数理解析研究所講究録
第512巻 1984年 22-39

対称群の表現の新しい構成法について

阪大理　村上　順　(Jun Murakami)

序．Weyl群の表現の構成は，古典的にもなされていたが，最近より自然な構成法として，Springer表現や，Left Cell表現などが知られるようになった。そこでこれらの間にどのような関係があるか興味が持たれる。A型のWeyl群，すなわち対称群については，上の2つの表現は一致するだろうと考えられている。ここではA型の対称群Wについて，分割λに対応するSpringer表現に一致していると思われる表現を構成し，さらに，W-加群$\mathbb{C}[W/W_\lambda]$中の，この表現に対応する部分加群の，ここでの構成法に対応する基底を表わす予想を述べる。ここで作った表現は，Springer表現に似ているが，また，W-graphにもなっており，Hecke環の表現になっているので，Springer表現と，Left cell表現の一致が，より調べやすくなったのではないかと思う。

1．定義（Hecke環）

(W, S)をCoxeter系とする。Wの元に対応する基底T_wを持

5. 次の関係式で定義される $\mathbb{Q}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ 上のalgebraを(W, S)に対応するHecke環という。

$w, w' \in W$, $\ell(w)+\ell(w') = \ell(ww')$ のとき, $T_w T_{w'} = T_{ww'}$

但し ℓ は W の元の S に関する長さを表わす。また, $s \in S$ に対し, $(T_s+1)(T_s-q)=0$

2. 定義(W-graph)

Coxeter系(W, S)に対し, 次の条件をみたす3つ組(X, I, μ)をW-graphという。

X: 頂点集合

$I: X \longrightarrow 2^S$ (XからSの部分集合の集合への写像)

$\mu: X \times X \longrightarrow \mathbb{Z}$

また, Xの元に対応する基底を持つ $\mathbb{Q}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ 上のfree module Eに対し, 次でSの元の作用を定める。

$x \in X$ に対し,

$$\tau_s(x) = \begin{cases} -x & \text{但し } s \in I(x) \\ qx + q^{1/2} \displaystyle\sum_{\substack{y \in X \\ s \in I(y)}} \mu(y, x)\, y & \text{但し } s \notin I(x) \end{cases}$$

そして, $s \neq t$ なる $s, t \in S$ に対し, st のorderを m とすると

$$\underbrace{\tau_s \tau_t \tau_s \cdots}_{m\text{コ}} = \underbrace{\tau_t \tau_s \tau_t \cdots}_{m\text{コ}} \quad \text{となっている。}$$

すなわち, $\tau_s \in \mathrm{End}(E)$ が(W, S)のHecke環の表現にまで

拡張できる。

3. W-graphになる為の条件

与えられた3つ組 (X, I, μ) がW-graphになる為には、Wの生成元の集合 S の任意の2個の元 s, t に対し、

$\tau_s \tau_t \tau_s \cdots = \tau_t \tau_s \tau_t \cdots$ （ともに st の位数個の積）

が成り立てばよい。A型の場合に必要な st の位数が2又は3の場合にこの条件を具体的に書き直してみると次のようになる。

<u>命題</u> 3つ組 (X, I, μ) に対し

$\{x_i\} = \{x \in X \mid I(x) \not\ni s, I(x) \not\ni t\}$

$\{y_j\} = \{x \in X \mid I(x) \ni s, I(x) \ni t\}$

$\{z_k\} = \{x \in X \mid I(x) \ni s, I(x) \not\ni t\}$

$\{w_l\} = \{x \in X \mid I(x) \not\ni s, I(x) \ni t\}$

$a_{ij} = \mu(z_i, w_j)$, $b_{ij} = \mu(w_i, z_j)$, $c_{ij} = \mu(z_i, x_j)$

$d_{ij} = \mu(w_i, x_j)$, $e_{ij} = \mu(y_i, z_j)$, $f_{ij} = \mu(y_i, w_j)$

とする。

1) $(st)^2 = 1$ のとき

$a_{ij} = b_{ij} = 0$, $\sum_k e_{jk} c_{ki} = \sum_k f_{jk} d_{ki}$

2) $(st)^3 = 1$ のとき （$\forall x, y \in X$ について $\mu(x, y) \geq 0$ を仮定する。）

$|\{z_k\}| = |\{w_l\}|$ で、適当に添え字を取り替えることにより $a_{ii} = b_{ii} = 1$, $a_{ij} = b_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ となり、さらに

$\sum_k e_{jk} c_{ki} = \sum_k f_{jk} d_{ki}$, $\sum_k e_{jk} d_{ki} = \sum_k f_{jk} c_{ki}$ を満す。

