と境界条件は（Tokuda 1983b）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8}$$

$$u(x,0)=0 , \quad u(\infty,t)=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = G[u_w(t)] = [1-u_w(t)]^n \quad \text{Case A}$$

$$= 1 - u_w^n(t) \quad \text{Case B} \tag{10}$$

ここで $G[u_w(t)]$ は表面輻射条件関数で指数 n は 1 又は 4 を通常とる。$u_w(t)=u(0,t)$ である。$n=4$ は非線形の Boltzmann の四乗則である。(8)~(10)式の変数 u, x, t はすべて無次元化してあることを注意しておこう。よく知られている様に、(8)~(10)式は次の Volterra の積分方程式に変換出来る（Widder 1975, Mann & Wolf 1950）

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{G[u_w(\tau)]}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau , \tag{11}$$

$$u_w(t) = u(0,t) = \int_0^t \frac{G[u_w(\tau)]}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau \tag{12}$$

(12)式を導くのには、(11)式で $x=0$ とおけばよいが、注意が必要なのは温度の定義領域 $0 \leqq x < x_0, 0 \leqq \tau < t_0$ の中で特異点である $(0,0)$ の点の取扱いである。$u_w(t)$ の $t=0$ での連続性を保障するには

$$x = O(t^{1/2+\delta}) \quad \text{as } t \to 0, \ 1 \gg \delta > 0$$

という近づき方が必要であることを注意しておこう(Mann & Wolf 1950).

G関数が非線形の場合($n>1$),(11),(12)式の解として求まっているのは数値解(Kikuchi & Tokuda 1976, Masuda 1976)か級数解(Jeager 1950, Tokuda 1983b)である.§4以下で(11),(12)式の級数展開

$$u_w(t)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, t^{\frac{i}{2}} \tag{13}$$

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty} t^{\frac{i}{2}}\,\theta_i\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \tag{14}$$

が共に $t=0$ の近傍で収束し,$u_w(t)$ は§2のI型,$u(x,t)$ はII型に属する関数であることを示そう。

§4. 表面温度関数 $u_w(t)$ とその解析性

表面温度関数 $u_w(t)$ は式(12)で表わされる.このVolterra積分方程式は次のより一般的な分数積分方程式の特殊の場合と考えてよい。

$$u_w(s)=\frac{s}{\Gamma(\nu)}\int_0^1 (1-\xi)^{\nu-1}\, G[u_w(s\xi^{\nu})]\,d\xi \tag{15}$$

ただしここで $0<\nu<1$ で

$$s=t^{\nu} \tag{16}$$

$\Gamma(\nu)$ はガンマ関数で,$\nu=1/2$ と取ると(12)式と(15)式は一致する。ここでは(15)式を満足する解 $u_w(s)$ は $s=0$ で解析的で唯一のものであることを示す。$\nu=1/2$ の場合の(15)式の解の存在

と唯一性は Mann & Wolf (1950) に証明されていることを付記しておく。また輻射関数 G はその引き数 $u_w(s)$ について実用的には (10) 式で示した様にべき関数で充分であるがここではより一般的な整関数として議論を進めて行く。

<u>レンマ 1</u>. ν 次の分数積分 $g(s)$ を

$$g(s) = \frac{s}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-\xi)^{\nu-1} f(s\xi^\nu)\, d\xi, \quad 0 < \nu < 1 \qquad (17)$$

で定義する。もし $f(s)$ が $s=0$ で解析的であれば $g(s)$ も又 $s=0$ で解析的である。

<u>証明</u>. 仮定により

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \qquad |s| < s_0, \quad s_0 > 0 \qquad (18)$$

式(18) を式(17) の右辺に代入し、(18) が収束級数であることに注意して積分と級数和の操作を入れ換えると、

$$g(s) = \frac{s}{\Gamma(\nu)} \sum a_i s^i \int_0^1 \xi^{i\nu} (1-\xi)^{\nu-1} d\xi = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{i=0}^{\infty} a_i B(i\nu+1, \nu) s^{i+1}.$$

ここで B はベータ関数でガンマ関数で表わすと

$$B(i\nu+1, \nu) = \frac{\Gamma(i\nu+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma[(i+1)\nu+1]}. \qquad (19)$$

よって、

$$g(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{\Gamma(i\nu+1)}{\Gamma[(i+1)\nu+1]} s^{i+1}. \qquad (20)$$

