数理解析研究所講究録
第 513 巻 1984 年 154-165

半整数の Siegel 保型形式の Hecke 作用素について

名大・理 早川誠幸 (Shigeyuki Hayakawa)

筆者は修士論文で [G.Shimura] に展開されている半整数 weight の保型形式の Hecke 作用素の理論を Siegel 保型形式へ拡張した。以下に述べることの前半はその結果の概略の紹介である。一口でいえば similitude が square な double coset のみを考えれば十分でありなおかつそれらは可換環をつくるということである。可換性については当初筆者の修論の中で主張されていたが、東大の日名龍夫氏の（直接的ではないが）指摘により証明に誤りがあることがわかり，講演に於てはかなり弱い形でしか述べなかったが、その後の計算で完全に回復できることがわかったので改めてこの文中では一般の可換性を主張する。

筆者と独立に先の日名氏、京大の田中政治氏がそれぞれ筆者と同様の観点から研究されている。また伊吹

山知義先生が adelic な立場から研究されており近くその論文が出るはずである。

この文章の後半では degree 1 と 2 の場合に common eigen form の例をあげ、そのフーリエ係数から作ったDirichlet 級数について述べる。

§1.1 theta-multiplier に関する modular form

$n \in \mathbb{N}$ とするとき

$$\Theta(Z) := \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} e({}^t\eta Z \eta)$$

ただし $Z \in \mathfrak{H}_n := \{ Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \operatorname{Im} Z > 0 \}$

$e(X) = \exp(2\pi i \cdot \operatorname{tr} X)$, X:正方行列

と定義すると

$$\gamma \in \Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z}) \,\middle|\, C \equiv 0\ (N) \right\},\quad 4 \mid N \in \mathbb{N}$$

に関して Θ は次の変換公式をもつ。

$$\Theta(\gamma(Z)) = J(\gamma, Z) \cdot \Theta(Z) \quad , \forall Z \in \mathfrak{H}_n$$

ここで $\gamma(Z) := (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$, $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$J(\gamma, Z) : \mathfrak{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}^\times$: hol. fc.

$\ni J(\gamma, Z)^2 = \left(\frac{-1}{\det D} \right) \cdot \det(CZ+D)$

この $J(\gamma,\ )$ を theta-multiplier と呼ぶ。

Def. $4 \mid N$, k : odd integer , χ : Dirichlet char. mod. N

とするとき，f が modular form of degree n, weight $k/2$ level N, char. χ (w.r.t. theta-multiplier) とは

i) $f: \mathfrak{H}_n \to \mathbb{C}$: hol. fc.

ii) $f(\gamma(Z)) = \chi(\det D) \cdot J(\gamma, Z)^k \cdot f(Z)$

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

iii) $n=1$ なら $\Gamma_0(N)$ の cusp での正則性の仮定

とする。このような f の全体を $G_k(N, \chi)$ と書く。

ここでは half-integral weight といっても theta-multiplier つきのものしか考えない。A. Selberg は有理係数二次形式のテータ級数から得られる保型因子を "arithmetic type" と呼んでいるが，少なくとも正定値な場合は全て上の場合に含まれる(Neben type になる)。

§1.2 Covering group

$$G := GSp^+(n, \mathbb{R}) := \{ \alpha \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^t\alpha J \alpha = \nu(\alpha) J, \ \exists \nu(\alpha) > 0 \}$$

ただし $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$, $\nu(\alpha) \in \mathbb{R}$ (similitude of α)

とおく。Hecke theory をやるには $\alpha \in G$ に対する $J(\alpha, Z)$ がなければならない。そこで G の covering

$$\mathfrak{G} := \left\{ \xi = (\alpha, \varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G, \quad \varphi: \mathfrak{H}_n \to \mathbb{C}^\times : \text{hol. fc.} \\ \varphi(Z)^2 = t(\xi) \cdot \nu(\alpha)^{-n/2} \cdot \det(CZ+D), \ \exists t(\xi) \in \mathbb{T} \end{array} \right\}$$

ただし $\mathbb{T} = \{ c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1 \}$

を考える。$\mathfrak{G}$は次の積で乗法群になる。

$$(\alpha, \varphi(Z))\cdot(\beta, \psi(Z)) := (\alpha\beta, \varphi(\beta(Z))\cdot\psi(Z))$$

以後$\Gamma_0(N)$を(固定して)Γと書く。Γは$\mathfrak{G}$に乗法群としてうめ込める.

$$\Gamma \ni \gamma \longmapsto (\gamma, J(\gamma, Z)) \in \mathfrak{G}$$

このうめ込みの image をΔと書く。

$\xi = (\alpha, \varphi) \in \mathfrak{G}$と$f : \mathfrak{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$: fc. に対して

$$f|[\xi]_k(Z) := \varphi(Z)^{-k} f(\alpha(Z))$$

ただし $\alpha(Z) := (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$, $\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

とする。

$$f|[\xi\eta]_k = (f|[\xi]_k)|[\eta]_k \quad , \forall \xi, \eta \in \mathfrak{G}$$

である。また§1 の Def. の ii)の式は

$$f|[\gamma]_k = \chi(\det D)\cdot f$$

と同じである.

