

第1種複素楕円積分の全域近似  
—— 母数が小さい場合 ——

八代 高専 久原 秀夫 (Hideo Kuhara)  
名大 工 鳥居 達生 (Tatsuo Torii)  
名大 工 杉浦 洋 (Hiroshi Sugiura)

1. まえがき.

複素平面上の不定積分

$$F(z, k) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (1.1)$$

を第1種不完全楕円積分という.  $k$  は実数  $k \in (0, 1)$  の母数という.

問題. 母数  $k$  が 0 に近い場合, 任意の  $z$  に対して楕円積分 (1.1) を求めること.

母数  $k$  が 1 に近い場合は, 上昇 Landen 変換によつて楕円積分 (1.1) を求めることは, 解決されてゐるので, 本問題が解決すると任意の実母数  $k \in (0, 1)$  に対して, (1.1) の積分則が得られることになる.

第1種実楕円積分

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

の算法<sup>(212)</sup>, 数学公式 I (森口, 宇田川, 一松 p. 145) に四通りの変数変換が記してある。その四番目に無名の変換として

$$\sin \gamma = \frac{(1+k) \sin \varphi}{1+k \sin^2 \varphi}$$

がある<sup>1)</sup>。他に Byrd の著書 (2), pp. 39-40) では, Gauss の名が冠せられている。

これこれでは,  $z = \sin \varphi$ ,  $w = \sin \gamma$  とおき, 複素平面上に拡張して

$$w = \frac{(1+k)z}{1+kz^2} \quad (1.2)$$

と, Gauss 変換とよび, これを用いることにする。

後の都合上記号を約束しておく。

補母数;  $k' = \sqrt{1-k^2}$

完全楕円積分;  $K = K(k) = F(1, k)$

;  $K' = K(k') = F(1, k')$

Joukowski 変換;

$$w = J(z) = \frac{1}{2} (z + z^{-1})$$

この逐例表の Riemann 面は, 2枚であるが,  $z$ -平面の単位円の外部が  $w$ -平面の一枚に対応するよう<sup>1)</sup>に1と上

の逆変換を次によって定義する

逆 Joukowski 変換 ;

$$z = J^{-1}(w) = \frac{1 + \sqrt{\frac{w-1}{w+1}}}{1 - \sqrt{\frac{w-1}{w+1}}}$$

ただし複素数の平方根は、正の実軸上で正の値と取り分枝をとるものとする。

そこで、再び Gauss 変換 (1.2) に立ち返り、これと Joukowski 変換の関係をみることにする。明らかに (1.2) は

$$w = \frac{1}{2} \left( \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \cdot \frac{z}{\sqrt{k}z + \frac{1}{\sqrt{k}z}} \quad (1.3)$$

と書き表わすことができる。

Joukowski 変換  $w = J(z)$  は、 $w$ -平面的スリット  $[-1, 1]$  を除く全平面を単位円の外部に写すが、この事実を端的に、スリット  $[-1, 1]$  を円に開くという。ついでながら、変換  $w = 1/J(z)$  は、 $w$ -平面からスリット  $[1, \infty]$ ,  $[-1, -\infty]$  を除く領域を、 $z$ -平面的単位円の内部に写す。

このことを無限長スリット  $[+1, \infty, -1]$  ( $[1, \infty]$ ,  $[-1, \infty]$  を  $\infty$  点で連結したもの) を単位円に開くという。

Joukowski 変換  $w = J(z)$  では、見れば  $J(z) = J(z^{-1})$

であるが,  $[-1, 1]$  で連結された 2 枚の  $w$ -平面と,  $z$ -平面は  $J(z)$  で 1対1対応であるから, Riemann 面を考へるならば,  $J(z)$  が  $w$ -平面の 1枚と対応するならば,  $J(z')$  は他方の面と対応する. ことに, 取って  $\frac{1}{2}(z+z')$  を  $J(z)$  と書く意味がある.

さて, Gauss 変換 (1.3) は

$$w = J\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) / J\left(\frac{1}{\sqrt{k}z}\right) \quad (1.4)$$

と書けるから, 便宜上

$$h = 1 / J\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad (1.5)$$

とすれば,  $w$ -平面の無限長スリット  $[-h^{-1}, \infty, h^{-1}]$  を半長  $1/\sqrt{k}$  の円に開くことになる.

