数理解析研究所講究録
第 512 巻 1984 年 148-156

対称空間の数え上げ問題

ローマ大II Corrado De Concini

問題 Schubert [3] が計算した次の数を正当化せよ。

1. 一般の位置にある 9 つの 2 次曲面と接する 2 次曲面の数 ・・・ 666,841,088.
2. 一般の位置にある 12 の 2 次曲面と接する twisted cubics の数 ・・・ 5,819,539,783,680.

2 次曲面, twisted cubics の全体はそれぞれ, $SL(4)/N(SO(4))$, $GL_4/N(GL_2)$ であって, 等質空間になっている。従って, 数え上げ幾何の問題を次の様に代数群の言葉で定式化することができる。

G : $\mathbb{C}$ 上の連結代数群。

H : G の閉代数部分群.

$X = G/H$, $n = \dim X$ とおく。

$V_1, \cdots, V_k$ を X の部分多様体の集まりで，$\sum \operatorname{codim} V_i = n$ となるものが与えられたものとする。Kleimanの定理[2]によれば，$g_2, \cdots, g_k \in G$ を generic にとれば，$V_1 \cap g_2 V_2 \cap \cdots \cap g_k V_k$ の元の個数は一定となる。この数を求めることが一般の数え上げ幾何の問題となる。

G/H が compact であれば，問題は G/H のコホモロジー環の計算に帰着する。

G/H が non-compact である時にどのような困難が生ずるかを一番簡単な例でみることにする。

$G = SL_3(\mathbb{C})$，$H = N(SO(3, \mathbb{C}))$ とすれば，$X = G/H$ は非特異2次曲線の空間（＝非特異 3×3 複素対称行列の全体。）になる。

このpairに対して，次の問題：

conic C に対して，

$$S_C \equiv \{ C \text{ と接する n.s. conics} \}$$ と定めた時，

conics $C_1, \cdots, C_5$ を generic にとった時，

$$\left| \bigcap_{i=1}^{5} S_{C_i} \right|$$ はいくつか？

を考える。

<u>Steinerの失敗</u>

Xを $\mathbb{P}^5 = \{3\times3$の対称行列$\}$/スカラー倍 の open subset
($\{$対称行列A; $\det A \neq 0\}/\mathbb{C}^*$)とみる。

S_c の$\mathbb{P}^5$内の閉包$\overline{S_c}$は$\mathbb{P}^5$内の次数6の超曲面となる。
ここで素直にBezoutの定理を用いれば，$|\#\bigcap_{i=1}^{5} S_{c_i}| = 6^5$
となりそうである。 これがSteinerの与えた数である。

但，この方法には次に見る様に，弱点がある。

$L_1, \cdots, L_5$を$\mathbb{P}^2$内の直線として，

$S_{L_i} = \{\mathbb{P}^2$内のn.s. conicsでL_iに接するもの$\}$

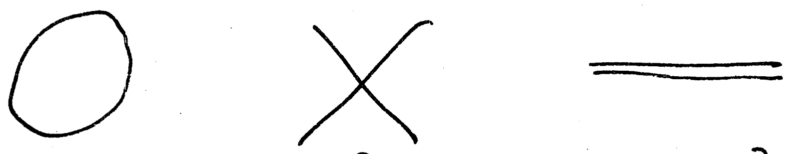
$|\bigcap_{i=1}^{5} S_{L_i}|$ を求めてみる。

1. S_{L_i}の$\mathbb{P}^5$内での閉包を$\overline{S_{L_i}}$とすれば，$\overline{S_{L_i}}$は次数2の超平面になる。 従って再びBezoutの定理を心理的根拠とすれば，$|\bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_{L_i}}| = 2^5$ となりそうである。

2. 一方，dualityによって，5本のgenericな直線に接するn.s. conicsの数は，genericな5点を通るn.s. conicsの数に等しくなる。 一点を通るconicsの全体は$\mathbb{P}^5$の超平面である。 従って，再びBezoutの定理より，$|\bigcap_{i=1}^{5} S_{L_i}| = 1$ となる。実はこれが正しい数になる。