§1.3 Hecke theory

$$\tilde{\Delta} := \left\{ \xi \in \mathfrak{G} \;\middle|\; \begin{array}{l} \Delta \text{ と } \xi^{-1}\Delta\xi \text{ は commensurable} \\ \text{i.e. } [\Delta : \Delta \cap \xi^{-1}\Delta\xi], [\xi^{-1}\Delta\xi : \Delta \cap \xi^{-1}\Delta\xi] < \infty \end{array} \right\}$$

: Δの$\mathfrak{G}$における commensurator subgp.

$$S_0 := \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G \cap M_{2n}(\mathbb{Z}) \;\middle|\; C \equiv 0\ (N),\ (\nu(\alpha), N) = 1 \right\}$$

$$S := \{ \alpha \in S_0 \mid \nu(\alpha) \in \mathbb{N}^2 \}$$

$P:\ \mathfrak{G} \ni (\alpha,\varphi) \longmapsto \alpha \in G$: natural projection

とするとき $\mathfrak{G}$ の中に次の2つの半群を取る。

$$\mathfrak{S}_0 := P^{-1}(S_0) \cap \tilde{\Delta}$$

$$\mathfrak{S} := P^{-1}(S) \cap \tilde{\Delta}$$

$\tilde{\Delta} \supset \mathfrak{S}_0 \supset \mathfrak{S} \supset \Delta$ であるから Hecke algebraの一般論で2つの Hecke algebra $D(\Delta,\mathfrak{S}_0) \supset D(\Delta,\mathfrak{S})$ が得られる。

$\mathfrak{S}_0 \ni \xi = (\alpha,\varphi)$, $f \in G_k(N,\chi)$ に対し

$$f|[\Delta\xi\Delta]_{k,\chi} := \det\alpha^{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}-\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \sum_{\nu} \chi(\det A_\nu)\cdot f|[\xi_\nu]_k$$

ただし $\Delta\xi\Delta = \bigsqcup_{\nu} \Delta\xi_\nu$, $P(\xi_\nu) = \begin{pmatrix} A_\nu & B_\nu \\ C_\nu & D_\nu \end{pmatrix}$

とする。これは $D(\Delta,\mathfrak{S}_0)$ の algebra としての $G_k(N,\chi)$ 上の表現を与えるが，半整数 weightの場合い次の事実が基本的である。

Prop. 1 i,a) $P^{-1}(S) \subset \tilde{\Delta}$. i.e. $\mathfrak{S} = P^{-1}(S)$

i b) $\xi \in \mathfrak{S}$ なら $\Delta\xi\Delta = \bigsqcup_{\nu} \Delta\xi_\nu \Leftrightarrow \Gamma\cdot P(\xi)\cdot\Gamma = \bigsqcup_{\nu} \Delta\cdot P(\xi_\nu)$

ii) $\xi \in \mathfrak{S}_0 \setminus \mathfrak{S}$ なら $f|[\Delta\xi\Delta]_{k,\chi} = 0$, $\forall f \in G_k(N,\chi)$

i.e. $D(\Delta,\mathfrak{S}_0) \setminus D(\Delta,\mathfrak{S}) \subset$ kernel of $[\ \ ]_{k,\chi}$

証明は [G. Shimura] の degree 1 の場合と全く同様であるが，i,a) はガウス和の相互法則を用いる。

次に，p を N と素な有理素数とするとき

$$\mathfrak{S}_{(p)} := \left\{ \xi = (\alpha, \varphi) \in \mathfrak{S} \;\middle|\; \nu(\alpha) = p^{2m},\ m = 0, 1, 2, \cdots \right\}$$

とすると

Prop. 2　i)　$D(\Delta, \mathfrak{S})$：可換

　　　　ii)　$D(\Delta, \mathfrak{S}) = \bigotimes_{(p,N)=1} D(\Delta, \mathfrak{S}_{(p)})$

ii)の証明は [G. Shimura] と同様であるが，i)の証明は注意を要する。$\mathfrak{S}$の anti-automorphism $*$ を

$$* : \xi = (\alpha, \varphi) \longmapsto (\nu(\alpha) 1_{2n}, 1) \cdot \xi^{-1} \quad \text{([早川]の}*\text{とちがう)}$$

