

## DE変換公式と補外法を用いて

### 振動的関数の積分を計算する方法に関する一考察

筑波大 電子情報 杉原正顯 (Masaki Sugihara)

#### 1. はじめに

1970年代に、二重指数関数型変数変換数値積分公式(以下DE変換公式と略する)は、高橋、森によって、解析関数の数値積分公式として提案された[1]。その後、この公式は、多くの解析関数の数値積分に応用され、広範な解析関数の積分に対して非常に有効であるとの評価を得た。しかし、同時に、DE変換公式が必ずしも良い結果を与えない一連の積分問題の存在も明らかとなって来た。その一つが、 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 等の振動的関数の半無限区間での積分問題である。

この種の積分問題に対して、戸田、小野は、被積分関数に直接DE変換を用いるのではなく、積分  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  を  $\lim_{a \downarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-ax} f(x) dx$  (一種の総和法にあたる)と解釈し、 $\int_0^{\infty} e^{-ax} f(x) dx$  をDE変換公式を用いて計算し、その結果を使って  $a \rightarrow 0$ への補外を行うことにより、積分  $\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \downarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-ax} f(x) dx$  を求める“DE変換公式と補外法を用いる数値計算法”を提

定1 K [2]. そして, 半ば実験的K —  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx, \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{3 \cdot x^{2/3}} dx$   
 (=  $\int_0^{\infty} \sin(x^3) dx$ ),  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{x} dx$ 等K DE変換公式と補外法を用い  
 る数値計算法を適用して — この方法の有効性を示した.

そこで, 本研究においては, まず, 上記のDE変換公式と  
 補外法を用いる方法が, 何故  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  等K有効であるのか  
 を理論的に解明する. そして, 上記の方法が有効であるよう  
 な積分問題を明確にする. さらに, それまでに得られK知見  
 をもとに, 積分  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  と  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} f(x) dx$  と解釈し,  
 $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} f(x) dx$  K DE変換公式を適用し,  $a \rightarrow 0$  への補外を行  
 う方法について考察し, 数値実験を通して, この方法が, もと  
 の(戸田, 小野による) DE変換公式と補外法を用いる方法よ  
 り, より有効であることを示す.

## 2. 戸田, 小野によるDE変換公式と補外法を用いる数値積 分法のアルゴリズムとその有効性に関する理論的問題

戸田, 小野によるDE変換公式と補外法を用いる数値積分  
 法の具体的アルゴリズムは, 以下のようである.

- (1)  $I(a_n) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-a_n x} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{a_n} e^{-t} f\left(\frac{t}{a_n}\right) dt, a_n = \frac{1}{2^n} (n=0, 1, \dots, N)$  と  
 DE変換  $t = \exp(y - \exp(-y))$  を用いて, 台形則で計算する.

(2)  $I_n^{(0)} \triangleq I(a_n)$  とし、次のような scheme を従って、 $\tau, a_n \rightarrow 0$  への補外 (Richardson 補外) を行う。

$$I_{m+1}^{(m+1)} = \frac{2^{m+1} I_{n+1}^{(m)} - I_m^{(m)}}{2^{m+1} - 1}$$

$(m \geq 0, n \geq 0)$

$$\begin{array}{l} I(a_0) = I_0^{(0)} \\ I(a_1) = I_1^{(0)} \rightarrow I_1^{(1)} \\ I(a_2) = I_2^{(0)} \rightarrow I_2^{(1)} \rightarrow I_2^{(2)} \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{array}$$

(3)  $I_N^{(N)}$  を  $\int_0^\infty f(x) dx$  の近似値とする。

このアルゴリズムを見れば、明らかのように、 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  等の積分問題に対するこのアルゴリズムの有効性を議論する場合に、理論上の問題となるのは次の3点である。

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(a_n) = \int_0^\infty f(x) dx$  は成立するのか。

(ii)  $\int_0^\infty \frac{1}{a_n} e^{t/a_n} f(\frac{t}{a_n}) dt$  に、DE 変換  $t = \exp(y - \exp(-y))$  を施して、台形則を用いた時の収束の仕方ほどのようであるのか。

(iii) (2) の Richardson 補外は、正当化されるのか。つまり、(2) での補外が  $I(a_n) \rightarrow I(0)$  の加速になる、というのか。

以下、この3つの問題を具体的問題  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  について議論し、そこで得られる結果が、 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  を含むどのような関数族に対して一般化できるかを考察する。

### 3. 問題 (i), (ii), (iii) について

### 3.1 問題(i)について.

問題(i)については, 次の Laplace 変換に関する Abel 型の定理が成立することより,  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  が存在する限り,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(a_n) = \int_0^{\infty} f(x) dx$  が成立することがわかる.

