数理解析研究所講究録
第513巻 1984年 1-18

重さ1の保型形式についてのいくつかの話題

神戸大理　平松豊一（Toyokazu Hiramatsu）

§1. $f(x)$をmonicで既約な整係数多項式とし，pを素数とする．$f(x)$のreduction modulo pを$f_p(x)$とかく．$f_p(x)$はp個の元からなる体F_pに係数をもつ多項式である．$f_p(x)$がF_p内で相異なる1次式の積に分解するような素数pの集合を$Spl(f)$とかき，$Spl(f)$にぞくする素数pを決定するruleを，多項式$f(x)$に関するhigher reciprocity lawと呼ぶ．例えば，平方剰余の相互法則は次のようなruleを意味する：奇素数qに対し，$Spl(x^2-q)$は$q\equiv 1 \bmod 4$なら$\bmod q$で，$q\equiv 3 \bmod 4$なら$\bmod 4q$で決まる．

例．n位円分多項式$\Phi_n(x)$に対し，

$$Spl(\Phi_n)=\{p:\text{素数} \mid p\equiv 1 \bmod n\}.$$

はじめの$f(x)$の有理数体$\mathbb{Q}$上の最小分解体をKとし，そのガロア群をGとする．Gがアーベル群のとき，$f(x)$をアーベル多項式と云う．次の定理は$\mathbb{Q}$上の類体論(終結定理)が

教える所である：

定理．$Spl(f)$が$f(x)$のみによって決まる法に関する合同条件のみで決まるための必要十分条件は$f(x)$がアーベル多項式なことである．

それでは，$f(x)$のガロア群Gが非アーベルなとき，

$$Spl(f) = \{ p \mid \text{合同条件} + ? \}.$$

以下では，ある種の非アーベル多項式に対し上の‘?’の部分を$\Gamma_0(N)$-型の重さ1のcusp formsのFourier係数で記述することについてもふれる．

例1．$f(x) = x^3 - 2$．$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{2})$，$G = S_3$．

$$Spl(x^3-2) = \{ p \mid p \equiv 1 \bmod 3,\ (\tfrac{2}{\pi})_3 = 1 \text{ for } p = \pi\bar{\pi} \text{ in } \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \}$$
$$= \{ p \mid p \equiv 1 \bmod 3,\ \alpha(p) = 2 \}.$$

ここで，$\eta(\tau)$をDedekindのη関数とするとき，

$$\eta(6\tau)\eta(18\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

$\eta(6\tau)\eta(18\tau)$は，$\Gamma_0(2^2 \cdot 3^3)$に関する重さ1のcusp formを与える．更に，これらと楕円曲線$y^2 = 4x^3 + 1$との関連については，Koike [16]を参照して下さい．

例2（Moreno [13]）．$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$．$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{1+\sqrt{2}})$，$G = D_4$．

$$\#\{ x \in \mathbb{F}_p \mid f(x) = 0 \} = 1 + (\tfrac{-1}{p}) + a(p);$$

$$Spl(f) = \{ p \mid p \equiv 1 \bmod 8,\ a(p) = 2 \}.$$

前者を $f(x)$ に関する合同関係式と云い，後者はそれより従う．
ここで，

$$\eta(8\tau)\eta(16\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n$$

で，これは $\Gamma_0(2^7)$ に関する重さ1の cusp form である．

§2．上記例2の $a(n)$ を求めるには，Jacobiの3重積公式が使われる（Jacobi）：それによって，

$$\eta(8\tau)\eta(16\tau) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}} (-1)^b q^{(4a+1)^2+8b^2}$$
$$= \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}} (-1)^{\alpha+\beta} q^{(4\alpha+1)^2+16\beta^2}.$$