で定義すれば $\Delta^* = \Delta$, $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}$ より $D(\Delta, \mathfrak{S})$ の anti-automorphism が induce されるが一般に $\Delta \xi^* \Delta = \Delta \xi \Delta$ とは限らない。(たとえば $\Delta(1_{2n}, t)^* \Delta = \Delta(1_{2n}, t^{-1})\Delta$, $\forall t \in \mathbb{T}$)

しかし [早川] の中で，$\xi = (\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathfrak{S}$, ただし

$$(\star) \quad \alpha = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_n & & & \\ & & & b_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} a_i, b_i \in \mathbb{N}\ (1 \le i \le n),\ a_i \mid a_{i+1} \mid b_{j+1} \mid b_j\ (1 \le i, j \le n-1) \\ a_1 b_1 = \cdots = a_n b_n = \nu(\alpha) \in \mathbb{N}^2 \end{array}$$

$$\varphi_\alpha = \prod_{i=1}^{n} a_i^{-1/2} \cdot b_i^{1/2},$$

とすれば　$\Delta \xi^* \Delta = \Delta \xi \Delta$　であることが示されている。

ところが $\eta \in \mathfrak{S}$ もこの形の元とすると

$$(\Delta \xi \Delta) \cdot (\Delta \eta \Delta) = \sum_{S \ni \gamma : \star\text{の形}} \left\{ \begin{array}{l} a_\gamma \Delta(\gamma, \varphi_\gamma)\Delta + b_\gamma \Delta(\gamma, -\varphi_\gamma)\Delta \\ + c_\gamma \left[\Delta(\gamma, i\varphi_\gamma)\Delta + \Delta(\gamma, -i\varphi_\gamma)\Delta \right] \end{array} \right\}$$

という形になることが証明される。そこで両辺に$*$を

施すと左辺は交換し，右辺は前の２つは不変であり，うしろの２つは入れかわってもとへもどる。これにより $D(\Delta,\mathfrak{S})$ の可換性が証明される。

§2.1

$n=1$ の場合 $\left[\Delta\left(\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix},\sqrt{p}\right)\Delta\right]_{k,\chi}$ が [G. Shimura] の $T^N_{k,\chi}(p^2)$ である（p は N と素な prime）が，$G_k(N,\chi)$ の元の Fourie 係数への action の仕方が記述されている。そこで $n=2$ の場合にも $T_1=\Delta\left(\begin{pmatrix}1&&&\\&p&&\\&&p^2&\\&&&p\end{pmatrix},\sqrt{p}\right)\Delta$，$T_2=\Delta\left(\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&p^2&\\&&&p^2\end{pmatrix},p\right)\Delta$ について同様の事を試みる。即ち $f(Z)=\sum_{T\in\Lambda}a(T)\cdot e(TZ)\in G_k(N,\chi)$
$\left(\Lambda=\{T=(t_{ij})\in M_n(\mathbb{R})\mid T={}^tT\geq 0,\ t_{ij}\in\frac{1}{2}\mathbb{Z},\ t_{ii}\in\mathbb{Z}\ \ (1\leq i,j\leq n)\}\right)$ に
$(n=2)$
対し $f\|[T_i]_{k,\chi}(Z)=\sum_{T\in\Lambda}a_i(T)\cdot e(TZ)$ $(i=1,2)$ とおけば，

$$a_1(T)=\chi(p)\cdot p^{\frac{k}{2}-3}\cdot\left\{\begin{aligned}&a\left(T\left[\begin{pmatrix}1&\\&p\end{pmatrix}\right]\right)+\sum_{s\in\mathbb{Z}/p}a\left(T\left[\begin{pmatrix}p&s\\&1\end{pmatrix}\right]\right)\\&+\chi_1(p)\cdot p^{\frac{k}{2}-\frac{3}{2}}\cdot h(T)\cdot a(T)\\&+\chi(p)^2\cdot p^{k-3}\cdot\left(a\left(T\left[\tfrac{1}{p}\begin{pmatrix}1&\\&p\end{pmatrix}\right]\right)+\sum_{s\in\mathbb{Z}/p}a\left(T\left[\tfrac{1}{p}\begin{pmatrix}p&s\\&1\end{pmatrix}\right]\right)\right)\end{aligned}\right\}$$