**定理 1** (Laplace 変換に関する Abel 型の定理) [3], [4]

$\int_0^{\infty} e^{-s_0 x} f(x) dx$  ( $s_0 \in \mathbb{C}$ : 複素数) が存在するとする. この時,  $0 \leq \beta < \pi/2$  とし,

$$\lim_{\substack{s \rightarrow s_0 \\ |\arg(s - s_0)| \leq \beta}} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-s_0 x} f(x) dx$$

が成立する. ここで,  $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$  なる  $s$  に対して  $\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$  が存在することに注意せよ.

### 3.2 問題(ii)について

$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  の場合には, 次の定理 2 が, 問題(ii)に対する解答を与える.

**定理 2**

$g(y) = e^{-\varphi(y)} \cdot \frac{\sin(\varphi(y)/a)}{\varphi(y)} \cdot \varphi'(y)$  ( $\varphi(y) \stackrel{d}{=} \exp(y - \exp(-y))$ ) とする時,

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(mh) - \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = O\left(e^{-\frac{2\pi}{h}(\tan^{-1}(a) - \varepsilon)}\right) \quad (h \rightarrow 0),$$

但し,  $\varepsilon$  は任意の正数であり,  $O(\cdot)$  の定数は  $a, \varepsilon$  による.

(証明) 基本となるのは、次の Poisson の総和公式 [4], [5], [6] である。

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(mh) - \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = \sum_{n \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{i \frac{2\pi n}{h} y} dy.$$

つまり、無限区間  $(-\infty, \infty)$  の積分に対して台形則を適用した場合の誤差は、この式の右辺の級数で与えられるのである。

まず、 $\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{i \frac{2\pi}{h} y} dy$  を評価する。  $g(y) = e^{-\varphi(y)} \frac{\sin(\varphi(y)/a)}{\varphi(y)}$ 、 $\varphi'(y)$  の

正則性に注意して右図のようは積分路  $K$  と、この  $g(y)$  の積分を考へる。

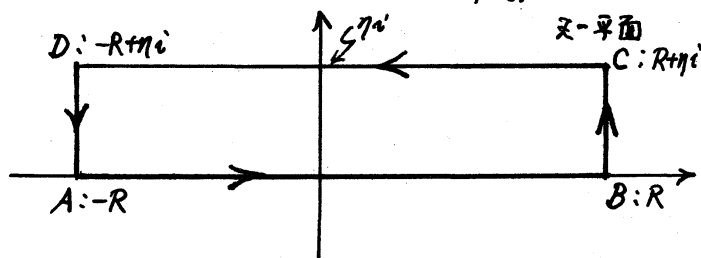


図1. 積分路

ここで、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_D^A g(z) e^{i \frac{2\pi}{h} z} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_B^C g(z) e^{i \frac{2\pi}{h} z} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R |g(z + \eta i)| dz < \infty$$

ならば、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{i \frac{2\pi}{h} y} dy &= - \int_{-\infty}^{\infty} g(z + \eta i) e^{i \frac{2\pi}{h} (z + \eta i)} dz \\ &= - e^{-\frac{2\pi}{h} \eta} \int_{-\infty}^{\infty} f(z + \eta i) e^{i \frac{2\pi}{h} z} dz \\ &= O(e^{-\frac{2\pi}{h} \eta}) \end{aligned}$$

となることがわかる。そこで、上記の仮定が満たされるような  $\eta$  を求める。

$g(z + \eta i)$  の評価をするために、最初  $\varphi(z + \eta i)$  から計算する。

$$\begin{aligned} \varphi(z + \eta i) &= \exp(z + \eta i) - \exp(-z - \eta i) \\ &= \exp(z - \exp(-z) \cos(\eta)) \cdot \{ \cos(\eta + \exp(-z) \sin(\eta)) + i \cdot \sin(\eta + \exp(-z) \sin(\eta)) \} \end{aligned}$$

