数理解析研究所講究録
第 512 巻 1984 年 12-21

Applications of intersection homology

R. D. MacPherson (Brown Univ.)

(谷崎俊之記)

講演の内容は，一言で言えば，complex manifold に対して一つ stratification を決めたときに各 strata の上でその cohomology sheaf が locally constant になるような perverse sheaf 全体のつくる abelian category の初等的記述，であった。これは K. Vilonen 氏との共同研究で，論文も近々書きあげるとの事である。

§1. perverse sheaf

以下 X を n 次元の complex manifold として，$\mathbb{C}_X$-Module (X 上の $\mathbb{C}$-vector space の sheaf) の bounded complex でその cohomology sheaf が全て constructible であるもののつくる derived category を $D_c^b(X)$ と書く。

Definition 1.1 (Beilinson-Bernstein-Deligne [BBD])

$K^\cdot \in D_c^b(X)$ が次の (i) (ii) (iii) を満たすとき，これを perverse sheaf という。

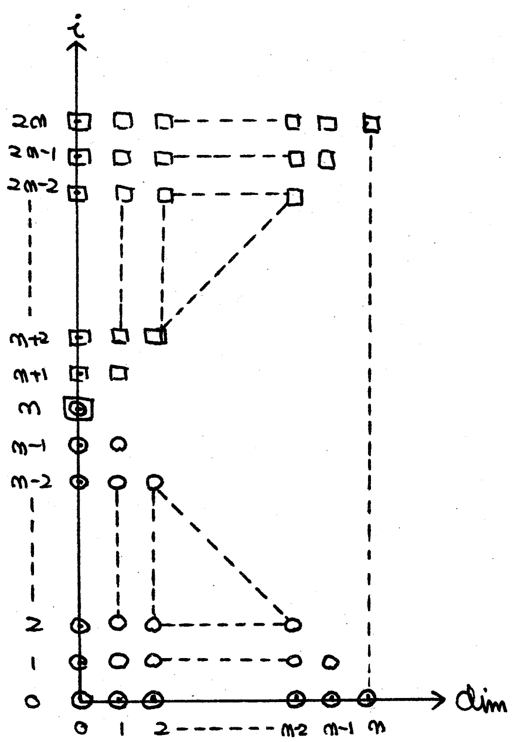
$$\begin{cases} \text{(i)}\ \mathcal{H}^i(K^\cdot)=0 & (i<0) \\ \text{(ii)}\ \dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(K^\cdot) \leqq m-i & (i \geqq 0) \\ \text{(iii)}\ \dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^i((K^\cdot)^*) \leqq m-i & (i \geqq 0) \end{cases}$$

（但し $(K^\cdot)^* := \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(K^\cdot, \mathbb{C}_X)$ ）■

各 $p \in X$ において，p を中心とする十分小さな開球 B_p をとるとき

$$\begin{cases} \mathcal{H}^i(K^\cdot)_p = \mathbb{H}^i(B_p, K^\cdot) \\ \mathcal{H}^i((K^\cdot)^*)_p = \mathbb{H}^i(B_p, (K^\cdot)^*) = \left(\mathbb{H}_c^{2m-i}(B_p, K^\cdot)\right)^* \end{cases}$$

である。そこで $\dim\{p \in X \mid \mathbb{H}^i(B_p, K^\cdot) \neq 0\}$，$\dim\{p \in X \mid \mathbb{H}_c^i(B_p, K^\cdot) \neq 0\}$ のとり得る値をプロットすると次のようになる。



○ … $\dim\{p \in X \mid \mathbb{H}^i(B_p, K^\cdot) \neq 0\}$ の取り得る値

□ … $\dim\{p \in X \mid \mathbb{H}_c^i(B_p, K^\cdot) \neq 0\}$ の取り得る値.