1の論法では何故Bezoutの定理が有効に機能しないのであろうか？ その背景には次の様な事情がある。 $\mathbb{P}^5$を，

パラメーター空間ととったときは、2次曲線として次の三種類を考えることになる。



$X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$ $\qquad$ $X_0^2+X_1^2=0$ $\qquad$ $X_0^2=0$

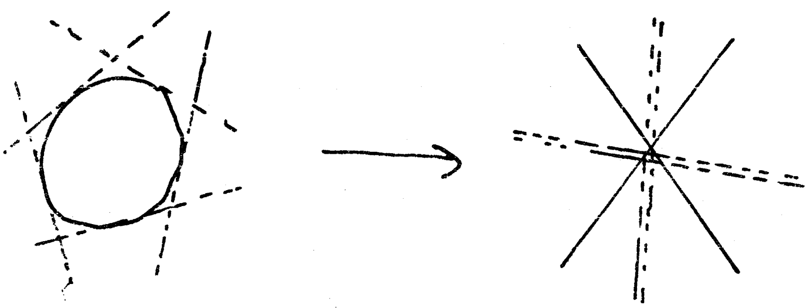
$\mathbb{P}^5$の中でS_Lの閉包をとると、常に二重直線全体$\{=\}$を含む。従って、$\bigcap_{i=1}^{5}\overline{S_{L_i}}\supset\{=\}$であって、Bezoutの定理を適用することは意味をなさない。

<u>Chasles の Idea</u>

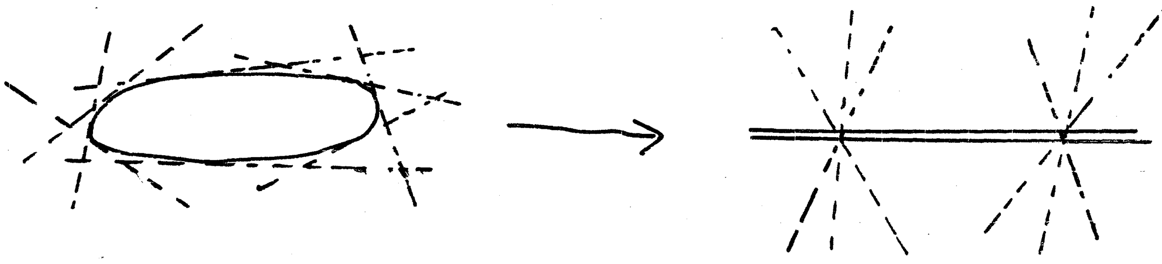
Steinerの論法の難点を克服するために、Chaslesは退化した2次曲線に対してその双対曲線がどうなるかを考えた。

すなわち、$X=\{(C,\check{C})\,;\,C$ は n.s. conic, $\check{C}$ はCの接線のなす2次曲線。$\}$ と考え、X の $\mathbb{P}^5\times\check{\mathbb{P}}^5$ 内での閉包を$\bar{X}$とした時に、$\bar{X}$をパラメーター空間と考える。

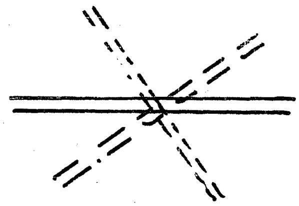
$\bar{X}$内のSL_3-orbitsはXを除いて3つあり、次の図で表わされるものになる。(実線はC、破線は$\check{C}$を表わす。)



(Γ_1)



(Γ_2)



(Γ_{12})

$\overline{X}$ については次の性質が知られている。

i) complete であること。(Study)

ii) smooth であること。(Van der Waerden)

iii) Γ_1, Γ_2 が smooth で、Γ_1 と Γ_2 が Γ_{12} で横断的に交わっていること。(Severi)

以下では $\overline{X}$ について次の事を使う。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5 & & \\ \cup & & \\ \overline{X} & \xrightarrow{p_1} & \mathbb{P}^5 \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \\ \check{\mathbb{P}}^5 & & \end{array}$$

