数理解析研究所講究録
第513巻 1984年 166-185

ヒルベルト保型形式の合同と代数体の単数

京大教養 齋藤裕 (Hiroshi Saito)
京大教養 山内正敏 (Masatoshi Yamauchi)

Hecke の意味での Neben typus の保型形式のフーリエ係数が、実二次体の単数から決まる素イデアルに関してある合同式をみたしていることが、実二次体の類体の構成の問題と関連して、十数年前に志村氏[13]によって発見された。類似の事実が、レベルが素数の3乗の Haupt typus の保型形式の場合にもあることを，土井氏，及び山内[1]が示し、その後太田氏，小池氏，山内，齋藤，百瀬氏，石井氏等により、この種の合同式が調べられてきた。この小論では、Haupt typus のレベルが素数の奇数べきである場合にそれらの結果を概観し、これらの合同式のヒルベルト保型形式の場合の類似について報告する。

§1. 一変数の保型形式の場合

記号は、ほぼ志村著 Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions に従うものとする。特

に、複素上半平面 $H=\{z\in\mathbb{C}\mid Im(z)>0\}$ 上の函数 f と、行列式が正である実数係数の2次行列 α、及び、自然数 k に対し、H 上の函数 $f|[\alpha]_k$ を

$$(f|[\alpha]_k)(z)=\det\alpha^{k/2}(cz+d)^{-k}f(\alpha z),\ \alpha=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},$$

で定め、自然数 N、$\bmod N$ の指標 ψ、k に対し、合同部分群

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})\ \middle|\ c\equiv 0 \bmod N\right\}$$

に関する、指標 ψ、weight k の尖点形式の空間を $S_k(\Gamma_0(N),\psi)$ で表す。また、$S_k(\Gamma_0(N),\psi)$ の new form で張られる部分空間を $S_k^0(\Gamma_0(N),\psi)$ で表し、$S_k^0(\Gamma_0(N),\psi)$ の元で、すべての Hecke 作用素 T_n の固有函数であり、その無限遠点におけるフーリエ展開

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi i n z}$$

の係数が $a_1=1$ であるものを primitive form という。

以下、q を素数 $(q\geqq 5)$ とし、$N=q^{2\nu+1}_{(\nu\geqq 1)}$, ψ = 単位指標, $k=2$ の場合を考える。この場合 $S_k^0(\Gamma_0(N))$ 上には、Hecke 作用素 T_n 以外に、次に定義する W, R_χ, U_χ などの作用素が考えられる。W は

$$f|W = f|\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right]_k$$

で定められ，mod q の平方剰余記号 $\chi = \left(\frac{\ }{q}\right)$ に対し，R_χ が $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ に対し，

$$(f|R_\chi)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) e^{2\pi i n z}$$

で定義される。$W^2 = id.$ であるが，$U_\chi = R_\chi W R_\chi W$ と定義すると，U_χ も $S_k^0(\Gamma_0(N))$ 上の位数2の自己同型写像となる。この W, U_χ は Hecke 作用素と可換であり（R_χ は可換ではない），これを用いて $S_k^0(\Gamma_0(N))$ を次のように Hecke 作用素で閉じた4つの部分空間 S_I, S_{II}, $S_{II\chi}$, S_{III} の直和に分解することができる。

$$\begin{array}{cccccccc} S_k^0(\Gamma_0(N)) = & & S_I & \oplus & S_{II} & \oplus & S_{II\chi} & \oplus & S_{III} \\ & W & +1 & & +1 & & -1 & & -1 \\ & U_\chi & +1 & & -1 & & -1 & & +1 \end{array}$$

ここで，例えば，S_I は，W, U_χ に対する固有値が共に $+1$ である $S_k^0(\Gamma_0(N))$ の元で張られる部分空間である。さて，土井－山内［　］から例を引用する。$N = 5^3$ とすると，上の分解に対応して $\dim S_2^0(\Gamma_0(5^3)) = 0 + 2 + 2 + 4$ であり，S_{II}, $S_{II\chi}$, S_{III} における T_m $(m = 2, 3, 11, 19)$