④  $h$  の楕円積分

$$F(w, h) = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-h^2w^2)}}$$

に対して, 変数変換 (1.4) を与えておけば

$$F(w, h) = (1+k) F(z, k) \quad (1.6)$$

が成り立つ.

④  $h$  の定義 (1.5) より  $h > k$  とするから, 上式を

$w$ -平面から  $z$ -平面への移行とみれば、これは下降 Gauss 変換となる。このとき母数は、(1.5) を  $k$  に関して解き

$$k = 1 / (J^{-1}(k'))^2 = \frac{1-k'}{1+k'} \quad (1.7)$$

にすれば、

いま、目的は  $F(z, k)$  を求めることであるから、これを上述した  $F(w, k)$  と考え、下降 Gauss 変換を繰り返して行く。

初期値  $k_0 = k$

$z_0 = z$

漸化式

$$k_{n+1} = (1 - k_n') / (1 + k_n') \quad (1.8)$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{k_{n+1}} J^{-1}\left(\frac{1}{k_n z_n}\right)}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Gauss 変換における楕円積分の関係式 (1.6) より

$$F(z, k) = F(z_0, k_0) = \prod_{j=1}^n (1 + k_j) F(z_n, k_n) \quad (1.9)$$

が得られる。

もし  $k_n$  は、単調減少で  $0 \leq k_n < 1$  である。また  $F(z, 0)$  は、逆三角関数に退化するので、(1.9) にあいて  $n$  を適当に大きくすれば、目的の楕円積分の近似が得られるのである。

われわれは、以上の見通しの下で、不定積分  $F(z_n, k_n)$  を定積分表示し、これを Gauss-Chebyshev 則による数値積分し、より精密な結果が得られることを示す。

## 2. 不定積分の定積分表示

前節において、不完全楕円積分  $F(z, k)$  に対し、Gauss 変換と呼ばれる変数変換を行なったが、これは、無限長スリット  $[k', \infty, -k']$  を半径  $1/\sqrt{k}$  の円に開く変換であった。ここで、 $F(z, k)$  の被積分関数のスリットは、 $[1, k']$ ,  $[-k', -1]$  であり、Gauss 変換を無条件に適用できない。そこで、 $F(z, k)$  の被積分関数に見掛け上虚数  $-i$  を付けた形の

$$\tilde{F}(z, k) = \int_{0+0i}^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} \quad (2.1)$$

について考える。この被積分関数のスリットは  $[-1, 1]$  と  $[k', \infty, -k']$  である。平方根の分枝は  $[1, k']$  で、正の虚数値をとるよう選ぶ。これに対し、漸化式 (1.8) により Gauss 変換を繰返せば、関係式 (1.9) において、 $F(z, k)$  を  $\tilde{F}(z, k)$  で置き換えた式が成立する。

$$\tilde{F}(z_0, k_0) = \prod_{j=1}^n (1+k_j) \tilde{F}(z_n, k_n). \quad (2.2)$$

ついでに、 $z_0 = 1$  とおけば、1 は Gauss 変換によつ

で不変なるので

$$\prod_{j=1}^n (1 + k_j) = \frac{K_0}{K_n} \quad (2.3)$$

$$ただし \quad K_n = K(k_n), \quad K'_n = K(k'_n)$$

が成り立つ。また  $k_n$  は  $0$  に収束するので、 $K_n$  の極限值は  $\pi/2$  となる。このことに注意すれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n (1 + k_j) = \frac{2}{\pi} K_0 \quad (2.4)$$

が得られる。

さて、本節の主題である不定積分 (2.1) の定積分表示について述べる。(2.1) において、原点と点を結ぶ積分路が、被積分関数の  $\infty$  のスリット  $[-1, 1]$ ,  $[1, \infty, -1]$  あるいは、いづれか  $-\infty$  を回る毎に  $\tilde{F}(z, k)$  に多価性が現われるので、これを避けるために原点から負の虚軸に沿ってカットを入れる。 $\tilde{F}(z, k)$  の被積分関数を一旦 Cauchy の積分表示する。積分路は図1のよりにとる。