1), 2) が W-graph になる為の条件となる。

4. 記号

$G = GL(l, \mathbb{C})$, $B = \{x \in G \mid x$ は上半三角行列$\}$

λ: l の分割 (fix)　$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots > 0$, $\sum \lambda_i = l$

u: 分割 λ に対し，右のようにして定まる unipotent 行列

$$u = \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \\ \lambda_2 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & \ddots & 0 \\ & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & \ddots & 0 \\ & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{matrix}} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Jordan block

$\mathcal{B} = G/B$

$\mathcal{B}_u = \{gB \in \mathcal{B} \mid g^{-1}ug \in B\}$

とする。また

$T = \{x \in G \mid x$ は対角行列$\}$, $W = N_G(T)/T$ とすると

$W \cong \mathfrak{S}_l$ (l次対称群) となる。ここで $\mathfrak{S}_l$ の互換 $(i\ i{+}1)$ に対応する W の元を s_i で表す。そして

$P_i = B \cup Bs_iB$ (Gの部分群), $p_i: \mathcal{B} \longrightarrow G/P_i$

とし，$\mathcal{B}_u = \bigcup_k V_k$ と既約成分へ分解したときの各成分に対し，$I(V_k) = \{s_i \mid p_i^{-1}(p_i(V_k)) = V_k\}$ とする。

5. 知られている結果

<u>命題</u> (Spaltenstein)

1) $\mathcal{B}_u$ の既約成分の次元はみな等しい。

2) $\mathcal{B}_u$ の既約成分は u に対応する分割 λ を台とする standard tableau により parametrize される。

3) $\mathcal{B}_u$ の既約成分 V に対し，s_i が $I(V)$ に入ることと，V に対応する standard tableau で $i+1$ が i よりも下の行にあることとは同値である。

<u>命題</u> (Hotta, Springer)

Springer表現は、$\mathcal{B}_u$ の既約成分 $\{V_i\}$ に対応する cycle を基底とする，$\mathcal{B}_u$ のホモロジーの最高次の所へのWeyl群の作用を定めるが，これは次のようになっている。

$$s_k[V_i] = \begin{cases} -[V_i] & s_k \in I(V_i) \\ [V_i] + \displaystyle\sum_{\substack{I(V_j) \ni s_k \\ V_i \cap V_j \underset{\text{codim } 1}{\subset} V_i}} n_{ijk}[V_j] & s_k \notin I(V_i) \end{cases} \qquad n_{ijk} \in \mathbb{Z}$$

<u>注意</u> n_{ijk} は良くはわかっていないが，A型の場合，すべて1と予想されている。

6. 主定理

$\mathcal{B}_u = \bigcup_i V_i$ (既約分解) とする。このとき $X = \{V_i\}$ とし，I として $I(V_i)$ をとり，

$$\mu(V_i, V_j) = \begin{cases} 1 & V_i \cap V_j \underset{\text{codim } 1}{\subset} V_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とすると，(X, I, μ) は $(\mathfrak{S}_n, \{s_k\})$ に関する W-graphになる。また，対応する表現は既約になり，分割入

で parametrize される表現に同値である。

定理の後半は I の性質から出てくるので，以下では W-graph になることを示す。まずその為の準備を 7〜12 で行う。

7. $\mathfrak{n}^G \cap N$ と $\mathcal{B}_u$ の関係

$\mathfrak{n} = u - id$

$N = \{ x \in M_n(\mathbb{C}) \mid x$ は上半三角 nilpotent 行列$\}$

$$\begin{array}{ccccc}
u^G & \xleftarrow{pr_2} & G & \xrightarrow{pr_1} & G/B \\
\cup & & \cup & & \cup \\
pr_2 \cdot pr_1^{-1}(\mathcal{B}_u) & \longleftarrow & pr_1^{-1}(\mathcal{B}_u) & \longrightarrow & \mathcal{B}_u \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
g^{-1}ug & \longleftarrow\!\shortmid & g & \longmapsto & gB
\end{array}$$

とする。pr_1, pr_2 を上図のような標準的な射影とすると，pr_1 の fiber はみな B に同型であり，pr_2 の fiber はみな $Z_G(u)$ （u の G 中での中心化群）に同型である。そして，これらはともに連結，既約なので，$\mathcal{B}_u$ の既約成分と $u^G \cap B$ の既約成分とは 1 対 1 に対応し，さらに $\mathcal{B}_u$ の既約成分の交わりの codimension は対応する $u^G \cap B$ の交わりの codimension と等しくなる。一方，$u^G \cap B$ と $\mathfrak{n}^G \cap N$ とは同型である。そこで，$\mathcal{B}_u = \bigcup_i V_i$ と既約分解するかわりに，以下では $\mathfrak{n}^G \cap N = \bigcup_i \mathcal{V}_i$ という既約分解で考えることにする。但し $\mathcal{V}_i$ は V_i に対応する既約成分とし，$I(\mathcal{V}_i) = I(V_i)$ とおく。