次に、 $g(z + \eta i)$  を  $z \rightarrow \infty$  で評価すると

$$|e^{-\varphi(\xi+\eta i)} \frac{\sin(\varphi(\xi+\eta i)/a)}{\varphi(\xi+\eta i)} \cdot \varphi'(\xi+\eta i)| = \theta \left( e^{-\varphi(\xi+\eta i)} \cdot e^{-i\varphi(\xi+\eta i)/a} \right)$$

$$= \theta \left( \exp[\exp(\xi - \exp(-\xi) \cdot \cos(\eta)) - (\cos(\eta + \exp(-\xi) \cdot \sin(\eta)) + \frac{1}{a} \sin(\eta + \exp(-\xi) \cdot \sin(\eta)))] \right)$$

従、 $\tau$ , 十分大正は  $\xi$  に対して

$$-\cos(\eta + \exp(-\xi) \cdot \sin(\eta)) + \frac{1}{a} \sin(\eta + \exp(-\xi) \cdot \sin(\eta)) < 0$$

と正  $\delta$  がある  $\eta$  に対して

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_B^C g(z) e^{i \frac{2\pi}{k} z} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R |g(\xi + \eta i)| d\xi < +\infty$$

であることがわかる。この  $\eta$  に関する条件は、十分大正  $\xi$  に対して  $\tan(\eta + \exp(-\xi) \cdot \sin(\eta)) < a$  と同値であり、これは、 $\eta < \tan^{-1}(a)$  であるから、満たされる。

一方、 $\xi \rightarrow -\infty$  の時、

$$g(\xi + \eta i) = \theta(\varphi'(\xi + \eta i)) = \theta(\exp(\xi - \exp(-\xi) \cos(\eta)))$$

であり、 $0 \leq \eta < \pi/2$  である限り、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^A g(z) \cdot e^{i \frac{2\pi}{k} z} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 |g(\xi + \eta i)| d\xi < +\infty.$$

である。

従、 $\tau$ , 以上の考察から

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{i \frac{2\pi}{k} y} dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi + (\tan^{-1}(a) - \varepsilon)i)| d\xi \cdot e^{-\frac{2\pi}{k}(\tan^{-1}(a) - \varepsilon)}$$

がわかる。

他の  $\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{i \frac{2\pi}{k} y} dy$  に対しても同様に評価でき、初めに述べた Poisson の総和公式を、これに  $\varepsilon$  代入すると

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(mh) - \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = \theta(e^{-\frac{2\pi}{k}(\tan^{-1}(a) - \varepsilon)}) \quad (h \rightarrow 0)$$

を得る。

□

この定理2によつて,  $a$  を固定するとき, DE変換を施して台形則を用いて,  $I(a)$  を求める時の収束の仕方, 台形則の刻み幅を  $h$  から  $h/2$  にすると精度が桁数  $k$  として倍になるよじはとものであることがわかる。

次に, 定理2の結果を  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{x} dx$  や  $\int_0^a \text{代数関数} \cdot \sin(x) dx$  のよじな積分問題にも適用できるよじに拡張することを考える。

まず, 必要な定義を与えよ。  $\eta$  を  $0 \leq \eta < \pi/2$  とし,

$$\mathcal{D}(\eta) \stackrel{\text{d}}{=} \{x + yi \in \mathbb{C} \mid -\infty < x < +\infty, |y| \leq \eta\},$$

$$\varphi(\mathcal{D}(\eta)) \stackrel{\text{d}}{=} \{\varphi(z) \in \mathbb{C} \mid z \in \mathcal{D}(\eta)\}, \quad \text{ここで } \varphi(z) = \text{app}(z - \text{app}(-z)).$$

さらによ,  $\forall w \in \mathbb{C}$  に対して,  $\rho(w)$  を次のよじに定義する。

$$\rho(w) \stackrel{\text{d}}{=} \sup_{\substack{0 \leq \eta < \pi/2 \\ w \notin \varphi(\mathcal{D}(\eta))}} \eta$$

この時, 次の補題が成立する。

補題3

$$w \notin [0, \infty) \Rightarrow \rho(w) > 0$$

(証明)