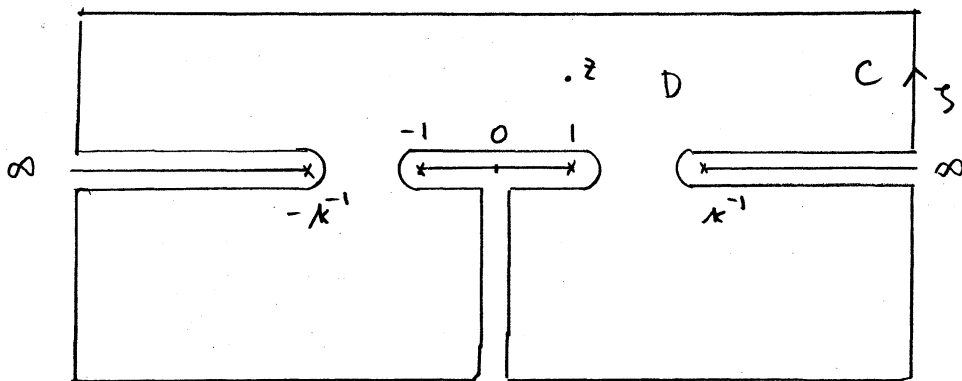


図1

可なり

$$\frac{1}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z-z)\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} \quad (2.5)$$

両辺を積分する。誤解のなきやほはたいと思ふので、積分の上端もそを用いる。左辺は定義によつて  $\tilde{F}(z, k)$  である。右辺は、積分順序を交換し、被積分関数は無限遠点の近傍で  $O(z^{-3})$  であることに注意し、積分路  $C$  をスリット  $[-1, 1]$ ,  $[1, \infty, -1]$  に十分接近させることにより

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z, k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \log \frac{x}{x-z} dx \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{|x| > 1/k} \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} \log \frac{x}{x-z} dx \end{aligned} \quad (2.6)$$

が得られる。こゝで、(2.5)の右辺の被積分関数は、 $[-1, 1]$ ,  $[1, \infty, -1]$ の上岸、下岸で符号を異にするので、上岸だけの積分で表わした。上式右辺の対数関数は  $x$  を変数とみだし、 $x$ -平面でのカット ( $x=+0i$  と  $x=z$  を結ぶ曲線) は、積分路と交わらないようにするものとする。

さて、 $\tilde{F}(z, k)$  は、下降 Gauss 変換を多数回ほどこせば母数  $k$  は、十分小さくなるので、 $\tilde{F}(z, k)$  の母数  $k$  は 0 に近いと仮定して一般性を失ふ可なり。



定積分 (2.6) の被積分関数の特異点は,  $\pm 1, \pm \kappa^{-1}$  が  
 1位の分岐点で,  $\pm 1$  が対称特異点である.  ~~$\kappa$  が十分小さい~~  
~~とき, 右辺の積分は, 第1項が主要部となる.~~ (したがって,  
 $\pm 1$  が積分区間  $[-1, 1]$  から離れていけば, 右辺第1項の積  
 分は Gauss-Chubyshev 則で効果的に求められる. <sup>しかしながら</sup>  $\pm 1$   
 は, 一般にはスリット  $[-1, 1], [1, \infty, -1]$  に接近すること  
 もあるので, この場合の対策を考慮しなければならぬ.

そこで, 再び不定積分  $\tilde{F}_1(w, \kappa)$  について考える.  $[-1, 1]$   
 近傍の  $w$  を離せばよいので, Joukowski変換  $w = J(z)$   
 によって変数変換する. 計算により

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(w, \kappa) &= \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(w^2-1)(1-\kappa^2 w^2)}} \\ &= \frac{2}{\kappa} \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-\kappa_1)(\kappa_1^{-1}-z^2)}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

と表わされる.  $w$ -平面の原点は,  $z$ -平面の  $\lambda$  に対応する  
 ことに注意. また  $\kappa_1 = (1-\kappa') / (1+\kappa')$ .

