数理解析研究所講究録
第 512 巻 1984 年 157-165

代数群と数え上げ幾何

ローマ大　Claudio Procesi

G : adjoint 半単純代数群 / $\mathbb{C}$ とする。

σ : G の involution. $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,G$, $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}\,G^\sigma$

と書くことにする。

このとき、$G \cdot \mathfrak{k} \subset \mathrm{Grass}(\mathfrak{g})$ は G/G^σ に同型である。
$G \cdot \mathfrak{k}$ の $\mathrm{Grass}(\mathfrak{g})$ 内での閉包を $\overline{X}$ とかくことにする。

$\overline{X}$ の性質

i) $\overline{X}$ は smooth であって、有限 G-orbits にわかれる。

ii) $\overline{X} - X = \overline{X} - G/G^\sigma = \bigcup_{i=1}^{\ell} S_i$, ここで S_i は $\overline{X}$ の超曲面とかけば、S_i は smooth である。又、$\ell = \mathrm{rk}\, G/G^\sigma$ となる。

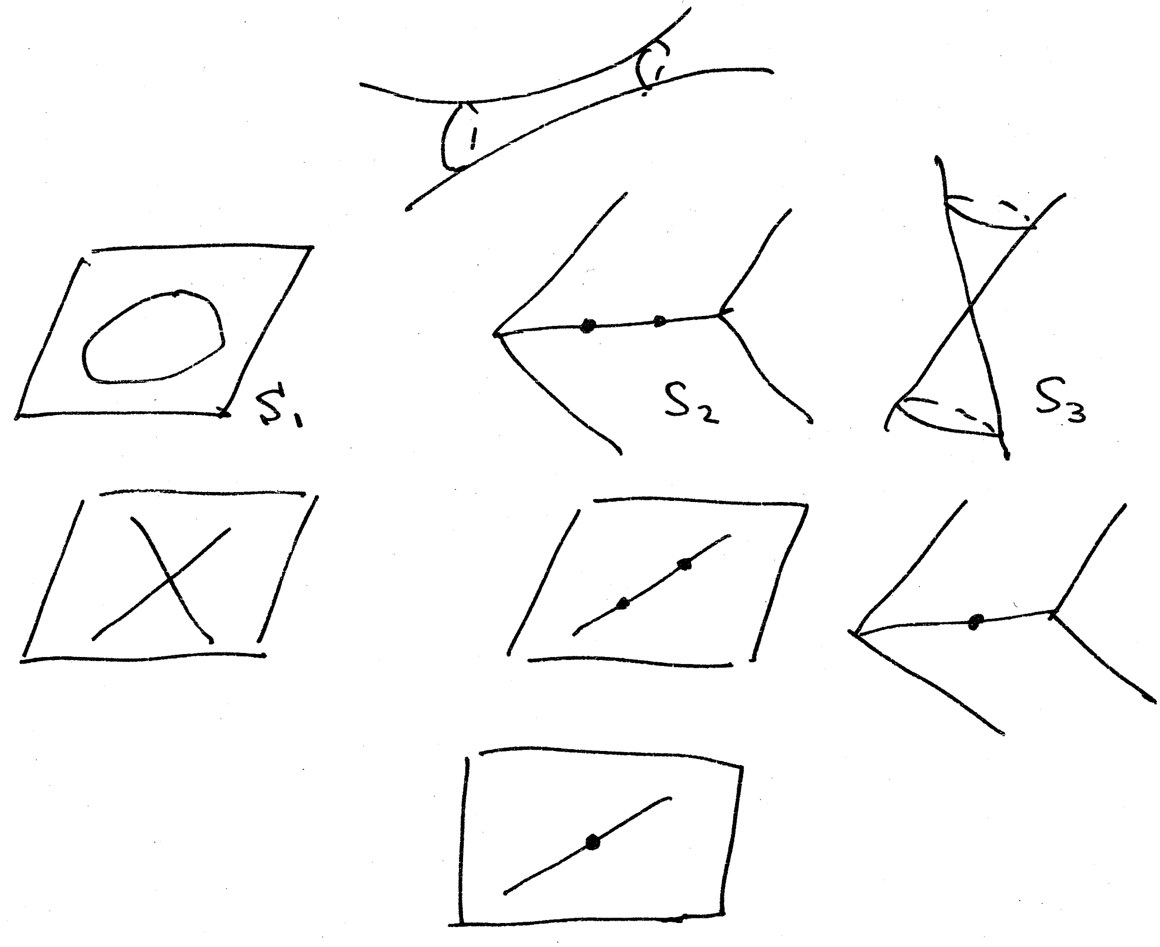
iii) $\{1, \cdots, \ell\}$ のすべての部分集合 $\{i_1, \cdots, i_k\}$ に対して、$S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_k}$ は空でない smooth variety になる。又、$S_{i_1}, \cdots, S_{i_k}$ は $S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_k}$ で横断的に交わる。