$\mathcal{D}^*(\eta)$  を図2の斜線部をなす領域とする。この時,

$\varphi(\mathcal{D}(\eta)) \subseteq \mathcal{D}^*(\eta)$  を証明すれば,

$$\rho(w) \equiv \sup_{\substack{0 \leq \eta < \pi/2 \\ w \notin \varphi(\mathcal{D}(\eta))}} \eta \geq \sup_{\substack{0 \leq \eta < \pi/2 \\ w \notin \mathcal{D}^*(\eta)}} \eta$$

7

であるから,  $w \in [0, \infty) \ (\in \mathbb{C})$  に対して  $\rho(w) > 0$  とするこ  
 が容易にわかる ( $w \in [0, \infty) \Rightarrow \sup_{0 \leq \eta < \pi/2} \eta > 0$  はあきらかである  
 から).

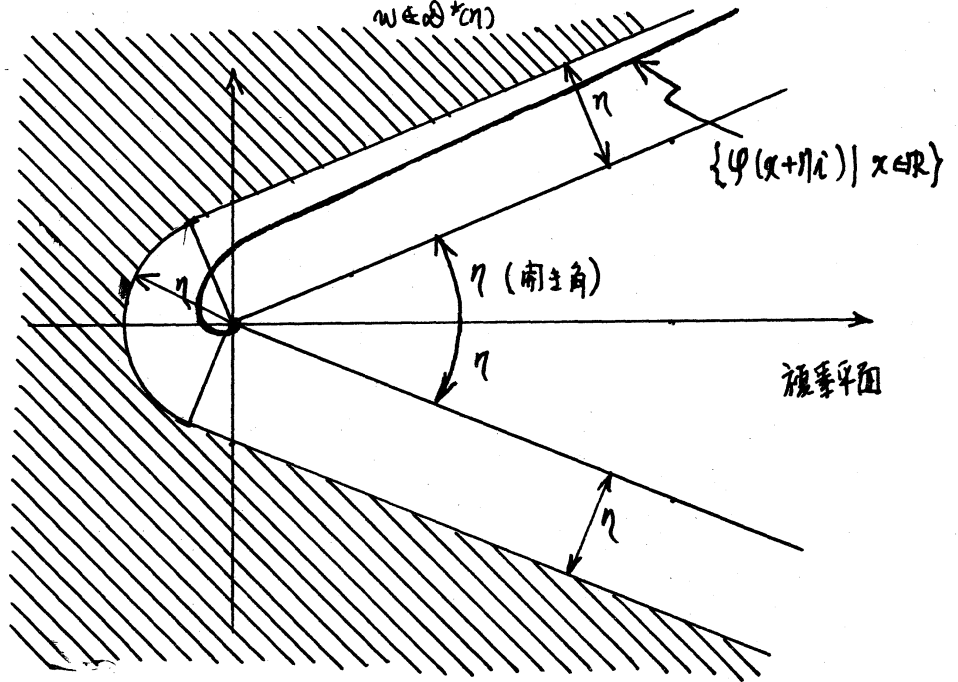


図2.  $\mathcal{D}^*(\eta)$  の定義 (斜線部以外の領域) と  $\{\varphi(x+\eta i) \mid x \in \mathbb{R}\}$  の様子.

そこで, 以下,  $\varphi(\mathcal{D}(\eta)) \subseteq \mathcal{D}^*(\eta)$  を証明する. ここで,  $\eta' < \eta$   
 ならば,  $\mathcal{D}^*(\eta') \subseteq \mathcal{D}^*(\eta)$ , に注意すれば,  $\varphi(\mathcal{D}(\eta)) \subseteq \mathcal{D}^*(\eta)$  を  
 証明するにあたっては,

$$\varphi(\partial\mathcal{D}(\eta)) \subseteq \mathcal{D}^*(\eta)$$

を示すことができれば十分である. さらに,  $\partial\mathcal{D}(\eta) = \{x+yi \in \mathbb{C} \mid$   
 $-\infty < x < \infty, y = \pm\eta\}$  の実軸に対する対称性に注意すると,

$$\{\varphi(x+\eta i) \in \mathbb{C} \mid -\infty < x < \infty\} \subseteq \mathcal{D}^*(\eta)$$

が成立すれば, 十分であることがわかる.