これより，次の等式を得る（Smith）：$p \equiv 1 \bmod 8$ に対し，

$$a(p) = 2\varepsilon(-1)^{\frac{p-1}{8}} = \pm 2.$$

ここで，ε は ± 1 で，$\equiv 2^{\frac{p-1}{4}} \bmod p$．上式の符号を決める所が非アーベル的な所である．一方，Kac－Peterson（[14]，[15]）は，

$$(1) \qquad \eta(8\tau)\eta(16\tau) = \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z} \\ n\geq 3|m|}} (-1)^n q^{(2n+1)^2-32m^2}$$

なる新しい等式を得た．これら3つの恒等式の数論的背景は次の如くである（Barrucand－Cohn [3]）．p を，$p\equiv 1 \bmod 8$ なる素数，虚2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数を h とする．そして，

$$p = (4a+1)^2 + 8b^2 = (4\alpha+1)^2 + 16\beta^2 = (2n+1)^2 - 32m^2$$

とするとき，次の同値関係が得られる：

$$b \equiv 0 \bmod 2 \Longleftrightarrow \alpha+\beta \equiv 0 \bmod 2 \Longleftrightarrow n \equiv 0 \bmod 2$$
$$\Longleftrightarrow \left(\frac{-4}{p}\right)_8 = 1 \Longleftrightarrow h \equiv 0 \bmod 8.$$

この同値関係の一般化を表現しているのが上の3つの恒等式に他ならない．もう一つGaussの例を与えよう．$p \equiv 1 \bmod 8$ なる素数 p を，

$$p = (4a+1)^2 + 8b^2 = (4\alpha+1)^2 + 16\beta^2 = x^2 - 32y^2$$

と表したとき，次の同値関係が成立する：

$$a \equiv 0 \bmod 2 \Longleftrightarrow \beta \equiv 0 \bmod 2 \Longleftrightarrow \left(\frac{-2}{x}\right) = 1$$
$$\Longleftrightarrow \left(\frac{2}{p}\right)_4 = 1 \Longleftrightarrow h(\sqrt{-2p}) \equiv 0 \bmod 8.$$

ここで，$h(\sqrt{-2p})$ は虚2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2p})$ の類数を表す．そして，この同値性の一般化を与えているのが，次の3つの恒等式である：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\vartheta_0(32\tau)\vartheta_2(8\tau) &= \sum_{a,b\in\mathbb{Z}} (-1)^a q^{(4a+1)^2+8b^2} \\
&= \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}} (-1)^\beta q^{(4\alpha+1)^2+16\beta^2} \\
&= \sum_{\substack{x,y\in\mathbb{Z} \\ x>6|y|}} \left(\frac{-2}{x}\right) q^{x^2-32y^2}.
\end{aligned}$$

ここで，ϑ_0，ϑ_2 はそれぞれ，

$$\vartheta_0(\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{m^2}{2}},$$
$$\vartheta_2(\tau) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ m\equiv 1 \bmod 2}} q^{\frac{m^2}{8}}.$$

上の2つの例は，次のように統一的に扱える：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \Omega \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & K \arrow[dr, dash] & & K' \arrow[dl, dash] & \\
 & & L \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
F=\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[drr, dash] & & E=\mathbb{Q}(i) \arrow[d, dash] & & k=\mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \arrow[dll, dash] \\
 & & \mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}$$

$$K=\mathbb{Q}(i,\sqrt{\varepsilon_2}),\ \varepsilon_2=1+\sqrt{2}\ ;$$
$$K'=\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{2})$$

上図で，Ω は E 上 $\bmod 8$，F 上 $\bmod 4\sqrt{2}(\infty_1)(\infty_2)$，$k$ 上 $\bmod 4\sqrt{-2}$ の極大な ray class field である．$p\equiv 1 \bmod 4$ なる素数 p に対し，

$$p:L\text{ で完全分解}\Longleftrightarrow \left(\frac{-1}{p}\right)=\left(\frac{-2}{p}\right)=1\Longleftrightarrow p\equiv 1 \bmod 8$$
$$\Longleftrightarrow p=(4a+1)^2+8b^2 \quad \text{via } k$$
$$\Longleftrightarrow p=(4\alpha+1)^2+16\beta^2 \quad \text{via } E$$
$$\Longleftrightarrow p=(2n+1)^2-32m^2 \quad \text{via } F.$$