iv) 各 $S_{i_1}\cap\cdots\cap S_{i_k}$ に対して G の partial flag variety $G/P_{\{i_1,\cdots,i_k\}}$ が存在して，G－同変な projection $S_{i_1}\cap\cdots\cap S_{i_k} \longrightarrow G/P_{\{i_1,\cdots,i_k\}}$ が存在する。

例

$G=PGL(n)$，σ を $\sigma(X)={}^tX^{-1}$ によって定義する。

G/G^σ は，$\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ 内の非特異２次超曲面のパラメーター空間となる。$\mathrm{rk}\, G/G^\sigma = n-1$ である。$n=4$ の時に $\overline{X}$ の G-orbits を図示すると下図の様になる。



$\overline{X}$の元をcomplete quadricsと呼ぶことにする。又，図の意味は次の通りである。

S_1上の点は，平面上の点であり，接線は，平面上の与2次曲線と交わる直線であり，接平面は2次曲線に接する平面の全体である。

S_2上の点は，2つの平面上の点であり，接線は2平面の交線と交わる直線であり，接平面は2点のいずれかを通る平面の全体である。

S_3上の点は，cone上の点であり，接線はconeの接線であり，接平面はconeの頂点を通る平面の全体である。

iv)のfibrationは，S_1の元に対してはその平面，S_2の元に対してはその交線，S_3に対しては，coneの頂点を対応させる写像になる。

<u>数を如何にして計算するか</u>

問題は，一般の形では次の通りであった。

$V_1, \cdots, V_S \subset X$ をXの部分多様体とし，

$\#(V_1 \cap \cdots \cap V_S) < \infty$ であるとする。

V_iの$\overline{X}$内での閉包を$\overline{V_i}$とすれば，

$V_1 \cap \cdots \cap V_S = \overline{V_1} \cap \cdots \cap \overline{V_S}$

のときに，$\#(V_1 \cap \cdots \cap V_S)$ を求む。

$H^*(\overline{X};\mathbb{Z})$ の explicit な記述ができれば理想的であるが，今の所なされていない。又できてもかなり複雑なものになる公算が大である。

しかしながら，V_i $(i=1,\cdots,s)$ が divisors であれば，$\#(V_1\cap\cdots\cap V_s)$ を求めることができる。

$\mathrm{Pic}(\overline{X})$

$\overline{X}\supset S_1\cap\cdots\cap S_\ell=\mathfrak{F}$ が $\overline{X}$ の唯一の閉 G 軌道になる。（$\overline{X}$ が complete quadrics であれば，$\mathfrak{F}=G/B$ となる。）

命題．$\mathfrak{F}\hookrightarrow\overline{X}$ によって誘導される準同型

$$\mathrm{Pic}(\overline{X})\longrightarrow\mathrm{Pic}(\mathfrak{F})$$

は単射である。

例　$\overline{X}$ = complete quadrics とする。

$W=\mathrm{Pic}(\mathfrak{F})$ とすれば，W は G の weight lattice であり，$\mathrm{Pic}(\overline{X})$ の像は $2W$ となる。

$\mathrm{Pic}(\overline{X})$ の元で，次の元は簡単に書ける。

i 次元部分空間と接する2次超曲面全体の定める因子（"基本条件"）$=2\omega_{i+1}$．ここで ω_{i+1} は fundamental weight。又，S_i は $2\alpha_i$ に対応する。α_i は simple root である。

従って，基本条件を境界因子（＝退化条件）で表わすことができる。これによって，$n=\dim X$ コの基本条件の積を G/B のコホモロジー環の問題に帰着させるのが，Schubert の退化の原理である。

