数理解析研究所講究録
第512巻 1984年 124-136

Left cells in Coxeter groups

G. Lusztig (MIT)

0. 序

$\mathfrak{g}$ = 半単純 Lie 群

$U(\mathfrak{g})$ = enveloping algebra

$\mathrm{Prim}_0 U(\mathfrak{g}) = \{$ primitive ideals of $U(\mathfrak{g})$ with the trivial central character $\}$

W = Weyl 群

とする。Wには、left cell と呼ばれる部分集合の族 $\{\Gamma_i\}$ が、初等的なやり方で、定義され

$W = \coprod_i \Gamma_i$

$\exists$ intrinsic bijection : $\{\Gamma_i\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Prim}_0 U(\mathfrak{g})$

となっている。この意味で、$\mathrm{Prim}_0 U(\mathfrak{g})$ の情報は、原則的には、Wに含まれていることになるが、さらに、left cell という概念は、一般の Coxeter群に対して定義できるという利点をもつ。

1. Left cell の定義

1.1. (W, S) = Coxeter 系　$(|S| < \infty)$

$l : W \longrightarrow \{0, 1, 2, \cdots\}$　length function

$\leqslant$: Bruhat order on W

とする。この時、次の条件をみたす $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-algebra H が、一意に存在する：

1. H は、free $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-module で、W で parametrize される basis $\{T_w\}_{w\in W}$ をもつ。
2. $T_w T_{w'} = T_{ww'}$, if $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$

   $(T_s + 1)(T_s - q) = 0 \qquad (s \in S)$.

この algebra を、Hecke algebra、または、Iwahori algebra と呼ぶ。

注意. 上の条件が、compatible であることは、自明のことではない。[1 ; p55] を見よ。

1.2. $H \otimes \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ には、次の条件をみたす新しい basis $\{C_w\}_{w\in W}$ が、一意に存在する [4]：

(a) $$C_w = \sum_{y \leqslant w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} q^{\frac{\ell(w)}{2} - \ell(y)} P_{y,w}(q^{-1})\, T_y$$
$$= \sum_{y \leqslant w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} q^{-\frac{\ell(w)}{2} + \ell(y)} P_{y,w}(q) (T_{y^{-1}})^{-1}$$

(b) $P_{y,w} \in \mathbb{Z}[q]$

(c) $\deg P_{y,w} \leqslant \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(y) - 1)$, if $y < w$

$P_{w,w} = 1$.

(定義は簡単だが、理解するのは困難.)

2.

1.3. W = Weyl 群．または，affine Weyl 群のときは．Schubert variety の上の "intersection cohomology" を用いて．$P_{y,w}$ の geometric picture が．得られる [5]．この時．(a) は．Poincaré duality に．(b) は．奇数次の cohomology の vanishing 等々に対応する。

1.4. $\{C_w\}$ は．basis であるから．任意の $s \in S$ に対し．

$$T_s C_w = \sum_{y \in W} C_y \, a^s_{y,w} \qquad (a^s_{y,w} \in \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}])$$

と書ける。(C_w は．ある multiplicative property をもっていて．この右辺は特別の形をしている [4]．) この時．次のように定義する。

$$y \underset{L}{\leq} w \iff {}^\exists y = y_0, y_1, \cdots, y_n = w \quad {}^\exists s_1, \cdots, s_n$$

$$\text{s.t.} \quad a^{s_i}_{y_i\, y_{i-1}} \neq 0 \qquad (1 \leq i \leq n)$$

$$y \underset{L}{\sim} w \iff y \underset{L}{\leq} w \quad \text{and} \quad y \underset{L}{\geq} w .$$

すると，$\underset{L}{\sim}$ は同値関係であり．これに関する同値類を．<u>left cell</u> と呼ぶ。$T_s C_w$ のかわりに．$C_w T_s$ を用いて．<u>right cell</u> が定義され．両方を用いて <u>two sided cell</u> が．同様に定義される [4]．

1.5. Γ を．W の left cell とする。大雑把にいって．

$$\{C_w\}_{w \in \Gamma} = \text{a basis of a left } H\text{-module}.$$

正確な定義は[9]. $q \to 1$ と特殊化すると. この left H-module は. left W-module を与える。これを[Γ]と書く。W が有限の時、この[Γ]として、どのような表現が出てくるかは、予想はされているが. まだ証明できない[8].