$\mathbb{P}^5$, $\check{\mathbb{P}}^5$ の超平面の p_1, p_2 による pull-back を L_1, L_2 とする。

i) L_1, L_2 は $Pic(\bar{X}) \cong \mathbb{Z}^2$ の base になる。
ii) $\nu \equiv [L_1] \in H^2(\bar{X};\mathbb{Z})$, $\mu \equiv [L_2] \in H^2(\bar{X};\mathbb{Z})$ とおけば, ν は conic がある点を通るという条件, そして μ は conic がある直線に接するという条件を表わす。
iii). γ を「ある2次曲線に接する」という条件の定めるコホモロジー類とすれば, $\gamma = 2\nu + 2\mu$ となる。

S_{c_i} の $\bar{X}$ 内での閉包を $\hat{S}_{c_i}$ で表わせば, $\bigcap_{i=1}^{5} \hat{S}_{c_i}$ は有限集合である。 Poincaré duality によって, 重複度もこめた $\bigcap_{i=1}^{5} \hat{S}_{c_i}$ の個数は,

$$
\begin{aligned}
\gamma^5[pt] &= 2^5(\mu^5 + 5\mu^4\nu + 10\mu^3\nu^2 + 10\mu^2\nu^3 \\
&\qquad + 5\mu\nu^4 + \nu^5) \\
&= 2^6(\nu^5 + 5\nu^4\mu + 10\mu^2\nu^3) \\
&= 2^6(1 + 5\times 2 + 10\times 4) = 3264 < 6^5
\end{aligned}
$$

これが Chasles の解答であって, 実は正しい。

<u>すべての数え上げ問題は $\bar{X}$ でとけるか?</u>

答は残念ながら No! であって, 次の Severi の例が存在する。 Γ を2次曲線の generic な net とする。

$S = \{$ n.s. conics で Γ の元と4重接触をするものの全体 $\}$

とすれば，常に S の $\bar{X}$ での閉包 $\bar{S}$ は $\bar{X}$ の closed SL_3-orbit を含む。

しかしながら，conics の場合にはすべての数え上げ問題がとけるような Intersection Theory が存在する。

その候補者を次の様に一般に定義する。

G：$\mathbb{C}$ 上の連結代数群。

H：G の閉代数部分群。　$X = G/H$　$n = \dim X$.

$Z^k(X)$：X 上の次元 k のサイクルのなす自由加群。

Pairing

$$Z^k(X) \times Z^{n-k}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

を Kleiman の Lemma により，

V^k，W^{n-k}：X の k 次元，$n-k$ 次元部分多様体。

$\langle [V], [W] \rangle = \#(V \cap gW)$　(g は G の generic element)

として定義する。

$B^k(X) = Z^k(X)$ の $Z^{n-k}(X)$ に対する直交部分空間。

$C^k(X) = Z^k(X)/B^k(X)$。

$C^*(X) = \oplus C^k(X)$ が Intersection theory の候補者であるが，一般には，$C^*(X)$ は Intersection product によって環にならない。

<u>例</u>　$G=\mathbb{C}^3$（加法群）　$H=\{0\}$ととれば，
$V=\{xy=z\}$，$W=\{x=1\}$ととれば，
$[V\cap_g W]$は$C^1(\mathbb{C}^3)$の中で違う類を表現する。

しかしながら，conicsを含む次の場合には，$C^*(G/H)$を特徴づけることができ，$C^*(G/H)$がwell-definedな積構造をもつことがわかる。

G：半単純adjoint代数群$/\mathbb{C}$.
H：Gのinvolutionのfixed pt set。
$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,G$，$\mathfrak{h}=\mathrm{Lie}\,H$とすれば，$\mathfrak{h}$は$\mathrm{Grass}(\mathfrak{g})$の元である。$\overline{X}$ = $\mathfrak{h}$のG-orbitの$\mathrm{Grass}(\mathfrak{g})$の中での閉包。

$$C^*(G/H)\cong\varprojlim_{X'}H^*(X';\mathbb{Z})$$

ここで，X'は$\overline{X}$を，被約G-不変部分多様体に沿って何回かblowing upしたものである。

文献

1. DeConcini - Procesi
Complete Symmetric Varieties I
Springer L.N.M. no.996. pp.1〜44.

2. S. Kleiman

The transversality of a general translate.

Compositio Math. 28. (1974) p. 287 ~ 297

3. H. Schubert

Kalkül der Abzählenden Geometrie

Springer, reprint 1979

（宇澤達 記）