再び, 不定積分 (2.7) の定積分表示について考える. 前と  
 同様に Cauchy の積分表示を用いて (2.7) の定積分表示

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(w, \kappa) &= \frac{2}{\kappa} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\kappa}}^{\sqrt{\kappa}} \frac{-1}{\sqrt{(\kappa_1-x^2)(\kappa_1^{-1}-x^2)}} \log \frac{x-\lambda}{x-z} dx \\ &\quad + \frac{2}{\kappa} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{|x| > 1/\sqrt{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{(x^2-\kappa_1)(x^2-\kappa_1^{-1})}} \log \frac{x-\lambda}{x-z} dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

が得られる。積分区間は  $\Rightarrow$  に分けていゝが、変数変換

$x = 1/y$  によつて、一方を他方に帰着できる。

さらに被積分関数の根号内の関数が偶関数があることに注意すれば、  
 実軸上の  $\Rightarrow$  の積分区間  $[-\infty, -1/\sqrt{k_1}]$ ,  $[1/\sqrt{k_1}, \infty]$   
 は後者だけにまとめることができる。

$$\tilde{F}(w, k) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \int_{1/\sqrt{k_1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^2 - k_1)(x^2 - k_1^{-1})}} \log \frac{1 - x^2 z^2}{x^2 - z^2} dx$$

$$z = J^{-1}(w) \quad (2.9)$$

と表わされる。対数関数  $\log (1 - x^2 z^2) / (x^2 - z^2)$  をその関数と  
 すれば、 $x$  が実軸上にある限り単位円周上で  $0$  となる。<sup>(初等部は)</sup> この  
 意味が <sup>(これは)</sup> 単位円に属する Green 関数になる。<sup>5)</sup>

上の半無限積分におゝて積分変数  $x$  を  $1/x$  にあるとめると  
 ならば、有限区間上の積分としても表わされる。

$$\tilde{F}(w, k) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\sqrt{k_1}} \frac{1}{\sqrt{(k_1 - x^2)(k_1^{-1} - x^2)}} \log \frac{x^2 - z^2}{1 - z^2 x^2} dx$$

$$(2.10)$$

被積分関数の特異点、分岐点は、分岐点4個、 $\pm \sqrt{k_1}$ ,  $\pm \sqrt{k_1^{-1}}$ ,  
 対数特異点が  $\pm z$ ,  $\pm 1/z$  だけある。被積分関数は偶関数であ  
 るから、積分区間を原点対称に、すなわち  $[-\sqrt{k_1}, \sqrt{k_1}]$  と  
 して、この区間上の Gauss-Chebyshev 則を用いる。こ  
 の数値積分則の有効性を次節で明らかにする。

3. Gauss-Chebyshev 則の収束性  
不定積分

$$\tilde{F}(z, k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

1) に対し,  $z_0 = z, k_0 = k$  とおき, 下降 Gauss 変換を  $n$  回  
ほどこした後, Joukowski 変換を行なえば (1.8), (1.9) と  
(2.7) より  $z_n = J(t)$

$$\tilde{F}(z_0, k_0) = \prod_{j=1}^n (1+k_j) \cdot \tilde{F}(z_n, k_n) \quad (3.1)$$

$$\tilde{F}(z_n, k_n) = \frac{z}{k_n} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{(t^2-k_{n+1})(k_{n+1}^{-1}-t^2)}} \quad (3.2)$$

最後の積分を実軸上の定積分で表わせば (2.10) より

$$\tilde{F}(z_n, k_n) = \frac{1}{\pi k_n} \int_{-\sqrt{k_{n+1}}}^{\sqrt{k_{n+1}}} \frac{1}{\sqrt{(k_{n+1}-x^2)(k_{n+1}^{-1}-x^2)}} \log \frac{x^2-t^2}{1-x^2t^2} dx$$

$\operatorname{Re} t \geq 0$

(3.3)

となる。これが前節までの結果の写像である。

与えられた  $z_0$ -平面は多数回の下降 Gauss 変換を経て,  
最後に 1 回 Joukowski 変換を戻し  $t$ -平面のあの領域に  
写されることになる。この写像をくわしくしらべよう。

