数理解析研究所講究録
第 512 巻 1984 年 110-123

Unipotent classes : from characteristic 0 to positive characteristic

ETH - Zürich N. Spaltenstein
(庄司俊明 記)

§0. Introduction

G を代数閉体 k 上定義された連結, reductive な代数群とし, $p = \mathrm{char}(k) \geq 0$ を k の標数とする。ここでは, 次の2つの問題を考える。

(a) G の unipotent classes (G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の nilpotent orbits) を分類し, その統一的な parametrization を与える事.

(b) p が十分大きい時, unipotent classes (又は, nilpotent orbits) の分類は, 標数 0 の場合の分類と一致するが, p が小さい時は, 一致しない。p を動かす時生ずるこのずれをどの様に理解するか.

(a) に関しては，Weyl群の表現に関する Springer の理論が満足のいく結果を与える。即ち，G の unipotent classes (resp. $\mathfrak{g}$ の nilpotent orbits) は，自然な方法で $W^\wedge$ の subset S_G (resp. S'_G) によって parametrize される。但し，$W^\wedge$ は G の Weyl群 W の既約表現の同値類の集合である。古典群の場合には，S_G，S'_G あるいは，より一般に W の Springer 対応 (Lusztig によるその一般化も含めて) は，combinatorial にきれいに記述できる。

(b) に関しては，S^0_G を標数 0 の場合の unipotent classes に対応する $W^\wedge$ の subset とする。$S^0_G \subset S_G$ (resp. $S^0_G \subset S'_G$) と仮定する。G の semi simple elements に関する考察により $W^\wedge$ のある元は，必然的に S_G (resp. S'_G) に入る事が分り，これにより S_G (resp. S'_G) の subset $\overline{S_G}$ (resp. $\overline{S'_G}$) が定義される。実際には，$S_G = \overline{S_G}$ (resp. $S'_G = \overline{S'_G}$) となる事が確められる。従って，ある意味で S_G (resp. S'_G) は，semi simple classes から決まるものを含む最小の集合という事もできる。

§1. Springer の理論

1.1. G の unipotent element u に対し，$A_G(u) = C_G(u)/C^0_G(u)$

とおく。但し $C_G(u)$ は G における u の centralizer, $C_G^\circ(u)$ は、$C_G(u)$ の単位元を含む連結成分である。以下, 一般に有限群 H に対して, $H^\wedge$ を H の複素既約表現の同値類の集合とする。

$$X_G = \{(u,\phi) \mid u \in G : \text{unipotent},\ \phi \in A_G(u)^\wedge\} / \text{conjugate}$$

とおく。Springer [8], (更に [3], [1], [2]) により, $W^\wedge$ から X_G への単射 $\Phi : W^\wedge \hookrightarrow X_G$ (Springer 対応) が自然に構成される。$\rho \in W^\wedge$ に対し, $\Phi(\rho) = (u,\phi)$ (の同値類) となる時, $\rho = \rho_{u,\phi}$ と記す。各 unipotent element $u \in G$ に対して, $(u,1) \in \mathrm{Im}\,\Phi$ となる事が知られている。

$$S_G = \{\rho_{u,1} \in W^\wedge \mid u \in G : \text{unipotent}\}$$ とおく.

1.2. Springer 対応 $W^\wedge \hookrightarrow X_G$ は. Lusztig により X_G への bijection (generalized Springer 対応) に拡張された。以下. Lusztig の結果を説明する。P を G の parabolic subgroup, $P = L \cdot U_P$ を P の Levi 分解とする。G の unipotent element u, L の unipotent element v に対し,

$$Y_{u,v} = \{g C_L^\circ(v) U_P \mid g \in G,\ g^{-1}ug \in U_P\}$$

とおく。$\dim Y_{u,v} \leqq d = \frac{1}{2}(\dim C_G(u) - \dim C_L(v))$ が

成立する。$S_{u,v}$を，$Y_{u,v}$の次元がdに等しい既約成分の集合とする。$C_G(u)$はleft translationにより自然に$Y_{u,v}$に作用し，従って$A_G(u)$は$S_{u,v}$の上に置換表現を引き起す。$\psi \in A_G(u)^\wedge$に対し，ψがcuspidalとは，全ての$P(\neq G)$と$v \in L$に対し，ψが$S_{u,v}$の置換表現に現われない時を言う。この時