Γ関数は、$i > 1/\nu$ では $\Gamma(i\nu+1)/\Gamma[(i+1)\nu+1] < 1$ であるから、Weierstrass の M-テストにより式(20) は式(18) と同じ円板内 $|s| < s_0$ で収束する。s を複素平面

$$S = s + it$$

に拡張すると，複素関数 $f(s)$，$g(s)$ も s 平面上で定義され円板 $|s|<s_0$ で収束する。よって $f(s)$, $g(s)$ 共 $s=0$ で解析関数である。

レンマ2.　$G(z)$ は z について整関数とする。任意の $R_0>0$ に対して

$$|G(z_1)-G(z_0)|<L\,(z_1-z_0) \qquad (21)$$

を満足する $L>0$ が存在する．ここで z_1, z_0 は円板 $|z|<R_0$ 中の任意の2点である。

証明.　いま $R>R_0>0$ の如く選び

$$k=\frac{R}{R_0}。$$

とおく．R, k は共に有界な正の定数である．積分路 Γ を半径 R の円とするとコーシーの定理により

$$G(z_1)-G(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\left(\frac{1}{s-z_1}-\frac{1}{s-z_0}\right)G(s)\,ds=\frac{z_1-z_0}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{G(s)}{(s-z_1)(s-z_0)}\,ds \qquad (22)$$

z_0, z_1 は Γ より小さな円板 $|z|<R_0$ 内の点であるから

$$|G(z_1)-G(z_0)|<\frac{|z_1-z_0|}{2\pi R}\oint_{\Gamma}|G(s)||ds|<\frac{|z_1-z_0|}{2\pi R}k^2 M \qquad (23)$$

(23)式を導くのに整関数 G は Γ 上で連続であるから

$$M>\oint_{\Gamma}|G(s)||ds| \qquad (24)$$

という有界定数 M が見付かることを使った (Alfors 1966, P 121).
M, k, R 共有界であるので $L=Mk^2/2\pi R$ と選べばよい。

レンマ3.　次の繰返し関係式を満足する関数列 $\{z_n\}$ を考える。

$$z_{k+1}(S) = \frac{S}{\Gamma(\nu)}\int_0^1 (1-\xi)^{\nu-1} G[z_k(S\xi^{\nu})]\,d\xi \qquad (25)$$

Sは複素平面である。いま $z_0(S)=0$, $G(0)=1$ とすると，任意の $R_0>0$ に対し， $k=0,1,2,\cdots$ で

$$|z_k(S)-z_{k-1}(S)|<R_0,\ |z_k(S)-z_0(S)|<R_0 \quad \text{in } |S|<s_1$$

を満足する $s_1>0$ が存在する。

<u>証明.</u> z_0を(25)式に代入すると

$$z_1(S)=\frac{S}{\Gamma(1+\nu)} \qquad (26)$$

(25)式から任意の $k>0$ について次の式が成り立つ

$$z_{k+1}(S)-z_k(S)=\frac{S}{\Gamma(\nu)}\int_0^1(1-\xi)^{\nu-1}\left[G(z_k)-G(z_{k-1})\right]d\xi \qquad (27)$$

ここでs_1を次の条件を満す様に選ぶとしよう.

$$s_1 < \min\left[\frac{1}{L},\ \frac{R_0\Gamma(1+\nu)}{1+LR_0\Gamma(1+\nu)}\right] \qquad (28)$$

ここでLはレンマ2で得たリプシッツ定数である. (28)式のs_1を選ぶとレンマ3が成り立つことを示そう. $k=1$のときは,

$$|z_1-z_0|=|z_1|\leqq \frac{Ls_1}{L\Gamma(1+\nu)}<\frac{R_0}{1+LR_0\Gamma(1+\nu)}<R_0 \quad \text{in } |S|<s_1 \qquad (29)$$

で確かに満足されている。$k=2$の場合も同様に証明出来る。(29)式からz_0, z_1は$|S|<s_1$内では半径R_0の円板内に含まれていることに注意すれば，(27)の右辺$|G(z_1)-G(z_0)|$はレンマ2により評価出来て

$$|z_2-z_1|<\frac{(Ls_1)^2}{L\Gamma(\nu)}\int_0^1(1-\xi)^{\nu-1}d\xi=\frac{(Ls_1)^2}{L\Gamma(1+\nu)}<R_0(Ls_1)<R_0 \quad \text{in } |S|<s_1 \qquad (30)$$

$$|z_2-z_0|\leqq|z_2-z_1|+|z_1-z_0|<\frac{Ls_1\left[1-(Ls_1)^2\right]}{L\Gamma(1+\nu)(1-Ls_1)}<R_0 \qquad (31)$$