「Notation 1.2　perverse sheaf 全体からなる $D^b_c(X)$ の full subcategory を $P(X)$ と書く。また X の Whitney stratification $X=\bigsqcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ をひとつ決めるとき，$K^\cdot\in P(X)$ で $\mathcal{H}^i(K^\cdot)|S_\alpha$ が任意の i と α について locally constant になるもの全体のつくる full subcategory を $P(X,S)$ と書く。」

「Example 1.3

G を $\mathbb{C}$ 上の連結半単純 Lie 群，B を G の Borel 部分群として $X=G/B$ (flag manifold) とおく。Weyl 群 W の元 w に対して $S_w=BwB/B$ とおくとき，$X=\bigsqcup_{w\in W} S_w$ である（Bruhat 分解）。このときの $P(X,S)$ は Brylinski–Kashiwara [BK] の導入した $\mathfrak{g}$-module の category $\tilde{\mathcal{O}}_{triv}$ と同値である ($\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,G$)。またこの同値で highest weight $-w\rho-\rho$ を持つ irreducible highest weight module と対応するのが ${}^{\pi}\mathbb{C}_{S_w}[-\mathrm{codim}\,S_w]$ である。ここで ρ は正 root の和の半分，${}^{\pi}\mathbb{C}_{S_w}$ は $\mathbb{C}_{S_w}$ の DGM-拡大，$[-\mathrm{codim}\,S_w]$ は chain complex としての degree の shift である。」

「Example 1.4

上の例で $G=SL_2(\mathbb{C})$ のときには $X=\mathbb{P}^1$ であり，$X=\mathbb{C}\sqcup\{\infty\}$ が Bruhat 分解である。この場合を後で具体例として用いるので記号を導入しておく。$S_\alpha=\{\infty\}$, $S_\beta=\mathbb{C}=X-\{\infty\}$, $L_0^\cdot=\mathbb{C}_{\{\infty\}}[-1]$, $L_1^\cdot=\mathbb{C}_X$, $M^\cdot=\mathbb{C}_{X-\{\infty\}}$ とおく。$L_0^\cdot, L_1^\cdot$ は self-dual だが，$M^\cdot$ は self-dual ではない。実際 $(M^\cdot)^*$ は，chain complex

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} & & & (\text{degree } 0) & & (\text{degree } 1) & & & \\ \cdots\to & 0 & \to & \mathbb{C}_X \oplus \mathbb{C}_{X-\{0\}} & \longrightarrow & \mathbb{C}_X & \to & 0 & \cdots \\ & & & \Psi & & \Psi & & & \\ & & & (a,b) & \longmapsto & b & & & \end{array}\right]$$

で与えられて

$$\mathcal{H}^i((M^\cdot)^*) = \begin{cases} \mathbb{C}_X & (i=0) \\ \mathbb{C}_0 & (i=1) \\ 0 & (i\neq 0,1) \end{cases}$$

となる。

$L_0^\cdot$, $L_1^\cdot$, $M^\cdot$, $(M^\cdot)^*$ は $P(X,S)$ の object である。 ┛

┏ **Theorem 1.5** ([BBD])

$P(X)$, $P(X,S)$ は abelian category であって、各 object は有限の組成列を持つ。 ┛

§2. $P(X,S)$ の初等的記述

n次元 complex manifold X の Whitney stratification $X=\bigsqcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ をひとつ固定するとき、次の問題を考える。

┏ **Problem 2.1**

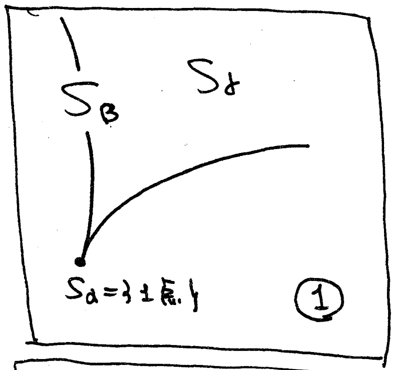
$P(X,S)$ の "elementary description" を与えよ。 ┛

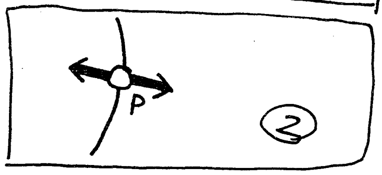
$\boxed{2.1}$ system of vanishing cycle sheaves of micro-solution.