1.3. 定理（Lusztig [4]）

$(u, \phi) \in X_G$に対し，3つ組(L, v, ψ)を対応させる写像Ψで(*)を満たすものが存在する。(Ψをgeneralized Springer対応と呼ぶ。) 但し，L：或るparabolic subgroupのLevi subgroup，$v \in L$, unipotent element，$\psi \in A_L(v)^\wedge$：cuspidal表現である。

(*) (L, v, ψ)が$\mathrm{Im}\,\Psi$に入っている時

$$X_G \supset \Psi^{-1}((L, v, \psi)) \xrightarrow[\text{bijection}]{\sim} \left(N_G(L)/L\right)^\wedge$$

注意 (i) $L = T$: maximal torus, $v = 1$, $\psi = \mathrm{id}$の時(*)は本来のSpringer対応に一致している。

(ii) 全てのLが表われるとは限らない。又，Lが重複して表われることも起る。(*)が成りたつ場合，

特に，$N_G(L)/L$ は Coxeter 群になる事が一般的に確かめられる。

1.4. generalized Springer 対応は，Spin 群の場合を除いて，全ての単純群に対して決定されている。古典群に対しては，Lusztig [4] $(p \neq 2)$，Lusztig-Spaltenstein [5] $(p = 2)$，又，例外群に対しては Spaltenstein [7]。

1.5. $\mathfrak{g}$ の nilpotent orbits に対しても，2.1 と同様に Springer 対応が成立し，従って $S_G' \subset W^\wedge$ が定義できる。又，generalized Springer 対応も，成立する事が期待される。S_G，S_G' は全ての場合に決定されている。又，Springer 対応 $W^\wedge \hookrightarrow X_{\mathfrak{g}}$ (unipotent element を nilpotent element で置き換えて X_G と同様に定義したもの) も，p: bad の場合を除いて全て決定されている。(p: bad の場合は，例えば [6]。)

1.6. 古典群の場合，Springer 対応は Shoji $(p \neq 2)$ により決定されたが，Lusztig は generalized Springer 対応の枠組みの中で，symbol を使って，より見通しの良い記述を与えた。以下，$G = Sp_{2n}$ の場合に Lusztig

(及び Lusztig - Spaltenstein) の結果を説明する。

$r, s, n, e \in \mathbb{N}$, $d = 2e+1$ とおく.

$A = \{a_i \mid 1 \leq i \leq m+d\}$, $B = \{b_i \mid 1 \leq i \leq m\}$

を次の条件を満たす自然数の列とする.

$$(**)\begin{cases} (1) & a_{i+1} - a_i \geq r+s \quad \text{for all } i \ (1 \leq i \leq m+d) \\ (2) & b_{i+1} - b_i \geq r+s \quad \text{for all } i \ (1 \leq i \leq m) \\ (3) & b_1 \geq s \\ (4) & \sum a_i + \sum b_i = n + r(m+e)^2 + s(m+e)(m+e+1) \end{cases}$$

上の様な ordered pair (A, B) に対して, 関係

$$(A, B) \sim (\{0\} \cup A + (r+s), \ \{s\} \cup B + (r+s))$$

により生成される同値関係を考える。$X^{r,s}_{n,d}$ を

$$X^{r,s}_{n,d} = \{(**) \text{ を満たす } (A, B) \text{ の同値類}\}$$

として定義する。(A, B) を含む同値類を又 (A, B) で表わす。

$$X^{r,s}_n = \bigcup_{\substack{d \geq 1 \\ \text{odd}}} X^{r,s}_{n,d} \quad \text{とおく.}$$