不等式(30), (31)を導くのに(28)式から求まる不等式

$$LS_1 < 1$$

を使った。$k=2$ のときも証明された。この手順を繰返せば，任意の k について

$$|z_k - z_{k-1}| < \frac{(LS_1)^k}{L\,\Gamma(1+\nu)} < R_0 (LS_1)^{k-1} < R_0 \quad \text{in } |S|<s_1 \qquad (32)$$

$$|z_k - z_1| < \frac{(LS_1)}{L\,\Gamma(1+\nu)} \frac{[1-(LS_1)^k]}{1-LS_1} < R_0 \qquad \text{〃} \qquad (33)$$

定理4．レンマ3の(25)式の繰返し公式で定義される関数列 $\{z_k(S)\}$ は $S=0$ で解析的な極限関数 $z(S)$ に一様収束する。

証明．(25)式の関係は(15)式を複素平面に拡張したものである。この拡張は，任意の z_k がレンマ1により解析関数であるので，正当化される。(32)，(33)式の関係は任意の k について成立つ．よって任意の $k>0$，$l>0$ に対して

$$|z_{k+l} - z_k| \leqq |z_{k+l} - z_{k+l-1}| + |z_{k+l-1} - z_{k+l-2}| + \cdots + |z_{k+1} - z_k|$$
$$< \frac{(LS_1)^k}{L\,\Gamma(1+\nu)} \frac{1-(LS_1)^l}{1-LS_1} < R_0 (LS_1)^k \quad \text{in } |S|<s_1 \qquad (34)$$

(34)式の右辺は $k\to\infty$ でな，$|S|<s_1$ であれば0に収束する。したがって $\{z_k\}$ はコーシー列をなし，極限関数 $z(S)$ に収束する．Weierstrass の二重級数定理(Alfors 1966, p.174)により極限関数 $z(S)$ は $|S|<s_1$ で解析的であり，従て $S=0$ でも解析的である．

定理5． 表面温度関数 $u_w(S)$ の S のべき級数(13)は原点 $S=0$ の近傍で§3の熱伝導問題の解に一様収束する．

証明． 定理4の関数 $z(S)$ は実軸上では $u_w(S)$ に一致する．解の存在と唯一性は Mann & Wolf (1950) の定理2と定理

6にそれぞれ証明されているので，これらを綜合すると級数解(13)は§3の熱伝導問題の解である。

§5. 温度場関数 $u(x,t)$ のべき級数とその収束

定理6. (11)式の積分方程式を満足する温度場関数 $u(x,t)$ は，§2のクラスII型関数に属し，(14)式のべき級数解をもつ。

証明. (11)式は，(15),(16)式の変数を用いると

$$u(x,s)=\frac{s}{\Gamma(\gamma)}\int_0^1(1-\xi)^{\gamma-1}G[u_w(s\xi^2)]\,h[x,s(1-\xi)^2]\,d\xi \qquad (35)$$

ここで $h(x,s)$ は熱伝導方程式の基本解で次の様に定義される (Widder 1975, p.48)

$$\begin{aligned} h(x,s) &= \exp\left\{-\frac{x^{1/2}}{(2s)^{1/2}}\right\} & s^{1/2}\neq 0 \\ &= 0 & s^{1/2}=0,\ x\neq 0 \qquad (36)\end{aligned}$$

$\eta = x/2s$ を使って $h(x,s)$ を書き直すと

$$\begin{aligned} h(x,s(1-\xi)^2) = h(\eta,(1-\xi)^2) &= \exp\left\{-\frac{\eta^{1/2}}{1-\xi}\right\}, & -\infty<\eta<\infty \text{ and } \xi\neq 1 \\ &= 0 & \eta\to\pm\infty \text{ or } \xi=1 \qquad (37)\end{aligned}$$

一方定理4,5と(13)式から

$$u_w(s)=\frac{s}{\Gamma(\gamma)}\int_0^1(1-\xi)^{\gamma-1}G[u_w(s\xi^2)]\,d\xi=\sum_{i=0}^{\infty}a_{i+1}\,s^{i+1} \qquad |s|<s_1 \qquad (38)$$

Gは仮定により整関数であるので Lagrange-Bürmann の定理 (Tokuda 1983a) を使うと

$$G[z(s\xi^2)]=\sum_{i=0}^{\infty}b_i\,\xi^{2i}s^{i} \qquad \text{in } |s|<s_1 \text{ and } 0\leq\xi\leq 1 \qquad (39)$$