ただし　$\chi_1(p)=\left(\frac{-1}{p}\right)^{(k-1)/2}\cdot\chi(p)$

$$h(T)=\begin{cases}\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) & \text{if } T\text{ は }\mathbb{Z}_p/p\cdot\mathbb{Z}_p\text{ の二次形式と見て}\begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&0\end{pmatrix}\ (\exists\,\varepsilon\in(\mathbb{Z}/p)^\times)\text{ と同値}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$T[X]={}^tXTX$

$T\notin\Lambda$ なら $a(T)=0$ とする。

$$
\begin{aligned}
a_2(T) = a(p^2T) & \\
&+\chi_1(p)\cdot p^{\frac{k}{2}-\frac{5}{2}}\cdot\Big\{g^*(T)\cdot a\big(T[\begin{pmatrix}1&\\&p\end{pmatrix}]\big)+\sum_{s\in\mathbb{Z}/p} g\big(T[\begin{pmatrix}p&s\\&1\end{pmatrix}]\big)\cdot a\big(T[\begin{pmatrix}p&s\\&1\end{pmatrix}]\big)\Big\}\\
&+\chi(p)^2\cdot p^{k-5}\cdot G(\det T)\cdot a(T)\\
&+\chi(p)^2\cdot p^{k-4}\Big\{\sum_{s\in(\mathbb{Z}/p)^\times} a\big(T[\tfrac{1}{p}\begin{pmatrix}p&s\\&p\end{pmatrix}]\big)+\sum_{s\in\mathbb{Z}/p^2} a\big(T[\tfrac{1}{p}\begin{pmatrix}p^2&s\\&1\end{pmatrix}]\big)\\
&\qquad\qquad +a\big(T[\tfrac{1}{p}\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix}]\big)\Big\}\\
&+\chi(p)^2\chi_1(p)\cdot p^{\frac{3}{2}k-\frac{11}{2}}\Big\{g(T)\cdot a\big(T[\tfrac{1}{p}\begin{pmatrix}1&\\&p\end{pmatrix}]\big)+g^*(T)\cdot\sum_{s\in\mathbb{Z}/p} a\big(T[\tfrac{1}{p}\begin{pmatrix}p&s\\&1\end{pmatrix}]\big)\Big\}\\
&+\chi(p)^4\cdot p^{2k-6}\cdot a\big(\tfrac{1}{p^2}T\big)
\end{aligned}
$$

ただし $g^*\begin{pmatrix}t_1&t_2\\t_2&t_3\end{pmatrix}=\left(\frac{t_1}{p}\right)$, $g\begin{pmatrix}t_1&t_2\\t_2&t_3\end{pmatrix}=\left(\frac{t_3}{p}\right)$

$$G(t)=\begin{cases}p-1 & \text{if } p\mid t\\ -1 & \text{if } p\nmid t.\end{cases}$$

この式は既に［日名］に記されており，［田中］では($n=2$で)もう少し一般の double coset について計算されている。尚，講演後の計算で一般の degree n でも筆者は

$$T_i^{(n)}=\Delta\left(\begin{pmatrix}1_i&&&\\&p\cdot1_{n-i}&&\\&&p^2\cdot1_i&\\&&&p\cdot1_{n-i}\end{pmatrix},\ p^{\frac{i}{2}}\right)\Delta\qquad(1\leq i\leq n)$$

について同様な公式を得ている。

Remark. Hecke algebra を表現したあとでは(係数環を$\mathbb{C}$とすると)

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(G_k(N,\chi))\supset[D(\Delta,\mathfrak{S}_{(p)})]_{k,\chi}=\mathbb{C}[[T_i^{(n)}]_{k,\chi}]_{1\leq i\leq n}$$

である。

§2.2. common eigen form の例

$n, k \in \mathbb{N}$, k: odd , $M_k(\mathbb{Z}) \ni S = {}^tS > 0$ とするときテータ級数を

$$\Theta^{(n)}(Z, S) := \sum_{G \in M_{k,n}(\mathbb{Z})} e(S[G] \cdot Z) \quad , \quad Z \in \mathfrak{H}_n$$

とすると

$$\Theta^{(n)}(Z, S) \in G_k(N, \chi)$$

ただし N は $2S$ の level, i.e. $N \cdot 2^{-1} S^{-1} \in 2\Lambda$ となる最小の自然数, $\chi = \left(\frac{\det S}{\ }\right)$ である。(N は 4 でわれている) さらに Eisenstein 級数を Siegel's weighted sum

$$E^{(n)}(Z, S) := \frac{1}{\sum_{S'} E(S')^{-1}} \cdot \sum_{S'} E(S')^{-1} \cdot \Theta^{(n)}(Z, S') ,$$