上記の  $\varphi(x+\eta i) \in \mathbb{C}$  を極座標で表わすと

8



$$r = \exp(x - \exp(-x) \cos(\eta))$$

$$\theta = \eta + \exp(-x) \cdot \sin(\eta)$$

と作る。ここで、 $r$  が  $x$  の単調増加関数であること、および、 $\theta$  が  $x$  の単調減少関数であること、 $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = \eta$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \theta(x) = +\infty$  を用いると、次の2つ:

(i)  $\theta(x) = \eta + \frac{\pi}{2}$  とする  $x$  に対して、 $r(x) < \eta$ ,

(ii)  $\eta < \theta(x) \leq \eta + \frac{\pi}{2}$  とする  $x$  に対して、 $r(x) \cdot \sin(\theta(x) - \eta) < \eta$ ,

が成立すれば、 $\{\varphi(x + \eta i) \in \mathbb{C} \mid -\infty < x < +\infty\} \subseteq \mathcal{D}^*(\eta)$  がわかる。

(i) は  $\theta(x) = \eta + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \exp(-x) \sin(\eta) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -\log\left(\frac{\pi}{2 \sin(\eta)}\right)$  と

あることより、 $r(x) = r\left(-\log\left(\frac{\pi}{2 \sin(\eta)}\right)\right) = \frac{\pi}{\sin(\eta)} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{2} \cot(\eta)\right) < \eta$

がわかり、成立する。(ii) については、 $\theta(x) = \eta + \alpha$ , ( $0 < \alpha \leq \pi/2$ )

とすると、この時、 $x = -\log\left(\frac{\alpha}{\sin(\eta)}\right)$  となり、 $r\left(-\log\left(\frac{\alpha}{\sin(\eta)}\right)\right) =$

$\frac{\sin(\eta)}{\alpha} \cdot \exp(-\alpha \cot(\eta))$ , 従って  $r\left(-\log\left(\frac{\alpha}{\sin(\eta)}\right)\right) \cdot \sin \alpha \leq \sin(\eta) < \eta$  と

なり、成立する。以上で補題の証明は完了。  $\square$

補題3のあとに、次の定理4が証明できる。

#### 定理4

$f(t)$ ,  $P(t)$  を実数に実数値を対応させる関数とし、次が成立するとする。

$$(i) \quad f(t) \triangleq \iint_D w(x, y) e^{it(x+y)} d\mu(x, y)$$

ここで、 $D$  は集合  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$  に含まれる有界閉集合。  $\mu(x, y)$  は  $D$  で定義された測度で、

$$\iint_D |w(x, y)| d\mu(x, y) < +\infty \text{ とする。}$$

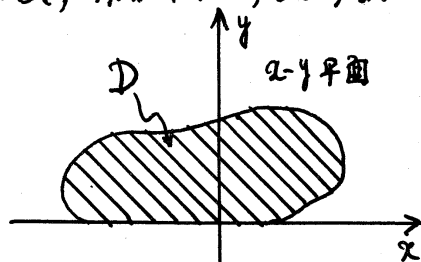


図3. 積分領域  $D$

(ii)  $h(z)/z^n$  ( $n \geq 0$ : 整数) は 整関数.

(iii)  $P(t)$  は, 代数関数で,  $t \in [0, \infty)$  で 特異点をもちず,

$\lim_{t \rightarrow \infty} |P(t)| < +\infty$  とする. 又,  $P(t)$  の有限の特異点を  $\omega_1, \dots, \omega_N$  とする.

(iv)  $\int_0^{\infty} P(t) \frac{h(t)}{t^{n+\nu}} dt$  ( $\nu > -1$ ) が存在するとする.