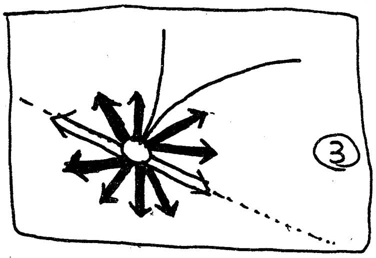
$T^*X \xrightarrow{\pi} X$ を cotangent bundle とする。S_α の conormal bundle を $T^*_{S_\alpha}X$ として

$$C_\alpha := T^*_{S_\alpha}X - \overline{\bigcup_{S_\alpha \subsetneq \overline{S_\beta}} T^*_{S_\beta}X}$$

とおく。直観的な絵を描くと図①のような場合には次のようになる

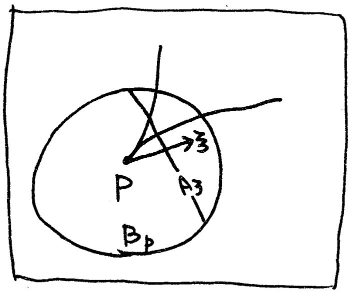






- $p\in S_\gamma$ のときは $C_\gamma\cap\pi^{-1}(p)=\{0\}$
  よって $C_\gamma\cong S_\gamma$
- $p\in S_\beta$ のとき, $C_\beta\cap\pi^{-1}(p)$ は S_β の接方向と直交する方向のベクトルで0以外のものからなる。(図②)
- $p\in S_\alpha$ のとき, $C_\alpha\cap\pi^{-1}(p)$ は図③の点線方向を向いていない全てのベクトルからなる

Definition 2.1



$K^\cdot\in D(X,S)$ のとき, 各 $\alpha\in A$ に対して C_α 上の local system $V_\alpha(K^\cdot)$ が次のようにして定まる。

$(p,\xi)\in C_\alpha$ とする ($p\in S_\alpha$, $\xi\in C_\alpha\cap\pi^{-1}(p)$)。

このとき, p を中心とする十分小さな開球 B_p をとり, B_p 上の C^∞-関数 f で $df=\xi$ なるものに対して

$A_\xi:=\{x\in B_p \mid f(x)=\varepsilon\}$ $(0<\varepsilon\ll 0)$ とおく。

$$V_\alpha(K^\cdot)_{(p,\xi)}:=\mathbb{H}^{d_\alpha}(B_p,A_\xi;K^\cdot) \qquad (d_\alpha=\operatorname{codim}S_\alpha)$$

この $V_\alpha(K^\cdot)$ を <u>system of vanishing cycle sheaves of micro-solution</u> と呼ぶ。 ┘

「<u>Remark 2.2</u> $B_p - A_\zeta \overset{i}{\hookrightarrow} B_p$ について

$\mathbb{H}^i(B_p, A_\zeta; K^\cdot) := \mathbb{H}^i(B_p; Ri_! i^* K^\cdot)$ である。よって次の exact sequence を得る。

$$\cdots \to \mathbb{H}^i(B_p, A_\zeta; K^\cdot) \to \mathbb{H}^i(B_p; K^\cdot) \to \mathbb{H}^i(A_\zeta; K^\cdot) \to \mathbb{H}^{i+1}(B_p, A_\zeta; K^\cdot) \to \cdots$$ ┘

「<u>Example 2.3</u> example 1.4 の場合を考える。このとき、

$C_\beta \cong X - \{\infty\} \cong \mathbb{C}$, $C_\alpha \cong T^*_{\{\infty\}}X - \{0\} = \mathbb{C} - \{0\}$ で

$K^\cdot$	$V_\alpha(K^\cdot)$	$V_\beta(K^\cdot)$
$L_0^\cdot$	$\mathbb{C}_{C_\alpha}$	0
$L_1^\cdot$	0	0
$M^\cdot$	$\mathbb{C}_{C_\alpha}$	0
$(M^\cdot)^*$	$\mathbb{C}_{C_\alpha}$	0

