数理解析研究所講究録
第512巻 1984年 1-11

Reductive Groups with Involutions

Rijksuniversiteit Utrecht　　T. A. Springer

§0.　k を標数 $\neq 2$ の代数的閉体とし、G を k 上の reductive な連結線型代数群とする。G の involution (involutive, i.e. 位数 2 の自己同型) θ を持ってこよう。

例. G を $\mathbb{R}$ 上の半単純代数群で、$G(\mathbb{R})$ がコンパクトとなるものとする。($G = G(\mathbb{C})$.) この実構造に関する複素共役写像を $\sigma : G \to G$ とおけば、G の任意の $\mathbb{R}$-形式 G' に対して、G の involution θ が存在して

$$G'(\mathbb{R}) = G \text{ での } \theta \circ \sigma \text{ の固定点全体.}$$

これを"無限小"的に見れば、$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ をそれぞれ θ の $+1$, -1 固有空間とする時

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

で，$\mathfrak{g}' = \mathrm{Lie}\, G'$ は

$$\mathfrak{g}'(\mathbb{R}) = \mathfrak{k}(\mathbb{R}) \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{s}(\mathbb{R})$$

で与えられることがわかる。

この例の状況の下で，$K = G^\theta$（θ-固定元全体の群）は，自然に随伴作用で $\mathfrak{s}$ に働くが，この作用は Kostant - Rallis [KR] らにより詳しく調べられている（[Se] 参照）。

ここでは Vust [V]，Richardson [R] によって研究された $\mathfrak{s}$ の（K-作用も込めた）代数群論的類似物 P について，[V] [R] の結果も交えて報告する。後で見るように（§2）$P \simeq K\backslash G$ であり，右辺が Harish-Chandra 加群の研究（Beilinson-Bernstein，Lusztig，Vogan，cf. [T]）や，De Concini - Procesi によるコンパクト化の理論 [DP] と結びついているので，P の研究には興味深いものがある。

§1. 対 (G, θ) に関する基本的な性質を見てみよう。$K = G^\theta$（θ の固定点全体）とする。（G が半単純，単連結ならば K は連結 [S_2, 8.1].）

定理（Steinberg [S_2, 7.5]）. θ−不変な G の Borel 部分群 B 及び極大トーラス $T \subset B$ が存在する。この時，$(K \cap B)^\circ$, $(K \cap T)^\circ$ はそれぞれ K の Borel 部分群，極大トーラスになる。

T, B が θ−不変ゆえ Weyl 群 $W = N_G(T)/T$ に θ が Coxeter 系の自己同型として働くことに注意しよう。

定義　トーラス S が anisotropic
$$\Longleftrightarrow \quad \theta(s) = s^{-1} \quad (\forall s \in S).$$

anisotropic トーラスは必ず存在することが知られている [V, Prop. 1]。A' を極大 anisotropic トーラスとし，Q' を，$M' = Z_G(A')$ を Levi 因子とする放物型部分群とする。Q と θQ は opposite (i.e. $Q' \cap \theta Q' = M'$) であることがわかるが，更に次が示される：

命題（Vust [V, pp. 321−323]）.
(1) Q' は，Q' と $\theta Q'$ が opposite となるような

極小の放物型部分群。

(2) (1) の条件を満たす部分群 Q' はすべて K-共役。

(3) すべての極大 anisotropic トーラスは K-共役。

極大 anisotropic トーラス A' に関する相対ルート系も、実半単純群の場合と同様に定義される ([R, §4])。

§2. さて、次に §0 で述べた実半単純群における Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ での θ の -1 固有空間, $\mathfrak{p}$ の (K の随伴作用をもこめた) "群論的" 類似物を考察する。

定義. $P = \{ x^{-1}\theta(x) \mid x \in G \}$,

$Q = \{ x \in G \mid \theta(x) = x^{-1} \} \supset P$.