8. <u>補題</u> $\mathcal{V}_i$ は $P_{I(\mathcal{V}_i)}$ の作用で不変である。但し

$$P_{I(\mathcal{V}_i)} = \bigcup_{w \in W_{I(\mathcal{V}_i)}} BwB \ , \quad W \supset W_{I(\mathcal{V}_i)} = \langle s \mid s \in I(\mathcal{V}_i) \rangle$$

証明　$I(V_i) \ni s_k$ ならば $p_k^{-1} \cdot p_k(V_i) = V_i$ となることを、pr_1, pr_2 を用いて $\mathcal{V}_i$ の条件に直せば良い。

9. 補題　$\mathcal{V}_i$ は $\mathrm{Lie}(P_{I(\mathcal{V}_i)})$ の nilpotent radical に含まれる。

証明　$\mathcal{V}_i \subset N$ であり、$\mathcal{V}_i$ は $P_{I(\mathcal{V}_i)}$ で不変である。対偶を示す。x が $\mathrm{Lie}(P_{I(\mathcal{V}_i)})$ の nilpotent radical に入らないとすると、ある $P_{I(\mathcal{V}_i)}$ の元 p で、$p^{-1}xp \notin N$ となるものがあるので、$x \notin \mathcal{V}_i$ である。

10. 命題　$V_i^k = \{x \in V_i \mid p_k^{-1}(x) \in \mathcal{B}_u\}$, $\mathcal{V}_i^k = pr_2 \cdot pr_1^{-1}(V_i)$ とすると $\mathcal{V}_i^k = \{x \in \mathcal{V}_i \mid x_{k\,k+1}$ (xの$k\ k+1$成分)$=0\}$ となる。

証明　$\mathcal{V}_i^k = \{x \in \mathcal{V}_i \mid P_k \cdot x \in N\}$ なので 9 と同様にして $x \in \mathcal{V}_i^k \iff x_{k\,k+1} = 0,\ x \in \mathcal{V}_i$ がわかる。

11. 命題　$\mathcal{U}_i^k = \{U : n^G \cap N$ の既約成分 $\mid U \cap \mathcal{V}_i \underset{\text{codim } 1}{\subset} \mathcal{V}_i$, $I(U) \ni s_k\}$, $\tilde{\mathcal{V}}_i^k = P_k \cdot \mathcal{V}_i^k$ とする。このとき $I(\mathcal{V}_i) \not\ni s_k$ ならば $\tilde{\mathcal{V}}_i^k = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_i^k} U$（既約分解）となる。

また、$\tilde{\mathcal{V}}_i^k$ の既約成分と $\mathcal{V}_i^k$ の既約成分は1対1に対応する。

証明　前半　命題10による。

後半　$\mathcal{V}_i^k$ の既約成分で P_k の作用で不変なものが無いことをいえばよい。$\{x \in \mathcal{V}_i \mid P_k \cdot x \subset \mathcal{V}_i\} = \{\mathcal{V}_i$ での $x_{k\,k+1} = 0$ の特異点$\}$ で右辺の余次元が2になるので、P_k の作用で不変な $\mathcal{V}_i^k$ の既約成分は無い。

12. λを台とするstandard tableau と $N_n = n^G \cap N$ の既約成分との対応

λを台とするstandard tableau をξとし，それに対応するN_n の既約成分をVとすると，Vはξから次のようにして帰納的に定めることができる。まず，ξ^k $(k \leqq l)$ をξのうち1からkまでの数が入っている部分からなるkのある分割　　　とするstandard tableau とする。そしてξ^kに対応する $N_n^k = n_{\lambda_\xi^k}^{GL(k,\mathbb{C})} \cap N_k$ （N_k は$GL(k,\mathbb{C})$の上半三角nilpotent行列の全体）の既約成分V_k を決めていく。