例　$\bar{X}$ = complete quadrics, $n=4$.　$X_i = 2\omega_i$ とおく。

$X_1^9 = X_3^9 = 1$

$X_1^8X_2 = X_3^8X_2 = 2$

$X_1^7X_2^2 = X_3^7X_2^2 = 4$

$X_1^6X_2^3 = X_3^6X_2^3 = 8$

$X_1^5X_2^4 = X_3^5X_2^4 = 16$

$X_1^4X_2^5 = X_3^4X_2^5 = 32$

$X_1^3X_6^2 = X_3^3X_2^6 = 56$

$X_1^2X_2^7 = X_3^2X_2^7 = 80$

$X_1X_2^8 = X_3X_2^8 = 92$

$X_2^9 = 92$

$X_1^8X_3 = X_3X_1^8 = 3$

$X_1^7X_3^2 = X_3^2X_1^7 = 9$

$X_1^6X_3^3 = X_3^3X_3^6 = 17$

$X_1^6X_2^2X_3 = X_3^6X_2^2X_1 = 12$

$X_1^5X_2^3X_3 = X_3^5X_2^3X_1 = 24$

$X_1^4X_2^4X_3 = X_1X_2^4X_3^4 = 48$

$X_1^6X_2X_3^2 = X_1^2X_2X_3^6 = 18$

$X_1^5X_2^2X_3^2 = X_3^5X_2^2X_1^2 = 36$

$X_1^4X_2^3X_3^2 = X_1^2X_2^3X_3^4 = 72$

$X_1^5X_2X_3^3 = X_1^3X_2X_3^5 = 34$

$X_1^4X_2^2X_3^3 = X_1^3X_2^2X_3^4 = 68$

$X_1^4X_2X_3^4 = 42$

$X_1^2X_2^6X_3 = X_3^2X_2^6X_1 = 104$

$X_1^3X_2^5X_3 = X_1X_2^5X_3^3 = 80$

$X_1^3X_2^4X_3^2 = X_3^3X_2^4X_1^2 = 112$

$X_1X_2^7X_3 = 104$

$$X_1^4X_3^5 = X_1^5X_3^4 = 21 \qquad X_1^3X_2^5X_3^2 = 128$$

$$X_1^7X_2X_3 = X_1X_2X_3^7 = 6 \qquad X_1^3X_2^3X_3^3 = 104.$$

となる。例えば、「2次曲面に接する」という条件は、$2(X_1+X_2+X_3)$ であるから、9つの2次曲面と接する2次曲面の数は、$[2(X_1+X_2+X_3)]^9 = 666,841,088$ となる。

表の作成には次の事実を使う。

次の fibration を

$$\pi : S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_k} \longrightarrow G/P_{\{i_1,\cdots,i_k\}}$$

とする。その時，$\pi^*(H^2(G/P_{\{i_1,\cdots,i_k\}};\mathbb{Z}) \ni X_{i_1},\cdots,X_{i_k}$ となる。従って特に，

1) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3X_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}$ $(k_1+k_2+k_3=6)$ の計算は，$H^*(G/B;\mathbb{Z})$ での計算に帰着する。

2) $\sum h_i = \dim(S_{i_1}\cap\cdots\cap S_{i_k})$ であれば，$\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_k}X_{i_1}^{h_1}\cdots X_{i_k}^{h_k} = 0$ となる。

我々のとる戦略は，X_1 を α_1, X_2, X_3，X_2 を X_1, α_2, X_3 等々で置き換えて，$\alpha_1\alpha_2\alpha_3X_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}$ の形の項に到達するように変形していくことである。途中で $\alpha_1\alpha_2\alpha_3X_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}$

までもって行けない項が出てくるが，それは2)によって0になってしまうのである。

例 $X_1^4X_2^2X_3^2$.