(38),(39)式から係数 $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ の間には

$$a_{i+1} = \frac{b_i}{\Gamma(\nu)}\int_0^1 (1-\xi)^{\nu-1}\xi^{\nu i}\,d\xi = b_i\,B(i\nu+1,\nu)/\Gamma(\nu) \qquad (40)$$

の関係があることが分る．(39)式のべき展開を用いると，(35)式の $u(x,s)$ は

$$u(x,s) = \Theta(\eta,s) = \frac{s}{\Gamma(\nu)}\int_0^1 (1-\xi)^{\nu-1} G[u_w(s\xi^{\nu})]\,h[\eta,(1-\xi)^{\nu}]\,d\xi = \sum_{i=0}^{\infty}\Theta_{i+1}(\eta)\,s^{i+1} \qquad (41)$$

こゝで

$$\Theta_{i+1}(\eta) = \frac{b_i}{\Gamma(\nu)}\int_0^1 (1-\xi)^{\nu-1}\xi^{\nu i}\,h[\eta,(1-\xi)^{\nu}]\,d\xi \qquad (42)$$

$0 \leqq \xi \leqq 1$，$-\infty<\eta<\infty$ の範囲では式(37)から

$$h[\eta,(1-\xi)^{\nu}] \leqq \exp(-\eta^{1/2}) \qquad (43)$$

であるから

$$\Theta_{i+1}(\eta) \leqq \frac{\exp(-\eta^{1/2})}{\Gamma(\nu)}\,b_i\int_0^1 (1-\xi)^{\nu-1}\xi^{\nu i}\,d\xi = \exp(-\eta^{1/2})\,a_{i+1} \leqq a_{i+1} \qquad (44)$$

Weierstrass のM-テストにより，(44)式の $\Theta(\eta,s)$ 即ち $u(x,s)$ は $|s|<S_1$ の領域では $-\infty<\eta<\infty$ で一様に収束することが分る．$h(\eta,s)$ 即ち $h(x,s)$ は $s=0$ では非解析的であるので $u(x,s)$ は§2 の Widder の分類のクラスIIの関数に属する．

§6．まとめ

非線形問題を級数解で求めるとき，一般的にはその級数が収束するかどうか厳密な証明を与えることは不可能な場合が多い．本論文では§3で定式化した表面輻射を伴う非線形熱伝導問題を取り上げ，その級数解は確かに $t=0$ の近傍で収束

することを証明した。まず§4で表面温度関数 $u_w(s)$ は $s=t^{1/2}$ について解析関数で，そのテーラー級数は収束することを示し，§5では温度場関数 $u(x,s)=\Theta(\eta,s)$ が $s=0$ では非解析的ではあるが，$u_w(s)$ の収束する $|s|<s_1$ の円板内ではすべての η について一様収束することを示した。

この問題とよく似た問題に熱のステファン問題がある。級数解は古くから多くの人によって試みられているが（Carleslaw & Jeager 1959, p.292），多くの数学者の努力にもかかわらず，相の成長厚さ $X(t)$ 又は成長速度 $\dot{X}(t)$ の $t=0$ での解析性は証明されていない。勿論温度関数 $u(x,t)$ のべき級数の収束性も分っていない。この論文はステファン問題の布石として準備されたものであるが，その拡張は大変困難を伴うものと思われる。ステファン問題での級数解の妥当性が早く数学的に確立されることを願望しておく。

有益な討論を頂いた増田教授に感謝いたします。

§7 文献

1. Alfors,L.V. 1966. Complex Analysis. McGraw Hill Inc.
2. Carleslaw,H.S. & Jeager,J.C. 1959 Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press.
3. Jeager,J.C. 1950 " Conduction of heat in a solid with power law of heat transfer at its surface" Proc.Camb. Phil. Soc. Vol.10,p.634

4. Kikuchit,K. & Tokuda,N. 1975 " Numerical solutions of heat conduction with surface radiation by Crank-Nicolson scheme " Unpublished.

5. Mann,W.R. & Wolf,F. 1950 "Heat transfer between solids and gases under nonlinear boundary conditions " Quart. Appl. Math. Vol.9,p.163

6. Masuda,H. 1976 " Numerical solution of Volterra equation for the heat transfer with radiation " Unpublished.

7. Tokuda,N. 1983 a. "A new application of Lagrange-Bürmann expansions.1. General Principle " in press in ZAMP

8. Tokuda,N. 1983b. " A new application of Lagrange-Bürmann expansions.11. Application to unsteady heat conduction problem with radiation" in press in ZAMP

9. Widder,D.W. 1975. The Heat Equation. Academic press.