そしてこのもとで，

$$\left(\frac{-4}{p}\right)_8=\left(\frac{\varepsilon_2}{p}\right)=1\Longleftrightarrow p:K\text{ で完全分解}\Longleftrightarrow \text{Barrucand-Cohn};$$
$$\left(\frac{2}{p}\right)_4=1\Longleftrightarrow p:K'\text{ で完全分解}\Longleftrightarrow \text{Gauss}.$$

このように扱える背景には，新谷氏の仕事[18]が深くかかわる．一方，Kac-Peterson は[15]で，次のような新しい恒等式も与えた．

例3. $\eta^2(12\tau) = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ k\geq 2|l|}} (-1)^{k+l}\, q^{\frac{3(2k+1)^2-(6l+1)^2}{2}}$.

例4. $\eta(4\tau)\eta(20\tau) = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ 2k\geq l\geq 0}} (-1)^{k}\, q^{\frac{5(2k+1)^2-(2l+1)^2}{4}}$.

本講究録でも，例2の(1)式，例3，例4について，それらのもつLie環論的側面と数論的側面の両面が扱われている．いずれにしても，以上のことを一般化して，

$$\left\{\begin{array}{l}\text{重さ1のcusp formsの}\\ \text{いくつかのテーターでの表現}\end{array}\right\} \Leftrightarrow p\text{剰余性} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{2次体の類数}\\ \text{の整除性}\end{array}\right\}$$

なる同値関係を確立することが望ましいように思われる．

§3. さて，話を少しかえて，先ほどの例2との関連で，虚2次体$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$に対応するDirichlet指標χ_{-2}をもつ$\Gamma_0(2^7)$に関する重さ1のnormalized newformは$\eta(8\tau)\eta(16\tau)$ただ一つであることが示されている（Tunnell [19], Th. 1）．それでは一般に，Γを第1種Fuchs群とし，εをそのodd characterとする．Γに関する重さ1のε付きのcusp formsの作る空間を$S_1(\Gamma,\varepsilon)$とし，

$$d_1 = \dim S_1(\Gamma,\varepsilon)$$

とおく．このd_1を求めることを問題にする．$S_1(\Gamma,\varepsilon)$に対応

する divisar D_0 が special なため，Riemann-Roch の定理がこの場合 effective に働かない．従って，なんらかの別の方法をとらなければならないが，それでも重さ > 1 のときとは異なり，Γ の基本的性質（：Γ の signature）のみによる閉じた形での farmula は望みえないと云うのが大方の意見であります．

（I） Γ : uniform lattice のとき．

$\Gamma \not\ni \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\varepsilon = id.$ とする．まず，$d_1 \bmod 2$ を考える．Γ から決まるコンパクトな Riemann 面を $\mathcal{R}$ とし，

$$S(\mathcal{R}) = \{ L : \text{holo. line bundles on } \mathcal{R} \mid L^2 \cong K \}$$

とおく．ここで，K は canonical line bundle とする．$S(\mathcal{R})$ の元は theta-characteristic と呼ばれる（Atiyah [2]）．$\deg D_0 = g-1$ （g : $\mathcal{R}$ の genus）だから，D_0 に対応する line bundle を L_0 とするとき，$L_0 \in S(\mathcal{R})$ である．$S(\mathcal{R}) \ni L$ に対し，L の holo. sections の空間を $\Gamma(L)$ とするとき，

$$d_1 = \dim \Gamma(L_0).$$

そして，$\dim \Gamma(L) \bmod 2$ は $\mathcal{R}$，L の defarmations によって stable である（Riemann）．この位相的不変量を Atiyah invariant と云う．Γ の基本的な位相的性質のみから $d_1 \bmod 2$ が決まるかどうかが一つの問題である（Hiramatsu-Mimura [10]）．