例. (a) $G = SL_n$, $\theta(x) = ({}^t x)^{-1}$ の場合は

$P = Q = \{ \det = 1 \text{ の対称行列} \}$

(b) (inner type) G は一般, $\theta(x) = a x a^{-1}$ ($a^2 = 1$) の場合は, $I = \{ b \in G \mid b^2 = 1 \}$

(involution 全体) とおくと. $Q = Ia$, $P = C(a)a$.
ただし $C(a)$ は a の G-共役類である。

P, Q には $x \mapsto g x \theta(g)^{-1}$ $(g \in G)$ により、G が作用する。特に K の作用は共役に一致。また P, Q 共に θ-不変である。さて、$P \simeq K \backslash G$ ([R, 2.4]) であることに注意しよう。この P が $\mathfrak{p}$ の類似になっている: A を極大 anisotropic トーラスとすると $A \subset P$. また $K \cdot A$ は P 中 dense [R, §3]。任意の P の元は P 内で Jordan 分解可能，つまり $x = x_s x_u$ を Jordan 分解とすると、
$x \in P \Leftrightarrow x_s \in P,\ x_u \in P$ ([R, 6.2]).
しかも [KR] と同様に

<u>定理</u> (Richardson [R, 6.3]).
P の任意の半単純元は A の元と K-共役.

がわかる。また巾単元についても [KR] と類似の結果がある。(例えば、$\mathcal{U}(P) = \{P$ の巾単元全体$\}$ は有限個の K-軌道からなる。)

問題.

(a) 巾単多様体 $\mathfrak{U}(P)$ の特異点の解消を与えよ。

(b) $\mathfrak{U}(P)$ の K-軌道を分類せよ。

§3. 1°. PのB-軌道分解. T, B をそれぞれ G の θ-不変極大トーラス, Borel部分群 $(T \subset B)$ とする。$P \simeq K\backslash G$ であることより, PのB-軌道分解は両側コセット分解 $K\backslash G/B$ もしくは旗多様体 G/B の K-軌道分解と同値である。

$N = N_G(T)$ に対し

$$V = \{ v \in G \mid v^{-1}\theta(v) \in N \}$$

$$\tilde{N} = \{ v^{-1}\theta(v) \mid v \in V \} \subset N$$

とおく。$T \times K$ は V に $v \mapsto kvt^{-1}$ $(v \in V,\ k \in K,\ t \in T)$ で作用する。Aをこの作用に関する V 中の $T \times K$-軌道の代表系, $\tilde{A}$ を $\tilde{N}$ での A の像としよう。

補題. すべての Q 内の B-軌道は N と交わる。また B-軌道の個数は有限個となる。

(証明は Bruhat 分解による。)

__命題.__ (i) $G = \bigsqcup_{v \in A} KvB$ (disjoint union)

(ii) G/B での K-軌道は、A で parametrize される。

(iii) P での B-軌道は $\widetilde{A}$ で parametrize される。

$\widetilde{N}$ の元の W での像を w とすると $\theta(w) = w^{-1}$.
特に θ が inner type ならば $\theta = id$ ゆえ. $\widetilde{N}$ の像は involutions からなる。(ただし $\widetilde{N}$ もしくは $\widetilde{A}$ の元は必ずしも involution ではない。)

__例.__ $G = SL_n$, $\theta(x) = ({}^t x)^{-1}$ の場合,
$\widetilde{N}$ = 対称単項行列全体である。

__注意.__ P の K-軌道分解は松本[M]によってすでに得られている。そこでは、K-軌道は、次のような対全体

(T_1, B_1) : T_1 は θ-不変極大トーラス
B_1 は T_1 を含む Borel 部分群

を K-共役を法として考えた商集合で parametrize されることが示されている。この結果は $V \ni v$ に対して $T_1 = vTv^{-1}$, $B_1 = vBv^{-1}$ とおくこ

とによって、上の命題から得られる。

2° <u>軌道の閉包の包含関係</u>（ただし以下は不完全である。） $n \in \tilde{N}$ に対し，w で n の W における像 $O(n)$ で P での n を通る B-軌道とする。 R を (G,T) のルート系とし，$\alpha \in R^+$（正のルート系 $\leftrightarrow B$）に対して対応する鏡映 $s_\alpha \in W$ の持ち上げ $\dot{s}_\alpha \in N$ を

$$x_\alpha(\xi)\, x_{-\alpha}(-\xi^{-1})\, x_\alpha(\xi) = \check{\alpha}(\xi)\, \dot{s}_\alpha$$