1°. ξ^1 には $(0)^{GL(1,\mathbb{C})} \cap N_1 = \{(0)\}$ の唯一つの既約成分$\{(0)\}$が対応する。

2°. ξ^{k-1}に対応するN_n^{k-1}の既約成分V_{k-1}が求まっているとき，ξ^kに対応する既約成分V_kを次で定める。

$r_k : N_k \longrightarrow N_{k-1}$ を，N_k の元xに対し，そのk行k列を無視してできる$k-1$行$k-1$列の行列を対応させる写像とする。そして $V_k = \overline{r_k^{-1}(V_{k-1})}$ （N_n^kでの閉包）とする。

2°を繰り返してできるV_lがξに対応するN_n の既約成分となる。

13. 以上の準備のもとで主定理の証明の概略を述べる。

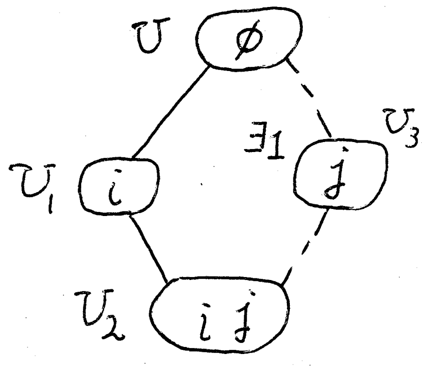
主定理での3つ組 (X, I, M) が命題3の条件をみたすことを確かめればよい。

まず $|i-j|\geqq 2$ なる $s_i, s_j \in S$ をとる。$s_i s_j$ の位数は2なので、命題3の1)の条件を確かめる。その為に次の2つの補題を示す。

補題　V_1, V_2 を $I(V_1)\ni s_i$, $I(V_1)\not\ni s_j$, $I(V_2)\not\ni s_i$, $I(V_2)\ni s_j$ となる N_n の2つの既約成分とする。このとき $\mu(V_1, V_2)=0$ である。

証明　$\mu(V_1, V_2)=1$ とすると V_2 は $P_j\cdot V_1^j$ の既約成分となる。但し $V_1^j=\{x\in V \mid x_{j\,j+1}=0\}$ とする。ところが V_1 において $i\,i+1$ 成分は0なので V_1^j においてもそうである。その上 $|i-j|\geqq 2$ なので、$P_j V_1^j$ においても $i\,i+1$ 成分は0である。これは $I(V_2)\not\ni s_i$ に矛盾する。

14. 補題　N_n の3つの既約成分



V_1, V_2, V で

$I(V)\not\ni s_i, s_j$

$I(V_2)\ni s_i, s_j$

$I(V_1)\ni s_i$, $I(V_1)\not\ni s_j$

$\mu(V, V_1)=1$, $\mu(V_1, V_2)=1$

となっているとき、次のような既約成分 V_3 が唯一つ存在する。

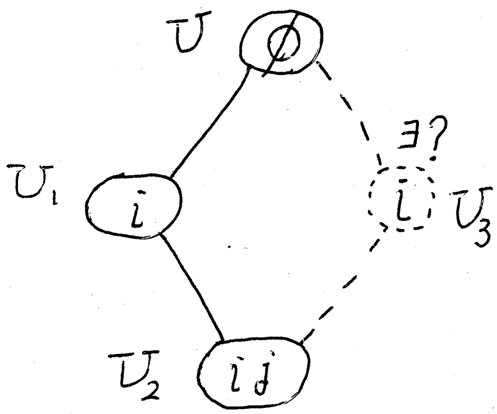
$I(V_3)\not\ni s_i$, $I(V_3)\ni s_j$, $\mu(V, V_3)=\mu(V_3, V_2)=1$

証明　1° V_3 の存在

$V^i=\overline{\{x\in V \mid x_{i\,i+1}=0,\ x_{j\,j+1}\neq 0\}}$ とすると、V_1 は $P_i\cdot V^i$

の既約成分であり，$\mathcal{V}_2$ は $P_j\cdot(P_i\cdot\mathcal{V}^{i'})^j$ の既約成分である。ところが $|i-j|\geqq 2$ なので，P_i を作用させることと $j\ j+1$ 成分が 0 の部分集合をとることとは入れ換えられ，$(P_i\cdot\mathcal{V}^{i'})^j = P_i\cdot(\mathcal{V}^{i'})^j$ となる。i と j を取り換えてみると，結局，$P_j\cdot(P_i\cdot\mathcal{V}^{i'})^j = P_i\cdot(P_j\cdot\mathcal{V}^{j'})^i$ となる。従って，$P_j\cdot\mathcal{V}^{j'}$ の既約成分 $\mathcal{V}_3$ で，$\mu(\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_2)=1$ となるものが存在する。