ただし

$E(S) := \#\{ g \in GL(k, \mathbb{Z}) \mid S[g] = S \}$

$\sum_{S'}$ において S' は S の genus $\{ S' \in M_k(\mathbb{Z}) \mid S' = {}^tS' > 0,$ for $\forall p$: prime , $\exists g \in GL(k, \mathbb{Z}_p) \ni S' = S[g] \}$ の中の異なる class の代表元, 即ち $S' \sim S \Leftrightarrow \exists g \in GL(k, \mathbb{Z}) \ni S' = S[g]$ で定義される同値関係 $\sim$ の代表元を動く。

と定義することにする。$E^{(n)}(Z, S) \in G_k(N, \chi)$ であってそ

のフーリエ係数は $\Lambda \ni T>0$ なら

$$a(T)=\pi^{n(2k-n+1)/4}\cdot\prod_{\nu=0}^{n-1}\Gamma((k-\nu)/2)^{-1}\cdot|S|^{-n/2}\cdot|T|^{(k-n-1)/2}$$
$$\times\prod_{p}\alpha_p(T,S)$$

と書ける。ここで $\alpha_p(T,S)$ は local density である.

S は unimodular と仮定する。$N=4$, $\chi=$ trivial になる。また $n=1,2$, p: odd prime なら $\alpha_p(T,S)$ を完全に書き下す公式が知られている。そこで §2.1 の結果を用いて実際に計算すると次のことがわかる。

$(n=1)$ $\quad E^{(1)}(z,S)|T^N_{k,\chi}(p^2)=(1+p^{k-2})\cdot E^{(1)}(z,S)$

$(n=2)$
$$E^{(2)}(Z,S)|[T_1]_{k,\chi}=p^{\frac{k}{2}-3}(1+p)(1+p^{k-3})\cdot E^{(2)}(Z,S)$$
$$E^{(2)}(Z,S)|[T_2]_{k,\chi}=\{(1+p^{k-2})(1+p^{k-4})+p^{k-5}(p^2-1)\}\times E^{(2)}(Z,S)$$

Remark. integral wt. の場合と同様に Siegel の Φ-operator が定義され, $E^{(2)}(Z,S)|\Phi=E^{(1)}(z,S)$ である. また Φ と $T^N_{k,\chi}(p^2)$, T_1, T_2, の関係が計算され, 上の式はこれと合っている.

一般に degree 2 の common eigen form に対して適当な Dirichlet 級数を定義してその性質を調べることが

[日名]や伊吹山先生によって研究されている。ここでは上の例で symmetric square 型の Dirichlet 級数について計算すると

$(n=1)$ $N \ni t$ が odd の平方因子を含まないなら

$$\sum_{n:\text{odd}} \frac{a(tn^2)}{n^s} = a(t)\cdot\prod_{p\neq 2} \frac{1-\chi_1(t)\cdot\left(\frac{-1}{p}\right)\cdot p^{(k-1)/2-1-s}}{(1-p^{-s})(1-p^{k-2-s})},$$

$(s\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,s \gg 0)$

$(n=2)$ $\Lambda \ni T>0$, $\det T$ が 2 の巾とすると

$$\sum_{\{M\in M_2(\mathbb{Z})\cap GL_2(\mathbb{Q})\,|\,\det M:\text{odd}\}/GL_2(\mathbb{Z})} a(T[M])\cdot|\det M|^{-s}$$

$$= a(T)\cdot\prod_{p\neq 2}\frac{1-p^{k-3-2s}}{(1-p^{1-s})(1-p^{k-3-s})(1-p^{-s})(1-p^{k-2-s})}$$

となる。

Remark. 1 $n=2$ のときの右辺の分母を見ると p^s の係数(のマイナス)は $(1+p)(1+p^{k-3})$ であってこれは T_1 の固有値の $p^{-\frac{k}{2}+3}$ 倍である。一般の degree n でも $T_1^{(n)}$ が現われると予想される。詳しいことはまだ計算中である。Φ-operator との関係もここでは述べない。

Remark. 2 任意の common eigen form について $(n=2)$ の右辺の分子、分母を T_1 と T_2 の固有値により現わす式が

伊吹山先生によって既に得られており，筆者の上の例と(少なくとも分母は)合っている。

References.

[早川誠幸] half integral weight の Siegel modular form の空間の上の Hecke operator の理論について，1983. 修士論文（名大）

[日名龍夫] 半整数 weightをもつ２次の Siegel modular 形式について，1982，プレプリント

[田中改治] On Hecke operators of half integral weight of degree 2，1983，修士論文（京大）

[G. Shimura] On modular forms of half integral weight，Ann. of Math. 97(1973)，pp.440-481.