1.6. W が、半単純 Lie 群 $G/\mathbb{C}$ の Weyl 群のとき、

(a) {two sided cell}

$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ {special representation of W}

= {Joseph's Goldie rank representation}

$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ {special unipotent class in $G^{\#}$}

two sided cell C に対応する. special unipotent class を $u^{G^{\#}}$ とすると

(b) $\# \{ \text{left cell in } C \}$

$= \dim H^{top}(\mathcal{B}_u)^{A(u)}$

ここで. special representation 及び. special unipotent class の定義は[7], Goldie rank representation の定義は. [3] を見よ。また,

$G^{\#} = G$ の dual group

$\mathcal{B}_u = \{ \text{Borel subgroup} \ni u \}$.

$A(u) = \pi_0 (Z_{G^{\#}}(u))$.

1.7. (予想) W が. affine Weyl 群のとき.

(a) $\{\text{two sided cell}\}$
$\overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{unipotent class in } G^\#\}$

two sided cell C に対応する unipotent class を $u^{G^\#}$ とすると

(b) $\#\{\text{left cell in } C\}$
$= \sum_i (-1)^i \dim H^i(\mathcal{B}_u)^{A(u)}$.

注意. $H^{odd}(\mathcal{B}_u) = 0$ が知られているので. (b) の右辺 > 0.

1.8. (予想) W を. 一般の Coxeter 群とする。
$\#\{\text{two sided cell}\} < \infty$

2. Involutions.

2.1. $W = \mathfrak{S}_n$ のとき. W の各 left cell は. 丁度一つだけ involution を含む [4][6].

2.2. W = Weyl 群, Γ = left cell とすると
$\Gamma \ni$ Duflo involution.

2.3. 別のやり方で、2.2 の Γ が、involution を含むことを示す。

$E \in W^\vee = \{$ irreducible W-module $\}$

$E(q) =$ corresponding representation of $H \otimes \mathbb{C}((q^{1/2}))$ (cf. [9])

$a_E \geqq 0$ を

$$\mathrm{Tr}(q^{-\ell(x)/2} T_x ; E(q)) = c_{x,E}\, q^{-a_E/2} + (\text{higher powers of } q^{1/2}), \quad ({}^\forall x \in W)$$

となる最小の整数とする。

命題 (a) $c_{x,E} \geqq 0$ $({}^\forall E \in W^\vee)$ となる $x \in \Gamma$ が、一意に存在する。

(b) このとき、$x^2 = 1$.

注意. この x と、Duflo involution は、一致するものと思われる。

2.4. (予想) 任意の Coxeter 群の、任意の left cell は、involution を含む。

2.5. W を classical type の Weyl 群とする。

定理. $\#\{\text{involutions in a fixed left cell}\} = 2^d$
　　（d はある整数, $\#$ = cardinality）

証明. Γ = left cell

$$\Gamma^* = \{ x \in \Gamma \mid c_{x,E} \neq 0 \quad \text{for some } E \in W^\vee \}$$

とすると, 次のことが, わかっている。

(a) $W \neq W(E_8)$ なら, $\Gamma^* = \Gamma \cap \Gamma^{-1}$

(b) W = classical type なら, $\Gamma^* = \{\text{involutions in } \Gamma\}$

(c) 任意の Weyl 群と, その任意の left cells Γ, Δ に対し, $\#(\Gamma \cap \Delta^{-1}) = \dim \mathrm{Hom}_W([\Gamma], [\Delta])$

（1.5 節を参照） これより, 次のことを示せば, 十分。

(d) W が, classical type なら, 任意の left cell の与える表現は, multiplicity free で, 2^d 個の既約成分を持つ。

これを, 以下の節で示す。

2.6. （この節については [10].）

$\mathcal{G}$ = 有限群

$$\mathcal{M}(\mathcal{G}) = \{ (x, \sigma) \mid x \in \mathcal{G},\ \sigma \in Z_{\mathcal{G}}(x)^\vee \} / \text{conjugacy}$$