2°. uniqueness



仮定の $\mathcal{V},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2$ に対し，$I(\mathcal{V}_3)\ni A_i$，$I(\mathcal{V}_3)\not\ni A_j$，$\mu(\mathcal{V},\mathcal{V}_3)=\mu(\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_2)=1$ となる N_n の既約成分 $\mathcal{V}_3$ が存在したとして矛盾を導く。

$\mathcal{V}_2$ は $P_j\cdot P_i\cdot(\mathcal{V}^{i'})^j$ の既約成分なので，$(\mathcal{V}^{i'})^j\cap\mathcal{V}_2$ は $\mathcal{V},\mathcal{V}_2$ 中 codimension 2 となる。また，$(\mathcal{V}^{i'})^j\cap\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}\cap\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}\cap\mathcal{V}_3\cap\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}\cap\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2\cap\mathcal{V}_3$ となる。一方次の補題により $\mathcal{V}\cap\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_3$ は余次元 2 の既約な variety となる。$(\mathcal{V}^{i'})^j\cap\mathcal{V}_2$ の既約成分はみな余次元 2 なので，

$(\mathcal{V}^{i'})^j\cap\mathcal{V}_2\supset\mathcal{V}\cap\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_3$ となる。ところが，やはり次の補題により $\mathcal{V}\cap\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_3$ の $j\ j+1$ 成分は恒等的に 0 でないので矛盾である。

15. 補題 $\mathcal{U}$をN_nの$I(\mathcal{U}) \ni A_i$なる既約成分とする。また、$\mathcal{U}^i = \{x \in \mathcal{U} \mid x_{i\,i+1} = 0\}$とする。このとき$\mathcal{U}^i$の2つの異なる既約成分$X_1$, X_2の交わりは既約である。また、X_1でもX_2でも恒等的には0でない成分は，$X_1 \cap X_2$においても恒等的には0でない。

証明
$$X_{\alpha\beta} = \{ (x_{ij})_{\substack{\alpha \leqq i \leqq l \\ 1 \leqq j \leqq \beta}} \mid x \in X \}$$
$$R_{\alpha\beta}(X) = \max\{ \operatorname{rank} x \mid x \in X_{\alpha\beta} \}$$
$$R^{(i)}_{\alpha\beta}(X) = R_{\alpha\beta}(X^i)$$ 但しX^iはXのi集とする。
$$M^{1,j}_{\alpha\beta} = \beta - \min\{ i \mid R_{\alpha i}(X^j) \geqq 1 \} + 1$$
$$M^{2,j}_{\alpha\beta} = \max\{ i \mid R_{i\beta}(X^j) \geqq 1 \} - \alpha + 1$$
とおく。すると実は$\mathcal{U}$, X_1, X_2は次で定まる。
$$\mathcal{U} = \{ x \in N_n \mid R^{(i)}_{\alpha\beta}(x) \leqq R^{(i)}_{\alpha\beta}(\mathcal{U}) \}$$ i, α, βは任意
$$X_k = \{ x \in N_n \mid R^{(i)}_{\alpha\beta}(x) \leqq R^{(i)}_{\alpha\beta}(X_k) \}$$ $k = 1, 2$
そして
$$X_1 \cap X_2 = \{ x \in N_n \mid R_{\alpha\beta}(x) \leqq \min_{k=1,2} \{ R^{(i)}_{\alpha\beta}(X_k) \} \}$$
となる。

補題 $X_1 \cap X_2$が既約を示すには，次の(*)を確かめればよい。

(*) $R_{\alpha\beta}(X_1 \cap X_2) + R^{(i-1)}_{\alpha'\beta'}(X_1 \cap X_2) \leqq R^{(i)}_{\alpha\beta'}(X_1 \cap X_2) + M^{1,1}_{\alpha'\beta}(X_1 \cap X_2)$

但し，$\alpha, \beta, \alpha', \beta'$は次をみたす。
$$M^{1,1}_{\alpha\beta}(X_1 \cap X_2) = M^{1,i-1}_{\alpha'\beta'}(X_1 \cap X_2)$$

この補題は 次の補題を一般化して得られた。

<u>補題</u> $X = \{ x \in M_{lm}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rank}\, x \leqq a$ 但し $a \leqq l,\ a \leqq m \}$

$Y = \{ y \in M_{mn}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rank}\, y \leqq b$ 但し $b \leqq m,\ b \leqq n \}$

$Z = \{ z \in M_{ln}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rank}\, z \leqq c$ 但し $c \leqq l,\ c \leqq n \}$