┘

$\boxed{2.2}$ <u>sheaves of nearby cycles</u>

2.1 により functor

$$\begin{array}{ccc} P(X,S) & \longrightarrow & \{(V_\alpha)_{\alpha\in A} \mid V_\alpha : \text{local system on } C_\alpha\} \\ \cup & & \cup \\ K^\cdot & \longmapsto & (V_\alpha(K^\cdot))_{\alpha\in A} \end{array}$$

が定義されるが、これは exact である。しかし example 2.3 からもわかるように、これは category 同値は与えないので $P(X,S)$ を記述するにはもう少し詳しい情報が必要である。

以下 S_α を closed strata として $X - S_\alpha = \bigsqcup_{\beta\neq\alpha} S'_\beta$ $(S'_\beta = S_\beta)$

について $P(X-S, S')$ の "elementary description" がわかっているとする。このとき $P(X, S)$ の "elementary description" を与えれば よい。実際 X は open strata に他の strata を次元の大きいのから順にはり合わせて得られる。

「<u>**Definition 2.4**</u>　$L^\bullet \in P(X-S_\alpha, S')$ に対して C_α 上の2つの local system $N^{closed}(L^\bullet)$, $N^{compact}(L^\bullet)$ が次のようにして得られる。definition 2.1 の記号を用いて、

$$\begin{cases} N^{closed}(L^\bullet)_{(p,\xi)} := \mathbb{H}^{d_\alpha}(B_p - S_\alpha, A_\xi; L^\bullet) \\ N^{compact}(L^\bullet)_{(p,\xi)} := \mathbb{H}^{d_\alpha - 1}(A_\xi; L^\bullet) \end{cases}$$

。

これらを <u>sheaves of nearby cycles</u> と呼ぶ。また自然に sheaf homomorphism $N^{compact}(L^\bullet) \xrightarrow{var} N^{closed}(L^\bullet)$ が定まる。┛

さて $K^\bullet \in P(X, S)$ とすると自然に commutative diagram

$$(\star) \quad \begin{tikzcd} N^{compact}(K^\bullet|X-S) \arrow[rr, "var"] \arrow[dr, "\varphi_1(K^\bullet)"'] & \circlearrowleft & N^{closed}(K^\bullet|X-S) \\ & V_\alpha(K^\bullet) \arrow[ur, "\varphi_2(K^\bullet)"'] & \end{tikzcd}$$

が得られる。そこで category $\underline{E}$ を

$$\underline{E} = \left\{ (L^\bullet, V_\alpha, \varphi_1, \varphi_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} L^\bullet \in P(X-S) \\ V_\alpha : \text{local system on } C_\alpha \\ \begin{tikzcd} N^{compact}(L^\bullet) \arrow[rr, "var"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & \circlearrowleft & N^{closed}(L^\bullet) \\ & V_\alpha \arrow[ur, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd} \end{array} \right\}$$

により定めるとき、functor

$$\begin{array}{ccc} P(X,S) & \longrightarrow & \underline{E} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ K^\bullet & \longmapsto & (K^\bullet|_{X-S},\ V_\alpha(K^\bullet),\ \varphi_1(K^\bullet),\ \varphi_2(K^\bullet)) \end{array}$$

が得られる。

「<u>Proposition 2.5</u>

(i) $\underline{E}$ は abelian category

(ii) $P(X,S) \longrightarrow \underline{E}$ は abelian category の embedding 」

「<u>Example 2.6</u>

example 1.4 の場合に(☆)を具体的に計算すると次のとおり。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 0 \\ & \mathbb{C}_{C_\alpha} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathbb{C}_{C_\alpha} \arrow[rr, "0"] \arrow[dr] & & \mathbb{C}_{C_\alpha} \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathbb{C}_{C_\alpha} \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & \mathbb{C}_{C_\alpha} \\ & \mathbb{C}_{C_\alpha} \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathbb{C}_{C_\alpha} \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \mathbb{C}_{C_\alpha} \\ & \mathbb{C}_{C_\alpha} \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