$\mathcal{M}(\mathcal{G})$ の二元 $m = (x, \sigma)$, $m' = (x', \sigma')$ に対し.

$$\{m, m'\} = \sum_{\substack{g \in \mathcal{G} \\ gxg^{-1}x' = x' gxg^{-1}}} \mathrm{Tr}(gxg^{-1}, \sigma') \, \mathrm{Tr}(g^{-1}x'^{-1}g, \sigma) \times \frac{1}{|Z_{\mathcal{G}}(x)|} \frac{1}{|Z_{\mathcal{G}}(x')|}$$

とし、$\mathcal{M}(\mathcal{G})$上の複素数値函数fのFourier変換$\hat{f}$を次のように定義する.

$$\hat{f}(m) = \sum_{m'} \{m, m'\} f(m').$$

2.7. $\mathcal{G}$が、可換群なら、

$$\mathcal{M}(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^{\vee}$$

$$\{(x, \sigma), (x', \sigma')\} = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sigma'(x)\, \sigma(x'^{-1})$$

$$\hat{f}(x, \sigma) = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{(x', \sigma')} \sigma'(x)\, \sigma(x'^{-1})\, f(x', \sigma').$$

2.8. $f : \mathcal{M}(\mathcal{G}) \to \{0, 1, 2, \cdots\}$

が、Lagrangianであるとは、次の条件が、みたされること:

(a) $\hat{f} = f$

(b) $f(1, 1) = 1$.

2.9. $\mathcal{G} = \mathbb{F}_p^{\,d}$の時、

$\{$Lagrangian functions$\}$

$= \{$Lagrangian subspacesの特性函数$\}$

但し、Lagrangian subspaceとは、symplectic form $\{\,,\}$に関するmaximal totally isotropic subspaceのこと。

証明. $f =$ Lagrangian functionとすると

$$f(x) = \hat{f}(x) = \frac{1}{|g|} \sum_{x \in \mathcal{M}(g)} \{x, y\} f(y)$$

$$\leqq \frac{1}{|g|} \sum_{x \in \mathcal{M}(g)} f(y) = \hat{f}(0) = f(0).$$

（但し．$0 = (1, 1)$．）

これから．

$f(x) = 0$ 又は 1

$|f^{-1}(1)| = |g|$

$\{x, y\} = 1 \quad (x, y \in f^{-1}(1))$

がわかり、f は Lagrangian subspace の特性函数になる。逆は、容易．

2.10. $G(\mathbb{F}_q)$ = 有限 Chevalley 群

W = G の Weyl 群

$B(\mathbb{F}_q)$ = Borel 部分群

$G^{\#}$ = G の dual group

u = $G^{\#}$ の special unipotent element

$A(u) = \pi_0(Z_{G^{\#}}(u))$

$\overline{A}(u)$ = certain quotient of $A(u)$ （［11.］参照．）

とする．良く知られているように．

$W^{\vee} \overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ { irreducible components of $1_{B(\mathbb{F}_q)}^{G(\mathbb{F}_q)}$ }

$\hookrightarrow$ { unipotent representations of $G(\mathbb{F}_q)$ }

次のことが、知られている。

$$\{\textit{unipotent representations of } G(\mathbb{F}_q)\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \coprod_{\substack{u = \textit{special unipotent} \\ (\textit{modulo conjugacy})}} \mathcal{M}(\bar{A}(u))$$

この分割は $W^\vee$ の、two sided cells への分割と compatible.

2.11. G が、classical type なら、$\bar{A}(u) = \mathbb{F}_2^d$ となる。

2.12. W = Weyl 群

Γ = left cell

C = Γを含む two sided cell

u = Cに対応する special unipotent element

$\mathcal{M}(\bar{A}(u))$ 上の函数 f_Γ を、$[C]$ に含まれる $\rho \in W^\vee$ に対応する $m \in \mathcal{M}(\bar{A}(u))$ に対しては