次に，d_1そのものを問題にする．結果だけを述べれば，Selberg's trace formulaにより，次のようなformulaを得る：

$$(2)\quad d_1 = \frac{1}{2}\sum_{\{M\}} \frac{1}{[\Gamma(M):1]}\,\frac{-\zeta}{(\zeta^2-1)^2} + \dim \mathfrak{M}\left(0,-\tfrac{1}{4}\right).$$

ここで，$\{M\}$はΓの楕円類をわたり，$\Gamma(M)$はΓ内のMに関するcentralizerを，また$M=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $0<\theta<2\pi$とするとき，$\zeta=e^{i\theta}$とする．更に，Laplacian

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

に関する$L^2(\Gamma\backslash S^+)$（$S^+$: 複素上半平面）上のeigenvalue $-\frac{1}{4}$の固有空間を$\mathfrak{M}(0,-\frac{1}{4})$で表す．この第2項は双曲類からの寄与で，$-\Delta$のfirst eigenvalue λ_1と深く関係する．Γが数論的ならば，$\lambda_1\geq\frac{1}{4}$であろうと予想されている．

（II）Γ: non-uniform latticeのとき．

pを，$p\equiv 3 \bmod 4$なる素数とし，$\Gamma=\Gamma_0(p)$, $\varepsilon=\left(\frac{*}{p}\right)$とする．このときの$d_1$は，(2)式に$\Gamma$のcuspsからの寄与が加わって得られる．そして下図のような図式の成立することが予想される（Hiramatsu [8]，[9]）．

実2次体$\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ⟷ 不定値2次形式 ⟷ 双曲類

実2次体$\mathbb{Q}(\sqrt{p})$	不定値2次形式	双曲類
広義の類数1問題	Hecke's indefinite modular forms	d_1における双曲類からの寄与

↓

$\dim \mathfrak{M}\left(0,-\frac{1}{4},\varepsilon\right)$

§4. Langlands予想との関連

4.1　Kを代数体, θを$K=\mathbb{Q}(\alpha)$なる代数的整数, $f(x)$ $(\in \mathbb{Z}[x])$をθの$\mathbb{Q}$上の最小多項式, d_KをKの判別式, $d_K(\theta)$をθの判別式とする. そのとき,

$$d_K(\theta) = m(\theta)^2 d_K$$

なる$m(\theta) \in \mathbb{Z}$がある. この$m(\theta)$は$f(x)$のみにdependし, Kには関係しない故,

$$Spl(K) = Spl(f) \cup \{ p : \text{素数} \mid p \mid m(\theta),\ (p)\text{は}K\text{で完全分解} \}$$

とおく. そのとき,

$$\begin{aligned} Spl(K) &= \{ p : \text{素数} \mid (p)\text{は}K\text{で完全分解} \} \\ &= \{ p : \text{素数} \mid C_p = 1 \}. \end{aligned}$$

ここで, C_pはpのFrobenius classを表す. さてそこで,

$$K \longrightarrow Spl(K)$$

なる写像を考えれば, これがbijectiveになる. 即ち, この$Spl(K)$は良い相互法則としての条件をみたしている. 以下では, $GL(n)$に関するLanglands予想(: Langlandsの相互法則)と我々のhigher reciprocity lawとの関連について述べる.

4.2　Fを代数体とし, vをそのplace, F_vをFのvでのcompletionとする. そして, $A_F(=A)$でFのアデール環とし, $G_A = GL(n, A)$とおく. G_A上の保型形式と

は，G_A上の slowly increasing left $GL(n,F)$-不変な関数で，適当なコンパクト部分群で right finite なものを云う．$n=2$，$F=\mathbb{Q}$のときにもう少しくわしく云えば，G_A上の関数ϕが次の条件(1)〜(5)をみたすとき，ϕをG_A上の保型形式と云う：

(1)　$\phi(\gamma g)=\phi(g)$ for all $\gamma\in GL(2,\mathbb{Q})$.