$L_0^\bullet$ $\qquad\qquad$ $L_1^\bullet$ $\qquad\qquad$ $M^\bullet$ $\qquad\qquad$ $(M^\bullet)^*$ 」

$\boxed{2.3}$ <u>monodromy</u>

一般に $P(X,S) \longrightarrow \underline{E}$ は category 同値を与えない。実際 example 2.6 の場合 $\pi_1(C_\alpha) \cong \mathbb{Z}$ なので C_α 上には monodromy 表現が自明でない local system が存在するが、$K^\bullet \in P(X,S)$ について $V_\alpha(K^\bullet)$ の monodromy 表現は trivial である。そこで monodromy に関する条件を加える。

C_α 上の local system L があるとき、各 $(p,\xi) \in C_\alpha$ に対して $L_{(p,\xi)}$ に基本群 $\pi_1(C_\alpha)$ が働く。さらに sheaf homomorphism $L_1 \longrightarrow L_2$ があるとき、$L_{1,(p,\xi)} \longrightarrow L_{2,(p,\xi)}$ は $\pi_1(C_\alpha)$-equivariant

である。

「**Proposition 2.7**　$(p,\xi)\in C_\alpha$, $\sigma\in\pi_1(C_\alpha)$ とする。

(i) $L^\cdot\in P(X-S, S')$ に対して canonical に

$$N^{compact}(L^\cdot)_{(p,\xi)} \xleftarrow{\ I_\sigma(L^\cdot)\ } N^{closed}(L^\cdot)_{(p,\xi)}$$

が定まり、

$$var\circ I_\sigma(L^\cdot)=1-\sigma\ ,\quad I_\sigma(L^\cdot)\circ var=1-\sigma\quad 。$$

(ii) $K^\cdot\in P(X-S, S')$ に対して

$$\varphi_1(K^\cdot)\circ I_\sigma(K^\cdot|X-S)\circ\varphi_2(K^\cdot)=1-\sigma$$ 」

そこで $\underline{C}$ の full-subcategory $\underline{C}^I$ を

$$\underline{C}^I=\left\{(L^\cdot, V_\alpha, \varphi_1, \varphi_2)\in\underline{C}\ \middle|\ (\varphi_1\circ I_\sigma(L^\cdot)\circ\varphi_2)_{(p,\xi)}=1-\sigma\ \ {}^{\forall}(p,\xi)\in C_\alpha,\ {}^{\forall}\sigma\in\pi_1(C_\alpha)\right\}$$

により定める。このとき

「**Main theorem**

$P(X,S)\longrightarrow\underline{C}^I$ は category 同値を与える。」

「**example 2.8**　example 2.6 の場合にはつねに $I_\sigma=1$ である」

(記録係注)

講演では全て homology 群の言葉を用いたのですが、ここでは cohomology 群を用いました。従って $V_\alpha(K^\cdot)$, $N^{compact}(L^\cdot)$, $N^{closed}(L^\cdot)$ は本来は、$V_\alpha((K^\cdot)^*)^\vee$, $N^{compact}((L^\cdot)^*)^\vee$, $N^{closed}((L^\cdot)^*)^\vee$

におきかえ、morphism の矢印も逆方向にしないといけません。

また本稿では実例として $G=SL_2(\mathbb{C})$ に対する flag manifold を用いましたが，$SL_3(\mathbb{C})$ で同様の計算をした人がいるらしく分厚い preprint は存在する，と Brylinski 氏が言っていたようです。

最後に、記録係のわからなかった点など教えて頂いた柏原正樹氏に感謝します。

References

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne: Faisceaux pervers

Astérisque 100 (1982)

[BK] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara: Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems; Invent math. 64 (1981), 387-410.

[GM] M. Goresky and R. MacPherson: Intersection homology theory II, Invent. math. 72 (1983), 77-103.

[MV] R. MacPherson, K. Vilonen: Construction élémentaire des faisceaux pervers; in preparation.