の固有多項式は、次の表で与えられる。

m	$\chi(m)$	S_{II}	$S_{\mathrm{II}\chi}$	S_{III}
2	-1	X^2+X-1	X^2-X-1	X^4-8X^2+11
3	-1	X^2+3X+1	X^2-3X+1	X^4-7X^2+11
11	$+1$	$(X+3)^2$	$(X+3)^2$	$(X-4)^4$
19	$+1$.	X^2+5X+5	X^2+5X+5	$(X^2-10X+20)^2$

表からわかるように、S_{II} と $S_{\mathrm{II}\chi}$ は、互に R_χ で移り合っている。次に S_{III} について見る。S_{III} に含まれる primitive form の1つを $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ とし

$$K_f=\bigcup_n \mathbb{Q}(a_n)$$

と置く。表から、K_f は二次の部分体 F_f（この例では、$Y^2-7Y+11=0$ の根の体、即ち $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$）を含み、$Y^2-7Y+11=0$ の解の一つを α として、$K_f=F_f(\sqrt{\alpha})$ である。σ が $\mathrm{Gal}(K_f/F_f)$ の生成元であるとすると

$$f|R_\chi=f^\sigma$$

が成り立つ、即ち Ribet の意味で f は extra-twist を持っている。ここで $f^\sigma(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\sigma e^{2\pi i n z}$ である。さらに

$\sqrt{\alpha}$ で生成される K_f の素イデアルを $\mathfrak{P}$ とすれば，$\chi(\ell)=-1$ である素数 ℓ に対しては $a_\ell \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}$ が（表から少くとも $\ell=2, 3$ に対しては）成り立っている。さて $N_{F_f/\mathbb{Q}}(\alpha)=11$ であることに注意する。ここでこの素数 11 は次のように説明される。指標 $\chi=\left(\frac{}{5}\right)$ に類体論の意味で対応する $\mathbb{Q}$ の二次拡大は、$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ であるが、$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の基本単数 $\varepsilon=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の 5 乗を考えると

$$\varepsilon^5=\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

であり $\operatorname{tr}\varepsilon^5=11$ である。実は、この $\operatorname{tr}\varepsilon^5$ が 11 で割れるという事実から $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の類指標 λ で i) 対応する cusp form f_λ ($L(s,\lambda)=L(s,f_\lambda)$ である cusp form) が $S_1(\Gamma_0(11\cdot 5^3), \omega_{11})$ (ω_{11} は mod 11 の Teichmüller character) に含まれ、ii) $f\equiv f_\lambda \bmod \tilde{\mathfrak{P}}$ となるものが存在することがわかる。ここで $\tilde{\mathfrak{P}}$ は $K_f(\omega_{11})$ の $\mathfrak{P}$ の上の素イデアルであり、二つの cusp form の合同は，フーリエ係数の合同を意味するものとする。f_λ のフーリエ係数 b_ℓ は $\chi(\ell)=-1$ である素数 ℓ に対しては $b_\ell=0$ であり、従って $a_\ell\equiv b_\ell\equiv 0 \bmod \tilde{\mathfrak{P}}$ である。

さて一般に q を $q\equiv 1 \bmod 4$ である素数とし，$\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ の基本単数を ε とする。$q\equiv 1 \bmod 4$ である素数に対して

$\chi=\left(\frac{\ }{q}\right)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ に対応することを注意する。このとき

$$p \mid \mathrm{tr}\ \varepsilon^{q^{\nu}}$$

である素数 p に対し $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ の指標 λ で $f_\lambda \in S_1^0(\Gamma_0(pq^{2\nu+1}), \omega_p)$ であるものが次の仮定の下に構成される。その仮定は $\varepsilon=\frac{a+b\sqrt{q}}{2}$ とするとき $q \nmid b$ というものであるが これは $B_{q-1} \not\equiv 0 \bmod q$ (B_{q-1} は $q-1$ 番目のベルヌイ数)と同値で、Mordellはこの仮定が正しいことを予想している。更にこの f_λ に対し $f_\lambda \equiv f \bmod \mathfrak{P}$ ($\mathfrak{P}$ は p の上のある素イデアル)となる f が $S_2^0(\Gamma_0(q^{2\nu+1}))$ の S_{I} または S_{III} の primitive form の中に存在することが示される。しかしこの f が extra-twist を持つかどうかということはわからない。