(2)　$\phi(gz)=\phi(zg)=\psi(z)\phi(g)$ for all $z\in\left\{\begin{pmatrix} t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}\middle|\, t\in A^\times\right\}$.

ここで，ψは$\mathbb{Q}^\times\backslash A^\times$上のユニタリー指標とする．

(3)　K_pを

$$K_p=\begin{cases} GL(2,\mathcal{O}_p), & p\neq\infty \quad (\mathcal{O}_p : \mathbb{Q}_p\text{の整数環})\\ O(2,\mathbb{R}), & p=\infty\end{cases}$$

とし，$K=\prod_p K_p$とおく．そのとき，ϕは right K-finite：Kの元によるϕの right translate により張られる空間は有限次元である．

(4)　ϕは slowly increasing, i.e., 任意な正数cとG_Aの任意なコンパクト部分集合ωに対し，定数CとNがあって

$$\left|\phi\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\right|\leqq C|a|^N \text{ for all } g\in\omega,\ a\in A^\times \text{ with } |a|>c$$

が成り立つ．

(5)　$GL(2,\mathbb{R})$の普遍展開環の中心を$\mathfrak{Z}$とするとき，ϕは$GL(2,\mathbb{R})$の関数として smooth かつ $\mathfrak{Z}$-finite である．

この上に，ϕ が次の条件(6)をみたすとき，ϕ を cuspidal と云う：

(6) $\displaystyle\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \phi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) dx = 0$ for almost every $g \in G_{\mathbb{A}}$.

この ϕ はこれまでの modular form の拡張を与えるものである．

さて，π を $G_{\mathbb{A}}$ の既約ユニタリー表現とし，これが $G_{\mathbb{A}}$ 上の保型形式（または cuspidal）の空間内の右移動として実現できるとき，π を $G_{\mathbb{A}}$ 上の保型表現（または cuspidal 表現）と云う．cuspidal 表現 π に対しては，次のような π_v が一意に決まる：

1°. π_v：既約；

2°. π_v： almost every v に関して不分岐；

3°. $\pi = \bigotimes_v \pi_v$.

例えば，$n=2$，$F=\mathbb{Q}$ とし，重さ k の cusp form を

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau}$$

とする．そして，π が f によって生成されるとする：$\pi = \pi_f$.

そのとき，

$$\pi_f = \bigotimes_p \pi_p \longleftrightarrow T_p f = a_p f \text{ for all } p \quad (T_p : \text{Hecke作用素})$$

$$\pi_p : \text{不分岐} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\pi_p \text{ に canonical に対応する半単純共役}\\ \text{類 } A_p = \begin{pmatrix}\alpha_p & 0\\ 0 & \beta_p\end{pmatrix} \text{ で, } \det A_p = 1,\ tr(A_p) = p^{-\frac{k-1}{2}} a_p\end{array}\right\}$$

Langlands予想. KをF上のガロア拡大とし，そのガロア群を$G=Gal(K/F)$とする．そして，

$$\sigma : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

なるn次元ガロア表現σに対応するArtinのL-関数を$L(s;\sigma)$で表す．そのとき，G_Aの保型表現$\pi(\sigma)$が一意に存在して，$\pi(\sigma)$に対して決まるL-関数$L(s;\pi(\sigma))$は$L(s;\sigma)$と一致する．更に，σが既約でnon-trivialなら，$\pi(\sigma)$はcuspidalである（Gelbart [5]）．