$V = \{ (x, y, z) \in X \times Y \times Z \mid xy = z \}$

とすると，V が既約なことと $a + b \leqq c + m$ が成り立つこととは同値である。

さて，$X_1 \cap X_2$ について前の補題の条件がみたされることは，まず，X_1, X_2 が既約なので，これらについて (*) と同様の式が成り立ち，さらに，X_1, X_2 が V^i の既約成分となっていることから，$R^{(i)}_{\alpha\beta}$ や $M^{j,i}_{\alpha\beta}$ の値が，X_1, X_2 では V と較べてどのように変わっているかを詳しく調べることにより示される。

以上により $|i-j| \geqq 2$ なる A_i, A_j についての check ができた。

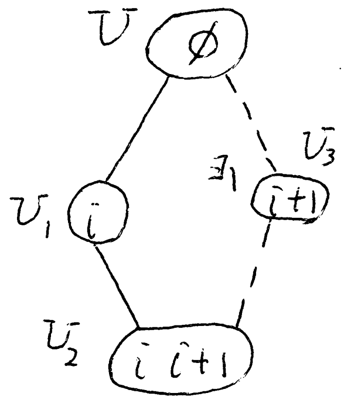
A_i, A_{i+1} についての命題3 2) の条件の check は，以下の補題16，17，18 による。

16. <u>補題</u> V を N_n の既約成分で，$I(V) \ni A_i$，$I(V) \not\ni A_{i+1}$ となるものとする。このとき，N_n の既約成分 V_1 で $I(V_1) \not\ni A_i$，$I(V_1) \ni A_{i+1}$，$\mu(V, V_1) = 1$ となるものが唯1つ存在する。

$$V \quad \exists!\, V_1$$

$$i \text{ --- --- } i+1$$

証明 $\hat{\mathcal{V}}^{i+1} = \overline{\{x \in \mathcal{V} \mid x_{i+1\,i+2}=0,\ x_{i\,i+2}\neq 0\}}$ とすると，$\hat{\mathcal{V}}^{i+1}$が既約になることが，15で定義した$R^{(i)}_{\alpha\beta}$を用いて証明できるので，$\mathcal{V}$を$P_{i+1}\cdot\hat{\mathcal{V}}^{i+1}$とすればよい。



17. 補題 N_nの既約成分$\mathcal{V}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$で
$I(\mathcal{V}) \not\ni s_i, s_{i+1}$, $I(\mathcal{V}_2)\ni s_i, s_{i+1}$,
$I(\mathcal{V}_1)\ni s_i$, $I(\mathcal{V}_1)\not\ni s_{i+1}$
$\mu(\mathcal{V},\mathcal{V}_1)=1$, $\mu(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)=1$
のとき，

$I(\mathcal{V}_3)\not\ni s_i$, $I(\mathcal{V}_3)\ni s_{i+1}$, $\mu(\mathcal{V},\mathcal{V}_3)=1$, $\mu(\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_2)=1$
となる既約成分$\mathcal{V}_3$が唯一つ存在する。

証明 1° $\mathcal{V}_3$の存在

$\mathcal{V}^{i'} = \overline{\{x\in\mathcal{V} \mid x_{i\,i+1}=0,\ x_{i+1\,i+2}\neq 0\}}$ とすると，$\mathcal{V}_1$は$P_i\cdot\mathcal{V}^{i'}$の既約成分である。また，$\mathcal{V}_2$は，
$\mathcal{V}_1^{i+1\,i} = \{x\in\mathcal{V}_1 \mid x_{i+1,i+2}=0,\ x_{i,i+2}=0\}$ としたときの
$P_{i\,i+1}\cdot\mathcal{V}_2^{i+1\,i}$ の既約成分である。但し，$P_{i\,i+1} = \bigcup_{w\in\langle s_i, s_{i+1}\rangle\subset W} BwB$
とする。

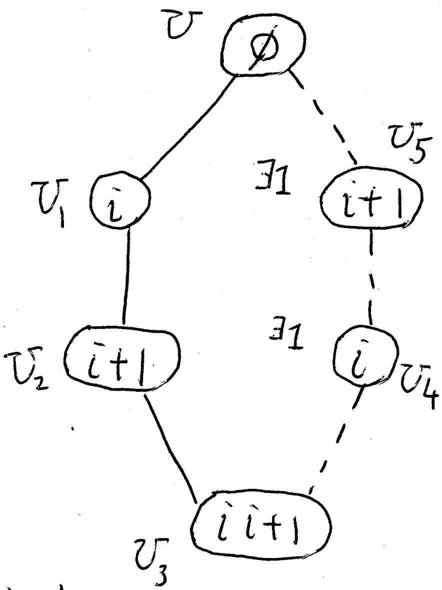
ところが，$i\,i+2$成分と$i+1\,i+2$成分を共に0にすることと，P_iの元を作用させることとは入れ換えられ，
$(P_i\cdot\mathcal{V}^{i'})^{i+1\,i} = P_i\cdot(\mathcal{V}^{i'})^{i+1\,i}$ となるので，$\mathcal{V}_2$は