この時,  $g(y) \equiv e^{-\varphi(y)} \cdot P(\varphi(y)/a) \cdot \frac{h(\varphi(y)/a)}{(\varphi(y)/a)^{n+\nu}} \cdot \frac{\varphi'(y)}{a}$ ,  $\varphi(y) = \exp(y - \exp(-y))$

とすると,

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(mh) - \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = O(e^{-\frac{2\pi}{h}(\alpha - \varepsilon)}), \quad (h \rightarrow 0),$$

ここで,  $\varepsilon$  は任意の正数,

$$d = \text{Min} \left( \tan^{-1} \left( \frac{a}{d} \right), \rho(a\omega_1), \dots, \rho(a\omega_N) \right) > 0,$$

$$d = \text{Max} \{ |x| \mid x + yi \in D \}.$$

(証明)

$$\begin{aligned} |h(\varphi(z+\eta i)/a)| &\leq \iint_D |w(x,y)| e^{\frac{y}{a}(\text{Re } \varphi(z+\eta i) + i \text{Im } \varphi(z+\eta i))(x+yi)} |d\mu| \\ &\leq \iint_D |w(x,y)| e^{\frac{1}{a}(-\text{Re } \varphi(z+\eta i) \cdot y - \text{Im } \varphi(z+\eta i) \cdot x)} |d\mu| \\ &\leq e^{\frac{d}{a} \text{Im } \varphi(z+\eta i)} \cdot \iint_D |w(x,y)| |d\mu| \end{aligned}$$

に注意し, さらに  $\rho(\cdot)$  の定義より,  $D(d) \ni y$  で  $P(\varphi(y)/a)$  が正則

であることを用いれば, 証明は定理 2 とほとんど同じである.

なお,  $d > 0$  は, 補題 3 による. □

この定理 4 から,  $\int_0^{\infty}$  代数関数  $\cdot \sin(ax) dx$  等。場合によっては,  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$  と導き, 代数関数の特異点の導きを考える必要があることが

わがら。殊に、正の実軸に近い特異点をもつ代数関数が含まれるような場合には、積分の収束が、非常に遅くなることかわかる。なお、定理4の  $\rho(\cdot)$  は、計算が大変であるので、代りに

$$\rho^*(w) = \sup_{\substack{0 \leq \eta < \pi/2 \\ w \in \mathcal{D}^*(\eta)}} \eta$$

を用いて、 $d^* \triangleq \text{Min} \{ \tan^{-1}(\frac{a}{d}), \rho^*(aw_1), \dots, \rho^*(aw_N) \}$  を計算し、 $d$  に対する下からの評価(近似)を得ることもできる(つねに  $d \geq d^*$  に注意)。

《注意》

定理4は、Bessel 関数  $J_\lambda(z)$  が

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_1^{\infty} (1-t^2)^{\lambda-1/2} e^{-tz} dz, \quad \lambda > -\frac{1}{2}$$

と書けることに注意すれば、 $\int_0^\infty$  代数関数  $\cdot J_\lambda(x) dx$  かつ  $\lambda > 2$  も適用可能である [7]。

### 3.3 問題例について

$I(a) \triangleq \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$  かつ、 $a \rightarrow 0$  で、 $a$  の中から漸近展開可能であれば、 $I(a_0), I(a_1), \dots, I(a_N)$  かつ Richardson 補外を適用して、 $I(a_n) (n=1, \dots, N)$  の  $I(0)$  への収束を加速することも出来る。

数学公式集(例えば、[7]) には、

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Actan}(1/a), \quad \text{Re } a > 0$$

と仮してあり,  $I(a)$  の  $a \rightarrow 0$  における状況は, 直接には, この  
公式からは, 判明しない. (しかし,  $a \in \mathbb{R}, a > 0$  で  $\text{Actan}(1/a) =$   
 $\frac{\pi}{2} - \text{Actan} a$  であること, 及び,  $|a| < 1$  で  $\text{Actan} a = a + \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \dots$   
を用いると, 前記の  $I(a)$  の公式から

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - (a + \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \dots) \quad \text{Re } a > 0, |a| < 1$$

がわかる. 従って, この式からわかるように,  $I(a)$  は, 原点を中心とする収束半径 1 をもつ中級数 (正則関数) に解析接続できる. 故に, 初めに述べたように,  $I(a_0), I(a_1), I(a_2), \dots, I(a_n)$  に Richardson 補外を用いることが正当化される.  $R_k^{-1}(I(a))$  の  $a \rightarrow 0$  での状況は,  $a$  の中級数に展開可能ということである.