$G = Sp_{2n}$ に対し, $W^\wedge$ は partition $\alpha = (\alpha_i)$, $\beta = (\beta_i)$ で $\sum \alpha_i + \sum \beta_i = n$ となるものの組 (α, β) によって parametrize される。今, α_i, β_j に 0 を適当に加えること

により，或る $m \geqq 0$ に対して，$\alpha_1 < \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_{m+1}$，
$\beta_1 < \beta_2 \leqq \cdots \leqq \beta_m$ となるものとして良い。この時 (α, β) に対し，$a_i = \alpha_i + (i-1)(r+s)$，$b_i = \beta_i + (i-1)(r+s) + s$ と置いて，$A = \{a_i\}$，$B = \{b_i\}$ を定めれば，$(A, B) \in X_{n,1}^{r,s}$ となる。この対応により，$W^\wedge$ は $X_{n,1}^{r,s}$ と同一視出来る。

又，$(A, B) \in X_{n,d}^{r,s}$ の時，distinguished element (A, B) を $d=1$，$a_1 \leqq b_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq b_m \leqq a_{m+1}$ を満たすものとして定義する。今 $(r, s) \neq (0, 0)$ と仮定して $X_n^{r,s}$ の同値関係を $(A, B), (C, D) \in X_n^{r,s}$ に対し，

$$(A, B) \sim (C, D) \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \cup B = C \cup D,\ A \cap B = C \cap D,$$

として定義する。但し，$A, B, \cdots$ は全て $\mathbb{N}$ の subset として考え，又，$X_n^{r,s}$ の中で (A, B)，(C, D) は適当な代表元を選んでおくものとする。この同値関係に対して，各同値類は唯1つの distinguished element Λ を含み，Λ の属する同値類 C_Λ は $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間と自然に同一視出来る。

1.7. 定理．$G = Sp_{2n}$ とし，$p \neq 2$ の時，$r = s = 1$，$p = 2$ の時，$r = s = 2$ とおく。その時，$X_n^{r,s}$ と X_G との間の自然な（explicit）bijection

$$\tilde{\Phi} : X_n^{r,s} \xrightarrow{\sim} X_G \quad (\text{generalized Springer 対応})$$

が存在する。$X_{n,1}^{ns} \simeq W^\wedge$ のもとに $\tilde{\Phi}|_{X_{n,1}^{ns}}$ は W の Springer 対応 $\Phi : W^\wedge \longrightarrow X_G$ に一致する。この対応で distinguished element よりなる $X_{n,1}^{ns}$ の subset が S_G に対応する。この時 unipotent element u が distinguished element Λ に対応するならば(即ち，$\Lambda \longleftrightarrow \rho_{u,1}$)，$A_G(u)^\wedge$ は C_Λ と同一視出来る。$(A,B) \in C_\Lambda \cap X_{n,1}^{ns}$ がこの対応で，$\phi \in A_G(u)^\wedge$，$\rho \in W^\wedge$ に対応する時，$\rho = \rho_{u,\phi}$ となる。

注意 orthogonal groups に対しても，同様の combinatorics により，generalized Springer 対応は記述出来る。

§2. S_G と S'_G の記述

2.1. V を W の reflection 表現とする。$S_i(V)$ を V の symmetric algebra $S(V)$ の i 次部分として得られる W-module とする。W の既約表現 ρ に対し，ρ が $S_i(V)$ に現われる様な最小の整数 i を a_ρ とおく。W' を W の Weyl 部分群とする時，truncated induction $j_{W'}^W$ は次の様に定義される。$\rho' \in W'^\wedge$ に対し，

$$j_{W'}^W(\rho') = \sum_\rho \langle \rho', \rho \rangle_{W'} \cdot \rho .$$

但し，和は，$a_{\rho'} = a_\rho$ となる全ての ρ を動く。

V'をW'のreflection表現とし，$a = a_{\rho'}$とおく．ρ'が$S_a(V')$の中に重複度1で現われる場合には，$j_{W'}^{W}(\rho')$も，既約なW-moduleとなり，$S_a(V)$の中に重複度1で現われることが示される．特に，S_G及びS_G'に含まれる既約表現は，全てこの性質を満たす事が知られている．（S_G'，従って $p \gg 0$ の場合の S_G に対しては統一的に証明されるが，pが小さい場合には，case by caseの議論による．）