$$P_{i\,i+1}\cdot P_i(\mathcal{V}^{i'})^{i+1\,i} = P_{i\,i+1}\cdot P_{i+1}(\mathcal{V}^{i+1'})^{i\,i+1}$$
$$= P_{i\,i+1}\cdot(P_{i+1}\cdot\mathcal{V}^{i+1'})^{i\,i+1}$$

の既約成分となる。従って $P_{i+1}\cdot\mathcal{V}^{i+1\prime}$ の既約成分 $\mathcal{V}_3$ で条件をみたすものが存在する。

2°. uniqueness

補題14の証明の2°と同様にする。



18. <u>補題</u>

N_n の既約成分 $\mathcal{V}\supset\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3$ で

$I(\mathcal{V})\not\ni s_i, s_{i+1}$, $I(\mathcal{V}_3)\ni s_i, s_{i+1}$

$I(\mathcal{V}_1)\ni s_i$, $I(\mathcal{V}_1)\not\ni s_{i+1}$

$I(\mathcal{V}_2)\not\ni s_i$, $I(\mathcal{V}_2)\ni s_{i+1}$

$\mu(\mathcal{V},\mathcal{V}_1)=1$, $\mu(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)=1$, $\mu(\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3)=1$

となっているとき、

$I(\mathcal{V}_4)\ni s_i$, $I(\mathcal{V}_4)\not\ni s_{i+1}$, $I(\mathcal{V}_5)\not\ni s_i$, $I(\mathcal{V}_5)\ni s_{i+1}$

$\mu(\mathcal{V},\mathcal{V}_5)=1$, $\mu(\mathcal{V}_5,\mathcal{V}_4)=1$, $\mu(\mathcal{V}_4,\mathcal{V}_3)=1$

となる $\mathcal{V}_4$, $\mathcal{V}_5$ がそれぞれ唯一つ存在する。

<u>証明</u>

17と同様 $\mathcal{V}_1$ は $\overline{\mathcal{V}^{i\prime}}$ の既約成分である。そして

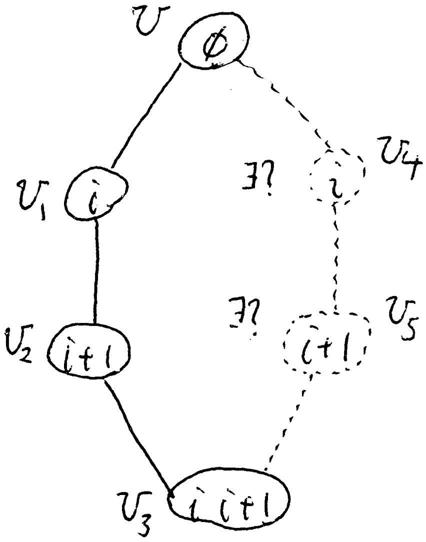
$\hat{\mathcal{V}}_1^{i+1}=\{x\in\mathcal{V}_1 \mid x_{i+1,i+2}=0,\ x_{i\,i+2}\neq 0\}$ とすると、補題16により $\hat{\mathcal{V}}_1^{i+1}$ は既約で、$\mathcal{V}_2=P_{i+1}\cdot\hat{\mathcal{V}}_1^{i+1}$ となる。さらに、

$\mathcal{V}_2^{i\,i+1}=\{x\in\mathcal{V}_2 \mid x_{i\,i+1}=0,\ x_{i+1\,i+2}=0\}$ とすると、$\mathcal{V}_3$ は $P_i\cdot\mathcal{V}_2^{i\,i+1}$ の既約成分となる。結局 $\mathcal{V}_3$ は

$\mathcal{V}=P_i\cdot(P_{i+1}\cdot(\widehat{P_i\cdot\mathcal{V}^{i\prime}})^{i+1})^{i\,i+1}$ の既約成分である。

ところが，まず，i i+1 成分と i i+2 成分が共に0の部分集合をとることと，P_{i+1}を作用させることとは入れ換えられるので，$V = P_i \cdot P_{i+1} \cdot ((\widehat{P_i \cdot v^{(i)}})^{(i+1)})^{i\,i+1}$ となる。さらに，i i+1 成分，i i+2成分，i+1 i+2成分がみな0という部分集合をとることとP_iを作用させることが入れ換えられるので，