次に $q \equiv 3 \bmod 4$ である場合の例を再び土井-山内[1]から引用する。$N=7^3$ とすると前述の分解に対応して $\dim S_2^0(\Gamma_0(7^3)) = 3+6+6+9$ であり、S_{III} の部分の $9=6+3$ ($S_{\mathrm{III}}=S_{\mathrm{III}_1} \oplus S_{\mathrm{III}_2}$) と分解する。

m	$\chi(m)$	S_{III_1}	S_{III_2}
2	1	$(X^3-2X^2-X+1)^2$	$X^3-3X^2-4X+13$
3	-1	$X^6-20X^4+124X^2-232$	X^3

S_{III_1}, S_{III_2} での $m=2, 3$ に対する Hecke 作用素 T_m の固有多項式は、上の表で与えられるが、S_{III_1} で $N=53$ の場合の S_{III} におけると同様の現象がおきている。部分空間 S_{III_2} の $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ （$q\equiv 3 \mod 4$ のときには $\chi=\left(\frac{\ }{q}\right)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$ に対応する）の量指標から得られるものであり、S_{III_1} の primitive form と S_{III_2} の primitive form とは 232 の素因子 29 （$232=8\cdot 29$）上のある素イデアルを法として合同になっている。この素数 29 は $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ の量指標付L函数の特殊値と関係している。なお肥田氏（[2], [3]）は一般的に、同じ weight の cusp form の合同を与える法とゼータ函数の特殊値との関係を明きらかにしている。

以上詳しくは、石井[4], 太田[7], 小池[5], 百瀬[6], 齋藤・山内[8], [10] を参照して下さい。

§2. ヒルベルト保型形式の場合

F を g 次の総実な代数体とし、$\mathcal{O}$ でその整数環を表す。F の元 α に対し、$\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(g)}$ でその共役を表す。$\mathcal{O}$ の整イデアル $\mathfrak{n}$ に対し、行列式が総正である元のなす $GL_2(\mathcal{O})$ の部分郡 $GL_2(\mathcal{O})^+$ の合同部分群 $\Gamma_0(\mathfrak{n})$ を

$$\Gamma_0(\mathfrak{n})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathcal{O})^+ \;\middle|\; c\equiv 0 \mod \mathfrak{n}\right\}$$

で定める。簡単のため、以下、F の狭義の類数が 1 であると

仮定する。従って，特に、Fの単数群はすべての符号分布を持つものと仮定する。$\mathfrak{n}$と$\mathrm{mod}\,\mathfrak{n}$の指標$\psi$，自然数$k$に対して，$\Gamma_0(\mathfrak{n})$に関する指標$\psi$，weight k（正確には$(k,k,\cdots,k)$）の尖点形式の空間を$S_k(\Gamma_0(\mathfrak{n}),\psi)$で表し，その new form の部分空間を$S_k^0(\Gamma_0(\mathfrak{n}),\psi)$で表す。$S_k(\Gamma_0(\mathfrak{n}),\psi)$の元$f$は次の形のフーリエ展開を持つ。

$$f(z_1,\cdots,z_g)=\sum_{\mathfrak{a}} c(\mathfrak{a})\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}\mathfrak{d}^{-1}\\ \alpha\gg 0}} e^{2\pi i\,\mathrm{tr}\,\alpha z},$$

ここで$\mathfrak{a}$はFの全ての整イデアルを動き，$\mathfrak{d}$はFの different を表し，$\mathrm{tr}\,\alpha z=\alpha^{(1)}z_1+\cdots+\alpha^{(g)}z_g$である。

以下$\mathfrak{n}=\mathfrak{q}^{2\nu+1}$（$\mathfrak{q}$は$F$の素イデアル，$\nu\geqq 1$）であり，$\psi$＝単位指標，$k=2$の場合を考える。この場合も一変数の場合と同様に$W$と$U_\chi$（$\chi$は$F_{\mathfrak{q}}^{\times}$の位数2の指標で分岐しているもの）が定義でき，$W^2=id.$，$U_\chi^2=id.$であるので$S_2^0(\Gamma_0(\mathfrak{n}))$の分解を考えることができる。

$$S_2^0(\Gamma_0(\mathfrak{n}))=S_{\mathrm{I}}\oplus S_{\mathrm{II}}\oplus S_{\mathrm{II}\chi}\oplus S_{\mathrm{III}}.$$