文献 [2] において, 数値実験において, 使用された他の関数についても,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos(x)}{x^{\nu-1}} dx = \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left[ \frac{1}{(a+i)^{\nu}} + \frac{1}{(a-i)^{\nu}} \right],$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x^{\nu-1}} dx = \frac{i\Gamma(\nu)}{2} \left[ \frac{1}{(a+i)^{\nu}} - \frac{1}{(a-i)^{\nu}} \right],$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{a^2 + 2^2}{a^2 + 1^2}, \quad \nu > 0, \text{Re } a > 0$$

となること ([17]) より, 上記の場合と同様に,  $I(a)$  が, 原点を中心とする収束半径 1 をもつ中級数に解析接続でき, Richardson 補外が正当化できる.

次に, これらの結果をより広い関数族に押し広げる.

前記の一連の例において，何故  $I(a)$  が原点を中心とする収率半径 1 をもつ中級数に解析接続できるのかを解析することによつて，次の定理 5 を得る。

### 定理 5

$f(t)$ ,  $P(t)$  を実数に実数値を対応させる関数とし，次が成立するとする。

$$(i) f(t) \triangleq \iint_D w(x, y) e^{t(x+yi)} d\mu(x, y).$$

ここで  $D$  は右図のよき領域 (R.E.L. 境界含む) とし， $\mu(x, y)$  は  $D$  上の

$\sigma$ -有限測度。また  $\iint_D |w(x, y)| d\mu(x, y) < +\infty$  とする。

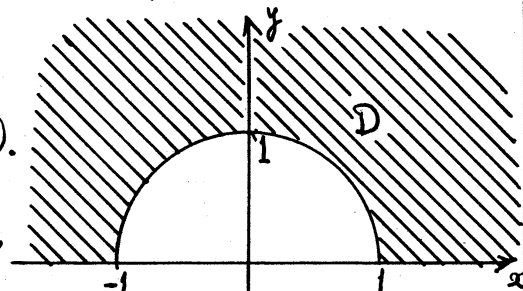


図4. 積分領域  $D$

(ii)  $P(t)$  は  $[0, \infty)$  上に特異点をもたない代数関数とする。

(iii)  $I(a) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot t^{\nu} f(t) \cdot P(t) dt$  は， $a > 0$  に対して存在するとする。

(iv) ある整数  $N_0$  が存在して， $N_0$  以上の任意の整数  $n$  に対して  $a > 0$  の時， $\int_0^{\infty} \iint_D |w(x, y)| t^{\nu+n} |e^{t(x+yi)}| e^{-at} d\mu(x, y) dt < +\infty$  とする。

この時， $I(a)$  は原点を中心として，収率半径 1 をもつ中級数に解析接続できる。

なお，(iii) から  $I(a)$  は  $\operatorname{Re} a > 0$  で解析的であることを注意せよ。

(証明)

条件 (iii) より,  $I(a)$  は  $\operatorname{Re} a > 0$  で解析的であること, 及び,

$$\frac{d^n}{da^n} I(a) = \int_0^\infty (-1)^n e^{-at} \cdot t^{\nu+n} h(t) P(t) dt$$

であることがわかる。

従って,  $b > 0$  なる点の近傍で,  $I(a)$  は次のように Taylor 展開できる。

$$I(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{d^n}{da^n} I(a)|_{a=b}}{n!} (a-b)^n,$$

$$\frac{d^n}{da^n} I(a)|_{a=b} = \int_0^\infty (-1)^n e^{-bt} t^{\nu+n} h(t) P(t) dt.$$

以下,  $\frac{d^n}{da^n} I(a)|_{a=b}$  を評価するに  $\varepsilon < b$  とし,  $I(a)$  が原点を中心とする収束半径 1 の巾級数 (正則関数) に解析接続できることを示す。まず, (iv), (ii) より, 任意  $n \geq N_0$  とし

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^n}{da^n} I(a) \Big|_{a=b} \right| &= \left| \int_0^\infty (-1)^n e^{-bt} t^{\nu+n} h(t) P(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^\infty t^{\nu+n} P(t) e^{-bt} \left( \iint_D w(x,y) e^{it(x+iy)} d\mu(x,y) \right) dt \right| \\ &= \left| \iint_D w(x,y) \left( \int_0^\infty t^{\nu+n} P(t) e^{it(x+iy) - bt} dt \right) d\mu(x,y) \right|. \end{aligned}$$