$V = P_i \cdot P_{i+1} \cdot P_i \cdot ((\widehat{v^{(i)}})^{(i+1)})^{i\,i+1}$ となる。iとi+1を取り換えても同じVができるので，上の議論を逆にたどってv_4, v_5の存在がわかる。



2° uniqueness

v, v_1, v_2, v_3 に対し，

$I(v_4) \ni s_i$, $I(v_4) \not\ni s_{i+1}$

$I(v_5) \not\ni s_i$, $I(v_5) \ni s_{i+1}$

$\mu(v, v_4)=1$, $\mu(v_4, v_5)=1$

$\mu(v_5, v_3)=1$

となるv_4, v_5が存在しないことを背理法で示す。v_4, v_5が存在したとすると，

$v \cap v_1 \cap v_2 \cap v_3 \supset W = ((\widehat{v^{(i)}})^{(i+1)})^{i\,i+1} \cap v_3 \subset v \cap v_4 \cap v_5 \cap v_3$

で，Wの任意の既約成分の余次元は3である。ところが，$v \cap v_1 \cap v_2$ の既約成分とv_4との交わりを調べてみると，補題14の証明の2°と同様にして，余次元3の既約なvarietyで，しかもi i+2成分は恒等的には0でないことがわかる。

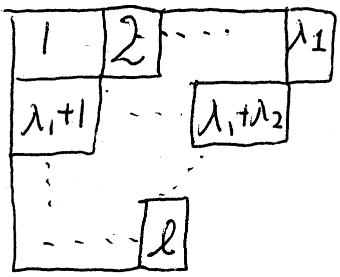
次元の比較から，ある $v \supset v_1 \supset v_2$ の既約成分と v_4 の交わりが，Wに含まれていることになるが，Wにおいては $i(12)$ 成分は常に0なので矛盾する。

以上により主定理は証明された。

最後に，ここで作った表現に関する予想を述べる。

<u>19.</u> 予想の準備

$W = N_G(T)/T$ の元 w に対し $wB \in G/B$ を対応させることにより，Wの元をG/Bの点と同一視する。

$t_0 =$ 

<u>補題</u> $w \in W$ が $\mathcal{B}_u$ に入ることと $w \cdot t_0$ が semi standard tableau になることとは同値である。但し t_0 は u に対応する分割λを台とする上のような standard tableau とする。

また，w は t_0 に数字の置換により作用する。

<u>補題</u> $W^\lambda = \{ w \in W \mid w \cdot t_0 : \text{semi standard tableau} \}$ とすると，W^λ は W/W_λ の完全代表系である。但し，W_λ は λに対応する palabolic subgroup で $W_\lambda \cong \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots$ である。

<u>20.</u> <u>予想</u> W-module $\mathbb{C}[W/W_\lambda]$ は，分割λに対応するWの既約表現を重複度1で含んでいる。このsubmoduleの基底で，定理に述べた表現と，行列表示までこめて一致する

基底が、次のようにしてとれるだろう。

$\mathcal{B}_u = \bigcup_i V_i$ （既約分解）とするとき、V_iに対応する基底を

$$f_i = (-1)^{\ell(w_0)} \sum_{w \in V_i} (-1)^{\ell(w)} m_i(w)\, w$$

但し w_0 は W の V_i の元で、長さ最小の元とする。

また、V_i の特異点に関する stratification を

$$V_i = S_i^1 \cup S_i^2 \cup S_i^3 \cup \cdots \quad (\text{直和})$$

$$S_i^1 = V_i - \mathrm{Sing}(V_i)$$

$$S_i^k = V_i - \bigcup_{\ell=1}^{k-1} S_i^\ell - \mathrm{Sing}\left(V_i - \bigcup_{\ell=1}^{k-1} S_i^\ell\right)$$

として、$w \in S_i^k$ とする k を $m_i(w)$ で表わす。

参考文献

Hotta, R. and Shimomura, N.: The fixed point subvarieties of unipotent transformations on generalized flag varieties and the Green functions; Math. Ann 241, 193-208 (1979).

Kazhdan, D. and Lusztig, G.: Representation of Coxeter groups and Hecke algebras; Invent. Math. 53, 165-184 (1979).

Kazhdan, D. and Lusztig, G. : *A topological approach to Springer's representations* ; Adv. in Math. 38, 222-228 (1980).

Spaltenstein, N. : *On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel sub-groups* ; Topology 16, 203-204 (1977).