これらの部分空間は Hecke 作用素で閉じていることは，一変数の場合と同じである。次に例をあげるために記号を定め

る。奇素数 q に対し、F_q で 1 の q 乗根の体の $\frac{q-1}{2}$ 次の総実な部分体を表し、$(a_0, a_1, \dots, a_{\frac{q-1}{2}})$ $(a_i \in \mathbb{Q})$ で F_q の元

$$a_0 + a_1\left(e^{2\pi i\frac{1}{q}} + e^{-2\pi i\frac{1}{q}}\right) + \cdots + a_{\frac{q-1}{2}}\left(e^{2\pi i\frac{q-1}{2q}} + e^{-2\pi i\frac{q-1}{2q}}\right)$$

を表すことにする。また整イデアル m に対し $G^{I}_{T(m)}(X)$, $G^{III}_{T(m)}(X)$ で、それぞれ、S_I, S_{III} における Hecke 作用素 $T(m)$ の固有多項式を表すことにする。

Example 1. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathfrak{q} = (\theta)$, $\theta = -1 + 2\sqrt{5}$, $\nu = 1$ とする。このとき $N\mathfrak{q} = 19$ で、$\dim S_I = 36$, $\dim S_{III} = 18$ である。S_{III} において、$m = (2), (3)$ に対し、

$$G^{III}_{T((2))}(X) = N_{F_{19}/\mathbb{Q}}(X^2 - A)$$

$$A = (4, -1, 0, 0, 1, -1, -1, 1, 1)$$

$$G^{III}_{T((3))}(X) = N_{F_{19}/\mathbb{Q}}(X^2 - B)$$

$$B = (16, -5, -2, -5, -5, -2, -5, -4, -3)$$

である。ここで F_q 係数の多項式 G に対し $G^{(i)}$ で G の係数を全て i 番目の共役にしたものを表し、$N_{F_q/\mathbb{Q}}G = G^{(1)} \cdots G^{((q-1)/2)}$ と定めるものとする。ここで

$$N_{F_{19}/\mathbb{Q}}(A)=419\ ,\qquad N_{F_{19}/\mathbb{Q}}(B)=37^2\cdot 419$$

に注意する。さてこの素数 419 は次のように説明される。F の二次拡大 $K=F(\sqrt{\theta})$ を考える。このとき二次拡大 K/F の導手 $f_{K/F}$ は $\mathfrak{q}$ である。イデアル $\mathfrak{q}$ の生成元としては θ に F の単数を乗じたどの元を取っても良いのだが、K/F の導手が $\mathfrak{q}$ であるようにするためには、単数の2乗を法として θ のみしかない。ここで K の実素点の数を $r_1(K)$, 複素素点の数を $r_2(K)$ とすると $r_1(K)=2$ である。即ち F の無限素点のうち唯一つだけ分解している。次の命題が容易に証明できる。

Proposition 1. F を総実な代数体で狭義の類数が奇数であるとする。K を F の二次拡大で $r_1(K)=2$ であり $f_{K/F}$ は (2) を割らない素イデアルであるとする。F, K の単数群を E_F, E_K で表し、$E_{K/F}=\{\eta\in E_K \mid N_{K/F}\,\eta=1\}$ と置く。このとき E_K の元 η_0 で

$$E_K=\langle E_F,\eta_0\rangle$$

となるものが存在し、$\eta_1=\eta_0^2\, N_{K/F}\,\eta_0^{-1}$ と置くと

$$E_{K/F}=\langle \pm1,\eta_1\rangle$$

である。

Example 1 の場合

$$\eta_1 = \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\theta}}{2}$$

であるが，この 19 (= N7) 乗を考えると

$$\eta_1^{19} = \frac{-7815395405 - 3495151081\sqrt{5}}{4} + \frac{4194233399 + 1875718199\sqrt{5}}{4}\sqrt{\theta}$$