$$f_\Gamma(m) = (\rho : [\Gamma])$$

その他の $m \in \mathcal{M}(\bar{A}(u))$ に対しては

$$f_\Gamma(m) = 0$$

として、定めると、

$$f_\Gamma = \textit{Lagrangian}.$$

以上を、あわせて、定理の証明が得られる。

（以下、1.7 の予想に関して、気づいたことを、書いておきます：行者）

$$\mathfrak{h}^* = \text{Cartan subalgebra of Lie } G^{\#}$$

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^* \text{の dual}$$

とする。$\lambda \in \mathfrak{h}$ の定める $\mathcal{B}$ 上の line bundle の first Chern class を $c_1(\lambda)$ とすると $H^2(\mathcal{B}) \hookrightarrow H^2(\mathcal{B}_u)^{A(u)}$ であるから、$c_1(\lambda) \in H^2(\mathcal{B}_u)^{A(u)}$ と思える。$\cap$-product により、$\exp c_1(\lambda)$ は $H_*(\mathcal{B}_u)_{A(u)}$（$= A(u)$ が trivial に作用する最大の quotient）に作用する。$H_*(\mathcal{B}_u)_{A(u)}$ 上の、この $\mathfrak{h}$-作用と、W-作用をあわせて、$H_*(\mathcal{B}_u)_{A(u)}$ 上に affine Weyl 群の表現が、実現される。

一方 $\overline{\mathcal{J}_w}$ を用いて [7] 才3節 を形式的に真似ると、次の空間上に、affine Weyl 群の表現が、実現される。

$$i\,(H_{top}(\mathcal{B}_u)_{A(u)}) \cdot S(\mathfrak{h}) \qquad (\subset H_*(\mathcal{B}))$$

但し、$i : H_*(\mathcal{B}_u)_{A(u)} \longrightarrow H_*(\mathcal{B})$。図式にまとめると、

$$\begin{array}{ccc}
H_*(\mathcal{B}) & \xleftarrow{\quad i \quad} & H_*(\mathcal{B}_u)_{A(u)} \\
\uparrow & & \mathfrak{h} \uparrow \\
i(H_{top}(\mathcal{B}_u)_{A(u)}) \cdot S(\mathfrak{h}) & \xleftarrow{\quad i \quad} & H_{top}(\mathcal{B}_u)_{A(u)} \cdot S(\mathfrak{h})
\end{array}$$

A 型の場合は [2] より、i は injective であり、最近、Lascoux が、証明したという結果（伝聞）より、包含写像 $\mathfrak{h}$

は、実は、等号になる。従って、

$$H_*(\mathcal{B}_u)_{A(u)} \xrightarrow{\sim} i(H_{top}(\mathcal{B}_u)_{A(u)}) \cdot S(\mathfrak{t})$$

従って、$H_*(\mathcal{B}_u)_{A(u)}$ は、affine Weyl 群の、special 表現と、いうべきものになっている。これは、予想 1.7 (b) を支持する。

References

[1] N. Bourbaki : *Groupes et algèbres de Lie*, Chap 4. 5. 6.

[2] R. Hotta, T.A. Springer : *A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups*, Inventiones Math. 41 (1977) 113-127.

[3] A. Joseph : *Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra II*, J. Algebra 65 (1980) 284-306.

[4] D. Kazhdan, G. Lusztig : *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inventiones Math. 53 (1979) 165-184.

[5] D. Kazhdan, G. Lusztig : *Schubert varieties and Poincaré duality*, Proc. Symposia in Pure Math. 36 (1980) 185-202.

[6] D.E. Knuth: *The art of computer programming*, Chap. 5.1.4. (1973)

[7] G. Lusztig: *A class of irreducible representations of a Weyl group*, Proc. Kon. Nederl. Akad., A, 82 (3) (1979) 323-335.

[8] G. Lusztig: *A class of irreducible representations of a Weyl group II*, Proc. Kon. Nederl. Akad., A, 85 (2) (1982) 219-226.

[9] G. Lusztig: *On a theorem of Benson and Curtis*, J. Algebra 71 (1981) 490-498.

[10] G. Lusztig: *Unipotent representations of a finite Chevalley group of type E_8*, Quart. J. Math. Oxford (2), 30 (1979), 315-338.

[11] G. Lusztig: *Characters of reductive groups over a finite field*, Annals of Math. Studies (to appear)

行者明彦 記
(阪大理)