まず, 十分多数回 Gauss 変換をほどこしたときの漸近的  
傾向を把握しよう。  $z_0$ -平面から無限長スリット  $[k_0^{-1}, \infty, -k_0^{-1}]$  を  
除く領域は, 等高線

$$L_0; \operatorname{Re} \tilde{F}(z_0, k_0) = \operatorname{Re} \tilde{F}(k_0', k_0) = k_0' \quad (3.4)$$

に囲まれる領域に他ならない。この曲線（実はスリット）は  
下層 Gauss 変換の過程で、いかなる曲線に写るであろうか。

$n$  回の変換を経た後  $\tilde{F}(z_0, k_0)$  と  $\tilde{F}(z_n, k_n)$  の関係式 (2.2),  
(2.3) より

$$\operatorname{Re} \tilde{F}(z_0, k_0) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_0}{k_n} \tilde{F}(z_n, k_n) \right\}$$

が満たされなければならない。したがって等高線 (3.4) の像  
曲線は

$$L_n: \operatorname{Re} \tilde{F}(z_n, k_n) = \frac{k_n}{k_0} \cdot k_0' \quad (3.5)$$

で表わされる。  $n \rightarrow \infty$  のとき、  $\{k_n\}$  は 0 に 2 次収束する  
ので  $K(0) = \pi/2$  を用いると、  $L_n$  の極限  $L_\infty$  は、  $z_\infty$ - $\bar{z}$   
面上の楕円

$$L_\infty: \operatorname{Re} \int_0^{z_\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{\pi}{2} \frac{k_0'}{k_0} \quad (3.6)$$

に写る。これは Joukowski 変換  $z = J(t)$  をほじ = せば、  
 $z_\infty$ - $\bar{z}$  面の楕円  $L_\infty$  は、  $t$ - $\bar{t}$  面の円

$$C_0: \operatorname{Re} \log t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k_0'}{k_0}$$

$$\text{よって} \quad |t| = e^{\pi k_0' / 2k_0}$$

となる。

次に  $z_n$ -平面のスリット  $[-1, 1]$

は,  $z_\infty = J(t) = z$  として単位円に写される. この二つの事実から与えられた  $z = z_0$ -平面は, 最終的に  $t$ -平面の円環領域

$$\{t\} : 1 \leq |t| \leq e^{\pi K'_0 / 2K_0} \quad (3.7)$$

に写される.

下降 Gauss 変換を  $n$  回打つたとき,  $z_n$ -平面の曲線  $L_n$  は, 楕円  $L_\infty$  の擾動を受けたものとみなされる. これにもなる  $t$ -平面の円環領域 (3.7) の外周は僅かに変形する.

原真近傍に短かいスリット  $[-\sqrt{k_{n+1}}, \sqrt{k_{n+1}}]$ , 無限遠真近傍に  $[\sqrt{k_{n+1}}, \infty, -\sqrt{k_{n+1}}]$  が現われる.

$t$ -平面で記述された  $\tilde{F}(z_n, k_n) = \tilde{F}(J(t), k_n)$  の計算法として, 不定積分 (3.2) の被積分関数を原真周りで

Laurent 級数展開する方法も有力な方法と考へられるが, われわれは定積分表示 (3.3) を用いる. この被積分関数の特異点は, 1位の代数的特異点が  $\pm \sqrt{k_{n+1}}, \pm 1/\sqrt{k_{n+1}}$ , 対数特異点が  $\pm t, \pm 1/t$  である. 積分区間の端点の特異点は, 数値積分として Gauss-Chebyshev 型を用いることにより解消される. 積分区間と特異点の位置関係を図 2 に示す.  $t$  が円環領域 (3.7) を動くとき  $1/t$  は, その単位円に回する反転となる.