例5． $n=2$, $F=\mathbb{Q}$, $K=\overline{\mathbb{Q}}$とする．σとしては$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$に複素共役なものをとる．そのとき，$\pi(\sigma)$はもしあれば重さ1のcusp formに対応する．一方，Deligne-Serre [4]は，重さ1のcusp formに対し，上のような2次元ガロア表現の存在することを示した．従って，Langlands予想を法として，

$$\{\sigma\} \underset{1対1}{\longleftrightarrow} \{重さ1のcusp\ form\}$$

を得る．$Spl(*)$を決めるのに，我々がまず，重さ1のcusp formを使う理由もここにある．

4.3 $f(x)$をmonicで既約な整係数多項式とし，その$\mathbb{Q}$上の最小分解体をKとする．そして，

$$\sigma : Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

をn次元ガロア表現とする．$\mathbb{Q}$上の有限次ガロア拡大K_σが

あって，$\ker\sigma = Gal(\overline{\mathbb{Q}}/K_\sigma)$ となる．また，σ は

$$Gal(K_\sigma/\mathbb{Q}) \hookrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

なる埋め込みを induce する．更に，$K = K_\sigma$ となるような表現 σ が存在する．K_σ で不分岐な p に対し，C_p を $Gal(K_\sigma/\mathbb{Q})$ 内の Frobenius class とするとき，

$$\sigma(C_p) = \Phi_p(\sigma)$$

なる $GL(n, \mathbb{C})$ 内の半単純共役類が一意に存在する．従って，

$$Spl(K) = \{ p : 素数 \mid \Phi_p(\sigma) = 1 \}.$$

このとき，Langlands 予想のもとで，有限個の p を除き，

$$\Phi_p(\sigma) = A_p(\pi(\sigma)).$$

ここで，A_p は $\pi(\sigma)_p$ に対応する $GL(n, \mathbb{C})$ 内の半単純共役類を表わす．よって，

$$Spl(K) = \{ p : 素数 \mid A_p(\pi(\sigma)) = 1 \}.$$

従って，問題は G_A の保型表現の問題に帰着されたことになる（Arthur [1]）．ここで，$n = 2$ としよう．そのとき，重さ 1 の cusp form f_σ で，

$$\pi(\sigma) = \pi_{f_\sigma} = \bigotimes_p \pi_p .$$

そして，π_p が不分岐なことより，$tr(A_p(\pi_{f_\sigma})) = a_p$ となる．よって，

$$Spl(f) = \{ p : 素数 \mid p \nmid \Delta_f,\ a_p = 2 \}.$$

ここで，Δ_f は $f(x)$ の判別式を表わす．従って，我々の

これからの仕事は，a_p を p-番目の係数とするような重さ 1 の cusp form f_σ を構成することにある．

例 6（Hiramatsu-Mimura [11]）．q を，$q \equiv -1 \bmod 8$ なる素数，$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-q})$，$h$ を K の類数，L を K 上の Hilbert 類体とし，その定義多項式を $\Phi(x)$ $(\in \mathbb{Z}[x])$ とする．K のイデアル類群が巡回群のもとで，$p \nmid \Delta_\Phi$ なる素数 p に対し，

$$\#\{x \in F_p \mid \Phi(x) = 0\} = \frac{h}{6}a(p)^2 + \frac{h}{6}a(p) - \frac{1}{2}\left(\frac{-q}{p}\right) + \frac{1}{2}$$

なる $\Phi(x)$ に関する合同関係式を得る．ここで，$\left(\frac{-q}{2}\right) = 1$，$a(p)$ は以下で与えられる $\Gamma_0(q)$ に関する指標 $\left(\frac{-q}{p}\right)$ をもつ重さ 1 の normalized cusp form $f(\tau)$（$\neq$ new form）の p-番目の Fourier 係数を表わす．この系として，

$$Spl(\Phi) = \{p : \text{素数} \mid p \nmid \Delta_\Phi,\ a(p) = 2\}$$

を得る．さて，$f(\tau)$ は次のような cusp form である．$0 \leqq i \leqq h-1$ として，K 内のイデアル類 k_i（k_0：主類）に対応する 2 次形式を $Q_i(x, y)$ とする．$Q_i(x, y)$ による n の整数表現の個数を $A_i(n)$ とし，

$$\theta_i(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} A_i(n)\, e^{2\pi\sqrt{-1}n\tau} \quad (\mathrm{Im}\,\tau > 0)$$