であり，7815395405 を素因数分解すると

$$7815395405 = 5 \cdot 419 \cdot 3730499$$

であり，ここに素数 419 が現れる。一方もう一つの素数 3730499 は S_I における $T((2))$ を考えると

$$G^I_{T((2))}(X) = N_{F_{19}/\mathbb{Q}}(X^4 - CX^2 + D)$$

$$C = (13, 1, 0, 0, 1, 1, 3, 1, 1)$$

$$D = (28, 7, 0, -6, -1, 9, 15, 5, 7)$$

$$N_{F_{19}/\mathbb{Q}}(D) = 37^2 \cdot 3730499$$

で、S_{I} に現われている。次に $[F:\mathbb{Q}]=3$ の場合の例を一つあげる。

Example 2. $F=F_7$ とし、$j=1,2$ に対して $\beta_j = e^{2\pi j\sqrt{-1}/7}+e^{-2\pi j\sqrt{-1}/7}$ と置き $\mathfrak{q}=(\theta)$, $\nu=1$, とする。ここで $\theta=-3+4\beta_1+\beta_2$, $N\mathfrak{q}=13$ である。$\dim S_{\mathrm{I}}=12$, $\dim S_{\mathrm{III}}=0$ で、S_{I} での $T((2))$ の固有多項式は

$$G^{\mathrm{I}}_{T((2))}(X) = N_{F_{13}/\mathbb{Q}}(X^2-A)$$

$$A=(9,0,0,-2,-2,-4,-8)\ (\in F_{13})$$

で与えられ、$N_{F_{13}/\mathbb{Q}}(A)=3^5\cdot 4447$ である。さて $K=F(\sqrt{\theta})/F$ の導手は $\mathfrak{q}$ で与えられ、この K についても $r_2(K)=2$ である。この K の場合の η_1 は

$$\eta_1=\frac{-(1+\beta_1)-(1+\beta_1)\sqrt{\theta}}{2}$$

で、η_1^{13} は

$$\eta_1^{13}=\frac{-(326+261\beta_1+117\beta_2)-(714+573\beta_1+255\beta_2)\sqrt{\theta}}{2}$$

で与えられる。素数 4447 と η_1^{13} の関係はこのままで

は明瞭ではなく、その関係を見るために、次のような工夫をする。K/F を一般に Prop. 1 におけるような二次拡大とし、g を $N\mathfrak{f}_{K/F}$ の素因数とする。自然数 ν に対し、多項式 $H_\nu(X)$ を次のように定義する。$\eta_0^{g^\nu}$ の F 上の方程式を $X^2 - sX + n = 0$ とし、s, n の各共役 $s^{(i)}, n^{(i)}$ に対し

$$X^2 - s^{(i)}X + n^{(i)} = (X - \alpha_1^{(i)})(X - \alpha_2^{(i)}), \quad 1 \leq i \leq g$$

と置き、

$$H_\nu(X) = \prod_{(j_1, \cdots, j_g) \in \{1,2\}^g} (X - \alpha_{j_1}^{(1)} \alpha_{j_2}^{(2)} \cdots \alpha_{j_g}^{(g)})$$

と定義する。$H_\nu(X)$ は 2^g 次の $\mathbb{Z}$-係数の多項式である。また、η_1 に対して同様に定義した多項式を $H_\nu'(X)$ と記すことにする。このとき、$H_\nu'(-1) = H_\nu(1)^2$ が成り立ち、$|H_\nu(1)|$ は η_0 の取り方によらない。Example 2 の場合

$$H_0'(-1) = 3^2, \quad H_1'(-1) = (3^4 \cdot 4447)^2$$

であり、η_1^{13} と素数 4447 の関係が与えられている。また Example 1 の場合も $H_0'(-1) = 5^2$, $H_1'(-1) = (5 \cdot 419 \cdot 3730499)^2$ である。$F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{g})$

($q \equiv 1 \mod 4$) の場合を考えると，

$$H_\nu(1) = -\operatorname{tr} \varepsilon^{q^\nu}$$

である。ここで ε は K の基本単数である。従って $H_\nu(1)$ は，$\operatorname{tr} \varepsilon$ の自然な一般化と思われる。