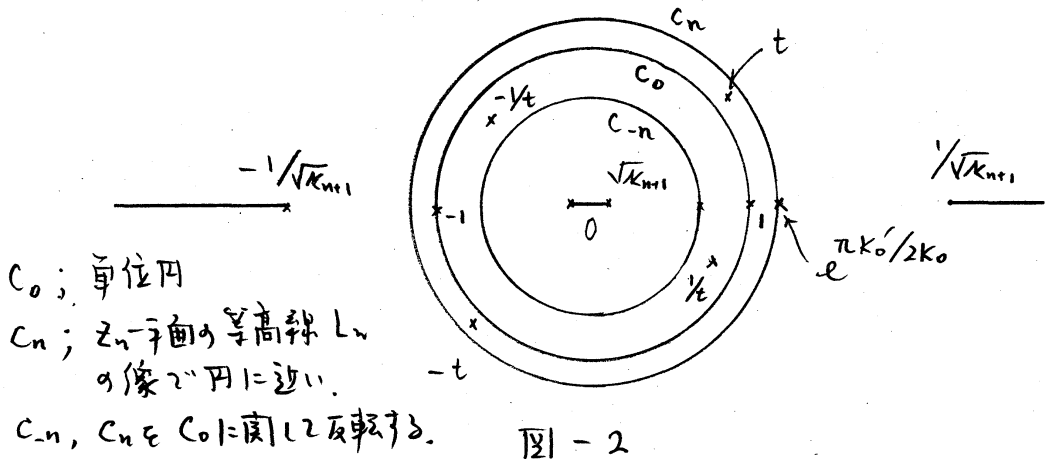


図-2

積分区間に最も近い特異点は、 $\pm 1/t$  の対称特異点である。これは Gauss-Chebyshev 則の精度を支配する  $\rho = 1$  となる。区間  $[-\sqrt{\kappa_{n+1}}, \sqrt{\kappa_{n+1}}]$  を  $[-1, 1]$  に標準化するため、定積分 (3.3) に  $x = \sqrt{\kappa_{n+1}} s$  と変数変換すれば、これは

$$\tilde{F}(z_n, \kappa_0) = \frac{\sqrt{\kappa_1}}{\pi \kappa_0} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-\kappa_1^2 s^2)}} \log \frac{\kappa_1 s^2 - t^2}{1 - \kappa_1 t^2 s^2} ds \quad (3.8)$$

$$z_n = J(t), \quad \kappa_1 = \kappa_{n+1}, \quad \kappa_0 = \kappa_n$$

となる。被積分関数は偶関数であるから  $2N$  点 Gauss-Chebyshev 則は、実質  $N$  点則である。上式に  $2N$  点則を適用したときの誤差は、次のように積分表示される<sup>3)</sup>

$$\text{積分 (3.8) の } 2N \text{ 点則誤差} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{U_{2N}(s)}{T_{2N}(s)} \frac{1}{\sqrt{1-\kappa_1^2 s^2}} \log \frac{\kappa_1 s^2 - t^2}{1 - \kappa_1 t^2 s^2} ds \quad (3.9)$$

$C$ ;  $[-1, 1]$  を囲み、かつ被積分関数の正則領域内の任意の閉曲線。

$U_N(x); T_N(x)$  に対する 2 種 Chebyshev 関数.

この関数の主要部を評価しよう.

$U_{2N}(z)$  と  $T_{2N}(z)$  の複素表示による

$$U_{2N}(z) = \frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}} (z + \sqrt{z^2-1})^{-2N}$$

$$T_{2N}(z) = \frac{1}{2} \left\{ (z + \sqrt{z^2-1})^{2N} + (z - \sqrt{z^2-1})^{2N} \right\}$$

とある.  $z = 3$  で積分区間に最も近い特異点は  $\pm 1/\sqrt{k_1} t^2$  であるから, 積分路  $C_\varepsilon$ , それに近付く  $\varepsilon \rightarrow 0$  による

$$U_{2N}(z) \approx 2^{-2N} z^{-2N-1}, \quad T_{2N}(z) \approx 2^{2N-1} z^{2N}$$

また対数関数の Taylor 展開

$$\log(1 - k_1 t^2 z^2) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(k_1 t^2)^\ell}{\ell} z^{2\ell}$$

に注意すれば

$$\text{積分 (3.9)} \approx \frac{\pi}{\sqrt{1-k_1 t^2}} \cdot \frac{(k_1 t^2)^{2N}}{2N} \cdot 2^{-4N+1} \quad (3.10)$$

④ 漸近の略号  $k_0, k_1, \dots, k_n, k_{n+1}$  とする.  $k_n$  が十分 0 に近ければ

$$k_{n+1} \approx \frac{1}{4} k_n^2, \quad k_n \approx 4 \cdot \left(\frac{k_0}{4}\right)^{2^n}, \quad n \geq 1$$