とおく．また，χ を K のイデアル類群上の指標（$\neq 1$）とし，$A(n)$ を次で定義する：

$$A(n) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{h-1} \chi(k_i) A_i(n).$$

さてそこで，

$$f(\tau) = \theta_0(\tau) - \theta_1(\tau)\ ;$$

$$F(\tau) = \sum_{i=0}^{h-1} \chi(k_i)\,\theta_i(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A(n)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\,n\tau}$$

とおく．$f(\tau)$，$F(\tau)$ は共に，$\Gamma_0(q)$ に関する指標 $\left(\frac{q}{p}\right)$ をもつ重さ 1 の cusp forms で，特に $F(\tau)$ は normalized new form である．$Spl(\Phi)$ を表現するにはどちらを使っても同じである．しかし，$\Phi(x)$ の合同関係式を表現するには $f(\tau)$ の Fourier 係数を使う方がより簡潔である．

例 7．Stark - Shintani の理論との関連で決まるある種の実 2 次体の場合にも，Hecke の重さ 1 の indefinite modular forms の Fourier 係数を使って，higher reciprocity law が得られる（Hecke [6]，[7]，Hiramatsu - Ishii - Mimura [12]）．

References

[1] J. Arthur ; Automorphic representations and number theory, Proc. 1980 Seminar on Harmonic Analysis, CMS - AMS, 1981, pp. 3 - 51.

[2] M. F. Atiyah ; Riemann surfaces and spin structures,

Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e séries, t. 4 (1971), pp. 47 - 62.

[3] P. Barrucand and H. Cohn ; Note on primes of type x^2+32y^2, class number, and residuacity, Crelle 238 (1969), pp. 67 - 70.

[4] P. Deligne et J-P. Serre ; Formes modulaires de poids 1, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e séries, t. 7 (1974), pp. 507 - 530.

[5] S. Gelbart ; Automorphic forms and Artin's conjecture, Lecture Notes in Math., No. 627 (1978), pp. 242 - 276.

[6] E. Hecke ; Über einen neuen Zusammenhang zwischen elliptischen Modulfunktionen und indefiniten quadratischen Formen, Math. Werke, Vandenhoech und Ruprecht, Göttingen, 1959, pp. 418 - 427.

[7] E. Hecke ; Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Ibid., pp. 428 - 460.

[8] T. Hiramatsu ; On some dimension formula for automorphic forms of weight one I, Nagoya Math. J. 85 (1982), pp. 213 - 221.

[9] T. Hiramatsu ; On some dimension formula for

automorphic forms of weight one II (preprint).

[10] T. Hiramatsu and Y. Mimura ; On automorphic forms of weight one II, The Arf invariant and do mod 2, Math. Seminar Notes, Kobe Univ. 9 (1981), pp. 259 – 267.

[11] T. Hiramatsu and Y. Mimura ; The modular equation and modular forms of weight one, to appear.

[12] T. Hiramatsu, N. Ishii and Y. Mimura ; On indefinite modular forms of weight one (preprint).

[13] C. J. Moreno ; The higher reciprocity laws : an example, J. Number Theory 12 (1980), pp. 57 – 70.

[14] V. G. Kac and D. H. Peterson ; Affine Lie algebras and Hecke modular forms, Bull. A. M. S. 3 (1980), pp. 1057 – 1061.

[15] V. G. Kac and D. H. Peterson ; Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, to appear in Adv. Math.

[16] M. Koike ; Higher reciprocity law, modular forms of weight one and elliptic curves (preprint).

[17] J-P. Serre ; Modular forms of weight one and

Galois representations, Proc. Symposium on Algebraic Number Field, Academic Press, London, 1977, pp. 193 – 268.

[18] T. Shintani ; On certain ray class invariants of real quadratic fields, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), pp. 139 – 167.

[19] J. B. Tunnell ; A classical Diophantine problem and modular forms of weight $\frac{3}{2}$, Invent. Math. 72 (1983), pp. 323 – 334.