に normalize しておく。ただし

$$x_\alpha : R \xrightarrow{\sim} (\alpha \text{ に対応するルート部分群})$$

$$\check{\alpha} : R^\times \longrightarrow T \ , \quad \alpha \text{ に対応するコルート}$$

はそれぞれ，例えば [S1] のようにとる。

$l : W \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を Coxeter 群 W の length function としよう。この時，次が成立つ。

<u>補題 1</u>　$\alpha \in R^+$, $l(s_\alpha w\, \theta(s_\alpha)) < l(w)$ ならば

$$\dot{s}_\alpha n\, (\theta(\dot{s}_\alpha))^{-1} \in \overline{O(n)}$$

<u>補題 2</u>　$\alpha \in R^+$, $l(s_\alpha w) < l(w)$, $s_\alpha w\, \theta(s_\alpha) = w$ かつ $w\,\theta(\alpha) = -\alpha$ ならば

$$\dot{s}_\alpha n \in \overline{O(n)}$$

<u>例</u>. $G = SL_3$, $\theta(X) = ({}^t X)^{-1}$ の場合は, $\widetilde{A}$ は次の4個
$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & i & \\ i & & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & i \\ & i & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & i \\ & 1 & \\ i & & \end{bmatrix},$$
$$\quad X_1 \qquad\qquad X_2 \qquad\qquad X_3 \qquad\qquad X_4$$

で与えられ, closure relation は右図のようになる。ただし, 一般には上の補題1, 2ですべての relation がわかるわけではない。(上で, T = 対角, B = 上三角.)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{O}(X_4)\cdots\text{閉} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathcal{O}(X_2) \arrow[dr, dash] & & \mathcal{O}(X_3) \arrow[dl, dash] \\ & \mathcal{O}(X_1)\cdots\text{開} & \end{tikzcd}$$

<u>注意</u>. (W, S) を Coxeter系, θ を $\theta^2 = 1$ なる (W, S) の自己同型として $W' = \{w \in W \mid \theta(w) = w^{-1}\}$ とおく。W' 上に次の(1), (2)で生成される半順序 $\leq$ を入れる:

(1) $\ell(w') = \ell(w) - 2$ かつ ある鏡映 t に対して
$$w' = t w \theta(t) \quad \Rightarrow \quad w' < w.$$

(2) $\ell(w') = \ell(w) - 1$ かつ ある鏡映 t に対して
$$t w = w \theta(t), \quad w' = t w \quad \Rightarrow \quad w' < w.$$

これは補題1.2の Coxeter群版であるが, 一般にこの順序は通常の Bruhat 順序とは異なる。例えば,

$W = \mathfrak{S}_4$ (4次対称群)

$S = \{ s_1, s_2, s_3 \}$, θ: 

の時，Bruhat順序では $s_2 \leq s_2 s_1 s_3 s_2$ だが，
この順序では $s_2 \not\leq s_2 s_1 s_3 s_2$ である。

問題. (a) P での各 B-軌道の閉包を記述せよ。

(b) De Concini-Procesi による $\tilde{P}$ のコンパクト化 $\tilde{P}$ ([DP]) に対して(a)と同様の問題を考えよ。

(B-軌道は有限個であることが知られている。)

References

[DP] C. De Concini and C. Procesi, Complete symmetric varieties I, II. Preprint; see also this Proceeding.

[KR] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces. Amer. J. Math. 93 (1971), 753-809.

[M] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups. J. Math. Soc. Japan 31 (1979), 331-357.

[R] R. W. Richardson, Orbits, invariants and representations associated to involutions of reductive groups. Invent. Math. 66 (1982), 287-312.

[Se] J. Sekiguchi, this Proceeding.

[S_1] R. Steinberg, Lectures on Chevalley groups. Yale Univ. 1967.

[S_2] R. Steinberg, Endomorphisms of linear algebraic groups. Mem. Amer. Math. Soc. 80, 1968.

[T] T. Tanisaki, this Proceeding.

[V] T. Vust, Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes Bull. Soc. Math. France 102 (1974), 317-333.

(加藤 信一 記)