変数  $z$  は, 最終的に円環領域 (3.7) の内にあるから

$\tilde{F}(z, k_0)$  の誤差は, (2.2), (3.8), (6.10) より

$$\begin{aligned} \Delta_N^n &\approx \frac{K_0}{2K_n N} (k_{n+1} \bar{q}^1)^{2N} 2^{-4N} \\ &\approx \frac{K_0}{2K_n N} \rho^{-2N} \cdot \left(\frac{K_0}{4}\right)^{N^2 + 2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$|t| < 1 \quad \rho = e^{-\pi K_0' / K_0} \quad \left( = \max_t |t^2| \right)$$

したがって, 本方法は, 第一種不完全複素楕円積分に対し  
全域が一様近似となる。

誤差は, (実数) 標本数  $N$  の指数関数, Gauss変換の回数  $n$   
の2重指数関数<sup>( $t$ あり,  $\rho$ あり)</sup>に依存して減少する。計算の手間を平方根  
と対数関数の評価で測れば”次のように”なる。

Gauss変換  $n$  回                      平方根  $n$  回。

Joukowski変換                      平方根1回。

$2N$  回 Gauss-Chebyshev則      対数関数  $N$  回評価。

平方根も対数関数も手間は同じとみれば, 平方根に換算し  
て, 全体の手間は

$N+n+1$  回 (複素平方根換算)

となる。一定の手間  $n$ , 誤差を最小化した。  $n$  は,  $\Delta_N^n$  に  
= 重指数関数的に効くので, 積分則  $t$  と  $1-t$  は 2 点則 (実数1  
点則) を用いることにする。実際, 数値計算例からみても,  
このことは裏任けされる。次節参照。



因みに、母数が大きい場合の算法として上昂 Landen 変換  
 $n$  回、1 変則を用いる算法<sup>(4)</sup>の手間は、平方根換算  $n+2$  と  
 なり、前述の方法と一致する。母数と補母数を交換して精度  
 を比較するならば、両者互角である。

積分の最大誤差は、 $z$ -平面で考えらるならば、環状領域の  
 外圍 <sup>$C_n$</sup> で発生する。これを元の  $z$ -平面で考えらるならば、スリ  
 ット  $[-1, \infty, -1]$  に対応する。スリット  $[-1, 1]$  は、 $z$ -平面  
 の単位円周 (環状領域の中心部) に対応するから、数値積分  
 則の精度はよい。すなわち  $z$ -平面の原素近傍  
 は、とくに精度よく計算がまるところとなる。

楕円積分  $F(z, k)$  は、実軸と原点に関して対称だから  $z$  を  $z'$   
 1 象限だけに限定してよい。このとき、いま求めた  $\tilde{F}(z, k)$   
 から直ちに目的の積分

$$F(z, k) = \lambda \tilde{F}(z, k) \quad (3.12)$$

が求まる。

本方法は、楕円積分  $F(z, k)$  に対する全域近似にわたるこ  
 ろを述べたが、そのためには積分 (3.3) の  $z$  の動く領域を  
 明確に限定しなければならぬ。換言すれば、Gauss 変換の  
 過程で、最初のスリット  $[-1, \infty, -1]$  の像曲線 <sup>$L_n$</sup> の途端である。

こゝでは、その漸近的な曲線が  $1, -1$  を焦点とする楕円  
 (3.6) を、その代りに用いた。曲線  $L_n$  の解析は省略する。

## 4. 計算法の要約と計算例.

第1種不完全楕円積分  $F(z, k)$  を求める. 本方法は, 母関数が小さい場合に適して  $k < 1/\sqrt{2}$  とする.  $z$  は第1象限として一般性を失わない.

算法は三段階に分れる.

- 1).  $z, k$  を初期値として下降 Gauss 変換 (1.8) を  $n$  回行う.
- 2) Jankowski 変換を1回行う, 定積分表示 (3.3) を得る.
- 3) (3.3) に対し区間  $[-\sqrt{k_n}, \sqrt{k_n}]$  の  $2N$  点 (実数  $N$  点) Gauss-Chebyshev 則を適用して  $\tilde{F}(z_n, k_n)$  を求める. 次は (3.1), (3.12) を用いる.