さて，F の素イデアル $\mathfrak{q}$ に対して Prop. 1 のような二次拡大、即ち $f_{K/F} = \mathfrak{q}$ で $r_1(K) = 2$ となる二次拡大が存在する場合に、一般的な結果を述べる。$\mathbb{C}$ を複素数体，$\mathbb{C}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包の完備化とする。$\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{C}$，$\mathbb{C}_p$ への埋め込み ι_∞，ι_p を固定して，代数的数を $\mathbb{C}$ の元とも $\mathbb{C}_p$ の元とも見ることにする。また K は埋め込みを固定して $\overline{\mathbb{Q}}$ の部分体と見ることにする。F の $\overline{\mathbb{Q}}$ への相異なる埋め込み全体を $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_g\}$ とし、K の $\overline{\mathbb{Q}}$ への埋め込みの g 個の組 $T = \{\tau_1, \cdots, \tau_g\}$ ($\tau_i : K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$) で，$T$ の F への制限が $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_g\}$ と一致するものを考える。このような T に対し，

$$x^T = \prod_{i=1}^{g} x^{\tau_i} \qquad x \in K$$

と定義する。

Theorem 1. i) K で不分岐な素数 p が次の条件を満たし

ているとする。

$$p \nmid H_{\nu-1}(1), \qquad p \,\|\, H_{\nu}(1).$$

このとき，F の p を割る素イデアルはすべて K において二つの相異なる素イデアルに分解し，かつ

$$l_p(x^T) \in \mathbb{Q}_p \quad \forall x \in K \ \&, \ l_p(((1-\eta_0^{q^{\nu}})^T) \in p\mathbb{Z}_p$$

を満たす T が唯一つ存在する。この T に対し ω_T を

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^{\times} \arrow[r, "l_p \circ T"] \arrow[rr, bend right, "\omega_T"'] & \mathbb{Z}_p^{\times} \arrow[r, "\omega_p"] & \mathbb{Q}(1^{\frac{1}{p-1}})
\end{tikzcd}$$

で定めると，ω_T の導手 P_T は $P_T P_T^{\sigma} = (p)$ かつ $(P_T, P_T^{\sigma}) = (1)$ を満たす。ここで $\mathcal{O}_K$ は K の整数環，σ は $Gal(K/F)$ の生成元である。

ii) K の単数 η_0 に対して次の条件

$$\eta_0 = a + b\Pi, \quad b \in \mathcal{O}_q^{\times}$$

を仮定する。$a \in \mathcal{O}_q^{\times}$ で Π は $\mathcal{O}_{K,q}$ の素元である。このとき ω_T は $(h_K/h_F)(Nq/q)^{\nu}$ 通りに

$$f(\lambda) = Q^{2\nu} P_T \tilde{\omega}_1, \quad \lambda | F_A^{\times} = \omega N_{F/\mathbb{Q}} \chi_{K/F}$$

を満たす $K_A^\times/K^\times$ の指標 λ に拡張される。ここで $\mathfrak{Q}$ は K の q を割る素イデアル，ω_1 は K の実素点の一つ，$\chi_{K/F}$ は，二次拡大 K/F に対応する $F_A^\times$ の二次指標である。

この λ に対して $S_1(\Gamma_0((p)q^{2\nu+1}), \omega\circ N_{F/\mathbb{Q}})$ の元 f_λ が存在するが、この f_λ に対して次の定理が成り立つ。

Theorem 2. λ を上の通りとする。この時，条件

$$\begin{cases} L(0, \overline{\omega N_{F/\mathbb{Q}}}) \equiv \dfrac{a}{p} \mod p \quad ({}^{\exists}a \in \mathbb{Z} \text{ prime to } p) \\ \text{かつ} \\ L(0, \omega N_{F/\mathbb{Q}}) \text{ は } p\text{-unit である} \end{cases}$$

が成立すれば，$S_2^0(\Gamma_0(q^{2\nu+1}))$ の元 f で

$$f \equiv f_\lambda \mod \tilde{P}$$

となるものが存在する。$\tilde{P}$ は p の上にある素イデアルである。

以上で，$r_1(K)=2$ である場合の様子がほぼ明らかになったが，次に $r_1(K)=0$ である場合，即ち，K が F の総虚な二次拡大である場合の例をあげる。