$X_1=\frac{3}{4}\alpha_1+\frac{2}{4}\alpha_2+\frac{1}{4}\alpha_3$ であるから，

$X_1^4X_2^2X_3^3=\frac{3}{4}\alpha_1X_1^3X_2^2X_3^3+\frac{2}{4}\alpha_2X_1^3X_2^2X_3^3+\frac{1}{4}\alpha_3X_1^3X_2^2X_3^3$

となる。

更に，$X_2=\frac{1}{3}(2X_1+2\alpha_2+\alpha_3)$ であるから，

$\alpha_1X_1^3X_2^2X_3^3=\frac{2}{3}\alpha_1X_1^4X_2X_3^3+\frac{2}{3}\alpha_1\alpha_2X_1^3X_2X_3^3+\frac{1}{3}\alpha_1\alpha_3X_1^3X_2X_3^4$

となる。

従って，$X_1^4X_2^2X_3^3$ を計算するためには，$\alpha_iX_1^{i_1}X_2^{i_2}X_3^{i_3}$ $(i_1+i_2+i_3=8)$ の値が必要であり，又それを求めるためには，$\alpha_i\alpha_jX_1^{i_1}X_2^{i_2}X_3^{i_3}$ $(i\neq j,\ i_1+i_2+i_3=7)$ の値が必要である。

<u>$\alpha_i\alpha_jX_1^{i_1}X_2^{i_2}X_3^{i_3}$ $(i\neq j,\ i_1+i_2+i_3=7)$</u>

$\alpha_1\alpha_2X_1^{i_1}X_2^{i_2}X_3^{i_3}$ $(i_1+i_2+i_3=7)$ の説明をする。

$\dim S_1\cap S_2=7$ であるから，$i_1+i_2=7$，つまり $i_3=0$ であれば，$\alpha_1\alpha_2X_1^{i_1}X_2^{i_2}X_3^{i_3}=0$ であることに注意する。

従って，i_3をへらしていけばよい。

$X_3=\frac{1}{2}(X_2+\alpha_3)$ であるから，

$$\alpha_1\alpha_2 x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3} = \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 x_1^{i_1}x_2^{i_2+1}x_3^{i_3-1} + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3-1}$$

右辺の第1項のx_3の巾は$i_3-1<i_3$であり，第2項は，$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$がでてくるので，$H^*(G/B;\mathbb{Z})$に帰着する。従って inductive に，$\alpha_1\alpha_2 x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$の値がわかる。

<u>$\alpha_i x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$ $(i_1+i_2+i_3=8)$</u>

$\alpha_1 x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$ $(i_1+i_2+i_3=8)$ の説明をする。（他も同様。）

$\dim S_1=8$であるから，$i_2=i_3=0$であれば，$\alpha_1 x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}=0$である。従って，$i_2, i_3$をへらして行くことができればよい。

$x_2=\frac{1}{3}(2x_1+2\alpha_2+\alpha_3)$であるから，$\alpha_1 x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}$は，$\alpha_1 x_1^{i_1+1}x_2^{i_2-1}x_3^{i_3}$，$\alpha_1\alpha_2 x_1^{i_1}x_2^{i_2-1}x_3^{i_3}$，$\alpha_1\alpha_3 x_1^{i_1}x_2^{i_2-1}x_3^{i_3}$の和になる。従って，$i_2=0$としてよい。

$x_3=\frac{1}{3}(x_1+\alpha_2+2\alpha_3)$であるから，$\alpha_1 x_1^{i_1}x_3^{i_3}$は$\alpha_1 x_1^{i_1+1}x_3^{i_3-1}$，$\alpha_1\alpha_2 x_1^{i_1}x_3^{i_3-1}$，$\alpha_1\alpha_3 x_1^{i_1}x_3^{i_3-1}$の和になる。従って，inductiveに求めることができる。

<u>一般の数え上げ問題</u>

一般の数え上げ問題に対して，$\bar{X}$は不十分である。

(DeConcini の講演) しかしながら，次の定理が成立する。

<u>定理</u> V_i を X の部分多様体とする。

$\sum \mathrm{codim}\, V_i = \dim X$ であれば，$\overline{X}$ を余次元 2 の G-軌道の閉包に沿って何回か blow up して得られる G-多様体 $\overline{X}'$ であって，

$\overline{V}_i'$ を $\overline{X}'$ 内での V_i の閉包とした時，general な $g_i \in G$ に対し，

$$\bigcap g_i \overline{V}_i' = \bigcap g_i V_i$$

となるものが存在する。

尚，X の G-同変正規完備化 $\overline{X}'$ で $\overline{X}$ 上にあるものは，対称空間 X のルート系の Weyl chamber の rational polyhedral decomposition と一対一に対応する。

(早澤 達記)

文献

C. DeConcini - G. Procesi

Complete Symmetric Varieties I

Springer L.N.M. (996) p. 1〜44

Complete Symmetric Varieties II. (preprint)