単精度 (絶対精度  $10^{-7}$ ), 倍精度 ( $10^{-14}$ ) で計算するためには, 前者の場合  $n=2, N=1$ , 後者の場合  $n=3, N=1$  あるいは  $n=2, N=2$  とすればよい.

数値例. 上掲 Landen 変換と比較できるようにラスタの標本点は同じとした<sup>4)</sup>. まず  $e_1$  は, 区間  $[0, 1]$  を 100 等分してその絶対値最大誤差,  $e_2$  は  $[1, 1/k)$  を 200 等分した場合,  $e_3$  は, 第1象限で  $z = re^{i\theta}$ ,  $r = 8^l$ ,  $l = -22, -21, \dots, 0, 1, \dots, 22$ ,  $\theta = m\pi/100$ ,  $m = 0, 1, \dots, 50$  と離散化した場合

の誤差がある。

表 1

k**2= 1/64				
n	N	e1	e2	e3
1	1	9.42D-13	3.34D-07	4.86D-07
1	2	8.33D-16	1.11D-13	2.37D-13
1	3	7.22D-16	1.73D-15	2.24D-15
2	1	8.76D-16	1.79D-15	1.43D-15

k**2= 1/ 2				
n	N	e1	e2	e3
1	1	4.15D-06	8.50D-04	1.10D-03
1	2	7.23D-12	6.13D-07	1.03D-06
1	3	9.05D-16	5.89D-10	1.28D-09
1	4	1.12D-15	6.36D-13	1.79D-12
1	5	1.34D-15	3.02D-15	4.46D-15
2	1	1.44D-11	2.96D-09	3.84D-09
2	2	9.03D-16	2.23D-15	1.16D-15
3	1	1.33D-15	2.92D-15	1.58D-15

k**2=63/64				
n	N	e1	e2	e3
1	1	9.54D-03	6.07D-02	5.59D-02
1	2	1.45D-05	1.66D-03	1.60D-03
1	3	4.66D-08	5.94D-05	5.88D-05
1	4	1.05D-10	2.39D-06	2.42D-06
1	5	4.15D-13	1.03D-07	1.06D-07
1	6	2.90D-15	4.60D-09	4.86D-09
2	1	2.47D-05	1.88D-04	2.12D-04
2	2	1.37D-10	1.61D-08	2.04D-08
2	3	3.57D-15	1.83D-12	2.62D-12
2	4	2.91D-15	5.43D-14	4.08D-15
3	1	2.75D-10	2.08D-09	2.37D-09
3	2	2.46D-15	5.35D-14	3.87D-15
4	1	3.78D-15	5.61D-14	5.02D-15

5. まとめ

この計算結果から

以下のことがわかる。

①  $k$  が小さい程精度がよい。②  $k$  が大きい場合、たとえ  $k = \sqrt{63}/8$  のときでも Gauss 変換を 4 回行なえば倍精度の結果が得られる。

一般に  $e_1$  は、 $e_2$ 、 $e_3$  に比べ 2 桁以上の全精度近似が成り立ち、 $e_3$  は、 $e_2$  に比べ 2 桁以上の精度が得られる。

標本数  $N$  を増やすと Gauss 変換の回数  $n$  を増やすが効果的である。

本方法と上野 Landen 変換<sup>4)</sup> と併用すれば、任意の複素数と任意の複素数の楕円積分  $F(z, k)$  の評価が可能となる。

## 参考 文献

- 1) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信: 数値公式 I, 岩波全書 (1956)
- 2) Byrd, P. F. and Friedman, M. D.: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists, Springer-Verlag, Berlin (1954).
- 3) 森 正式: 数値解析と複素関数論, 弘文堂 (1975).
- 4) 久原秀夫, 鳥居達生, 杉浦洋: 第1種不完全複素楕円積分の全域から一様近似, 情報処理学会, 数値解析研究会資料 (1983.10.1).
- 5) 久原秀夫: スリット境界領域のグリーン関数・ノイマン関数とその応用, 電気学会, 電磁界理論研究会資料 (EMT-83-14), (1983.4.23).