Example 3. $F=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathfrak{q}=(0)$, $\theta=-7+4\sqrt{2}$, $\nu=1$ とする。このとき $N\mathfrak{q}=17$, $\dim S_I=8\cdot 8$, $\dim S_{III}=4\cdot 8$ である。S_{III} における $T((\sqrt{2}))$, $T((3))$ の固有多項式は

$$G^{III}_{T((\sqrt{2}))}(X)=N_{F_{17}/\mathbb{Q}}((X-A)^2(X^2-BX+C))$$

$$A=(0,0,1,0,0,0,0,0.0)$$
$$B=(1,0,-1,1,1,0,0,0.0) \qquad (\in F_{17})$$
$$C=(0,0,0,1,0,-1,-1,1,0)$$

$$G^{III}_{T((3))}(X)=N_{F_{17}/\mathbb{Q}}((X^2-D)X^2)$$

$$D=(10,-1,-2,1,0,3,2,1,0) \qquad (\in F_{17})$$

で与えられる。ここで $G^{III}_{T((\sqrt{2}))}$, $G^{III}_{T((3))}$ の二番目の因子 $N_{F_{17}/\mathbb{Q}}((X^2-BX+C))$, $N_{F_{17}/\mathbb{Q}}(X^2)$ をそれぞれ $G^{0}_{T((\sqrt{2}))}(X)$, $G^{0}_{T((3))}(X)$ と記す。一番目の因子の根を代入すると

$$N_{F_{17}/\mathbb{Q}}(G^{0}_{T((\sqrt{2}))}(A))=953\cdot 1123$$

$$N_{F_{17}/\mathbb{Q}}(G^{0}_{T((3))}(\sqrt{D}))=953\cdot 1123$$

となる。さて $K=F(\sqrt{\theta})$ とすると $f_{K/F}=9$ で K は F の総虚な拡大であり，$G^0_{T((\sqrt{5}))}$，$G^0_{T((3))}$ に対応する部分は K の量指標から得られていることがわかり、一変数の $N=7^3$ の例と同じ状況になっている。ここで 953，1123 は K の量指標付し函数の特殊値と関係していると思われる。

最後に $r_1(K)\geqq 4$ となる場合であるが，この場合にはまだ顕著な現象を見出していない。§2 に関しては [9]，[11]，[12] を参照して下さい。

文　献

[1] K.Doi and M.Yamauchi, On Hecke operators for $\Gamma_0(N)$ and the class fields over quadratic fields, J.Math.Soc.Japan 25 (1973),629-643.

[2] H.Hida, Congruences of cusp forms and special values of their zeta functions, Inv.math.63(1981),225-261.

[3] H.Hida, On congruence divisors of cusp forms as factors of the special values of their zeta functions, Inv. math. 64(1981),221-262.

[4] H.Ishii, Congruences between cusp forms and fundamental units of real quadratic fields, Japan. J. Math. 7(1981), 257-267.

[5] M.Koike, Congruences between cusp forms and linear representations of the Galois group, Nagoya J.Math.64(1976), 63-85.

[6] F.Momose, Galois action on some ideal section points of the abelian variety associated with modular forms and its application, Nagoya Math.J. 91(1983), 19-36.

[7] M.Ohta, The representation of Galois group attached to certain finitegroup schemes, and its application to Shimura theory, Algebraic Number Theory, Papers contributed for the international symposium, Kyoto, 1976, Japan Society for the Promotion of Science.

[8] H.Saito, On a decomposition of spaces of cusp forms and trace formula of Hecke operators,Nagoya Math.J.80(1980), 129-165.

[9] H.Saito, On an operator U_χ acting on spaces of Hilbert cusp forms(to appear)

[10] H.Saito and M.Yamauchi, Trace formula of certain Hecke operators for $\Gamma_0(q^\nu)$, Nagoya Math.J. 76(1979), 1-33.

[11] H.Saito and M.Yamauchi, Congruences between Hilbert cusp forms and units on quartic fields, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo 28(1981), 687-694.

[12] H.Saito and M.Yamauchi, Congruences between Hilbert cusp forms (to appear).

[13] G.Shimura, Class fields over real quadratic fields and Hecke operators, Ann.of Math. 95(1972), 130-190.