2.2. 最初にnilpotent orbitsの場合を考える．$S_G' \supset S_G^{\circ}$を仮定する．$x \in \mathfrak{g}$に対し$x = s + n$をJordan分解とする．Cをxの$\mathfrak{g}$におけるG-orbitとし，$H = C_G^{\circ}(s)$とおく．

$X = \overline{k^* C}$（$\mathfrak{g}$でのalgebraic closure）を取り，

$X_0 = X \cap \{\text{nilpotent elements}\}$とおく．HのWeyl群$W'$をWの部分群とみて，truncated induction $j_{W'}^{W}$をj_H^Gと表わす事にする．Hに関するSpringer対応により$n \in \mathrm{Lie}\, H$に対して$\rho_{n,1}^{H} \in S_H'$が定まる．従って$j_H^G(\rho_{n,1}^{H}) \in W^{\wedge}$が得られる．

2.3. 定理.

(i) X_0は既約．従ってnilpotent orbitsの個数の有限性により，あるnilpotent orbit C'が存在して$X_0 = \overline{C'}$

と表わせる。

(ii) $y \in C'$ に対し, $\rho_{y,1} = j_H^G(\rho_{n,1}^H)$.

(iii) G : adjoint の時, $S'_G = S_G^\circ \cup \left(\bigcup_H j_H^G(S'_H)\right)$,

但し, union は $\mathfrak{g}$ の semi simple element s により $H = C_G^\circ(s)$ と表わせる様な G の proper subgroup H を全て動く。

注意 (a) (i), (ii) に対しては, 一般的な証明があるが, (iii) は case by case の check による。

(b) H が G の parabolic subgroup の Levi subgroup の場合, (ii) の $n \in \mathrm{Lie}\, H$ から $y \in \mathfrak{g}$ を得る操作は, nilpotent orbit の induction に他ならない。しかし, p が bad の場合, H は必ずしも Levi subgroup とはならず, この場合 S'_G には S_G° 以外の元が付け加わる事になる。

2.4. 次に unipotent classes について考える。$K = \bar{\mathbb{Q}}$ とする。$A \subset K$ を valuation ring, $\mathfrak{m}$ を A の maximal ideal とし, $k = A/\mathfrak{m}$ とおく. G を A 上定義された split, reductive group scheme として, A から K 及び k への係数拡大をそれぞれ $G(K)$, $G(k)$ とおく.

$x = su$ を $x \in G(K)$ の Jordan 分解, C を x の

$G(k)$での共役類とする。CはA上定義されたGのsubschmeとみなせる。$\bar{C}$をCの$G(k)$でのclosure, $\bar{C}(k)$を$\bar{C}$により定まる$G(k)$のsubvariety（空集合の事も有り得る）とする。その時，

2.5. <u>定理</u>

(i) $\bar{C}(k)$は既約．従って（ϕでなければ）$G(k)$の或る共役類C'のclosureに一致する。

(ii) $H(k) = C^{\circ}_{G(k)}(s)$とおく。その時，$y \in C'$に対して，
$$\rho^{G(k)}_{y,1} = j^G_H(\rho^{H(k)}_{u,1}), \quad \text{又.}$$
$$\rho^{G(k)}_{y,1} = \rho^{G(k)}_{x,1}$$
が成りたつ。（但し，$y \in G(k)$, $x \in G(k)$はunipotentとは限らない。この場合の$\rho^{G(k)}_{y,1}$, $\rho^{G(k)}_{x,1}$のnotationについては，2.7. 参照）

(iii) $x = su \in G(k)$をsemi-simple element sのorderがp-巾である様に取る。この時，$\bar{C}(k)$はunipotent elementのみからなり，$C' \subset \bar{C}(k)$は$G(k)$のunipotent classを定める。この時．
$$S_G = \bigcup_H j^G_H(S_H)$$

但し，H は order p-巾の semi simple element $s \in G(k)$ に対して，$H(k) = C^{\circ}_{G(k)}(s)$ として得られる $G(k)$ の全ての subgroup を動く。

<u>注意</u> (i) S_G' の場合と異なり，S_G° は，$s=1$ に対応して $H(k) = G(k)$ より得られる。

(ii) nilpotent の場合と同様に，この場合も，p が bad の時のみ，$H(k) \neq G(k)$ よりの S_G への寄与がある。

(iii) 証明は，case by case の check によるが，nilpotent の場合よりも，その割り合いは大きい。

2.6. p: bad の時，semi simple class $\xrightarrow[\text{(reduction)}]{}$ unipotent class となる例を以下に示す。

$p=2$ とする。

<u>例 1</u>. $G = GL_5$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ \hline & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{array}\right) \underset{\text{in } G}{\overset{\sim}{\text{conjugate}}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & & 1 & \\ & 1 & & & 1 \\ & & 1 & & \\ \hline & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(mod 2)}]{\text{reduction}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & & 1 & \\ & 1 & & & 1 \\ & & 1 & & \\ \hline & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{array}\right)$$

unipotent elt.

<u>例 2</u>　　$G = Sp_4$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ \hline & & -1 & 1 \\ & & & 1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{(mod 2)}]{\text{reduction}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & & 1\end{array}\right) = y.$$

y は $G(k)$ の unipotent element で, G の short root に対応する元であるが, これは $G(K)$ の分類には現れない。(例えば, $G(K)$ の short root に対応する元と, y は centralizer の次元が異なる。)

2.7.　$x \in G$ が必ずしも unipotent でない場合, $\rho_{x,1} \in W^\wedge$ は次の様にして与えられる。$\mathfrak{B}$ を G の Borel subgroup の全体よりなる variety とする。$x \in G$ に対し,

$$\mathfrak{B}_x = \{ B \in \mathfrak{B} \mid B \ni x \}$$

とおき, $\dim \mathfrak{B}_x = d_x$ とする。Lusztig [3] により, W は $H^*(\mathfrak{B}_x, \mathbb{Q}_l)$ に作用する。自然な埋め込み $\mathfrak{B}_x \hookrightarrow \mathfrak{B}$ は W-equivariant map $f : H^{2d_x}(\mathfrak{B}) \longrightarrow H^{2d_x}(\mathfrak{B}_x)$ を引き起こす。f の像は既約な W-module となる。$\rho_{x,1} = \mathrm{Im}\, f$ とおく。

References

1. Borho, W. and MacPherson, R.: Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés de nilpotentes. C.R. Acad. Sci. Paris 292, 707-710 (1981)
2. Borho, W. and MacPherson, R.: Partial resolutions of nilpotent varieties. Asterisque 101-102, 23-74 (1983)
3. Lusztig, G.: Green polynomials and singularities of unipotent classes. Adv. in Math. 42, 169-178 (1981)
4. Lusztig, G.: Intersection cohomology complexes on a reductive group I, II. preprint.
5. Lusztig, G. and Spaltenstein,N.: 準備中
6. Spaltenstein, N. Nilpotent orbits of exceptional Lie algebras over algebraically closed field of bad characteristc. preprint.
7. Spaltenstein, N.: On the generalized Springer correspondence for exceptional groups. preprint.
8. Springer, T.A.: Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. Inventiones Math. 36,173-207 (1976)