ここで,  $A > 0, B > 0, k > 0, L > 0$  が存在して ( $n \geq N_0$  は仮定),

$$\left| \int_0^\infty t^{\nu+n} P(t) e^{it(x+iy) - bt} dt \right| \leq A \frac{\Gamma(n+\nu+k+1)}{|(b+iy) - i(x+iy)|^{n+\nu+k+1}} + B \cdot L,$$

を示す。まず,  $P(t)$  の有限の特異点  $\omega_1, \dots, \omega_N$  とする時,  $L \in$

$\max_{j=1, \dots, N} (|\omega_j| + 1)$  で定義する。そして,  $f(z) = z^{\nu+n} P(z) e^{-z(b+iy) - iz}$

を図 5 のような分枝上で考える。ここで,  $f(z)$  の有限の分枝点

と無限遠点を結ぶカットは、領域  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq L\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$  をさけて通るよ;  $k$  入れとあることに注意せよ。

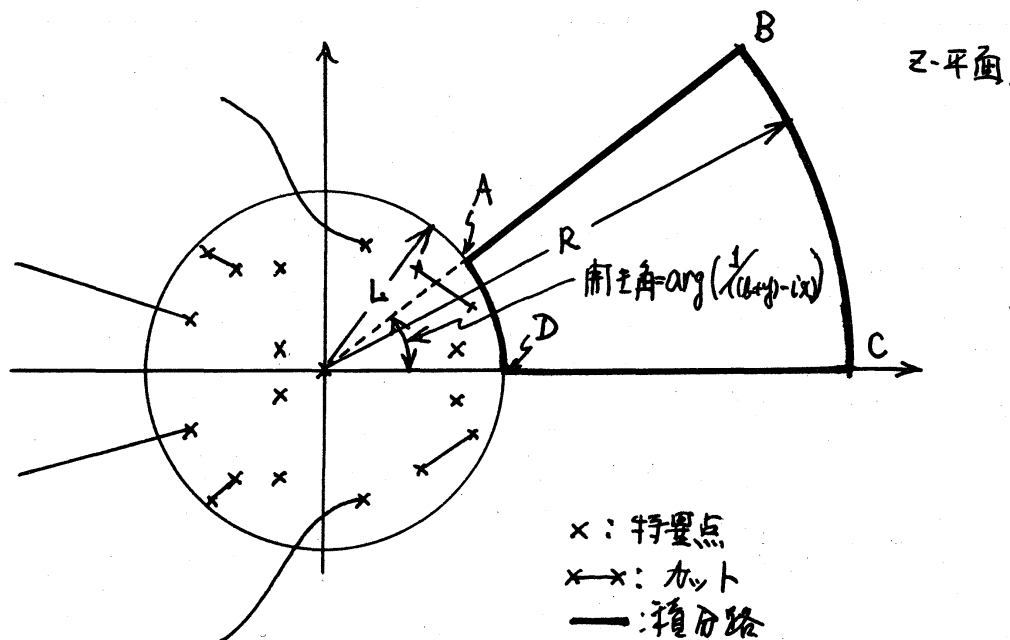


図5.  $f(z) = z^{v+n} P(z) e^{-z(l+y-ix)}$  の積分を考へる分枝と積分路 ABCDA.

積分を次のよりに分けて、以下、評価を行っていく。

$$\left| \int_0^{\infty} t^{v+n} P(t) e^{-t(l+y-ix)} dt \right| \leq \left| \int_0^L f(t) dt \right| + \left| \int_L^{\infty} f(t) dt \right|$$

右辺第一項は、容易にわかるよりに

$$\left| \int_0^L f(t) dt \right| \leq L^{v+n+1} \cdot \max_{0 \leq t \leq L} |P(t)|$$

と評価できる。右辺第二項については、まず、 $f(z)$  を積分路 ABCDA で積分し、Cauchy の定理 (正則な領域  $D$  の内曲線上の積分はゼロ) を用いると、次の評価を得る (図5. 参照)

$$\left| \int_L^R f(t) dt \right| \leq \left| \int_{\widehat{AD}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\widehat{BC}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\overline{DC}} f(z) dz \right|$$

この右辺第一項,  $\alpha = 0$  の場合

$$\left| \int_{AD} f(z) dz \right| \leq 2\pi L^{\nu+n+1} \cdot \max_{|z|=L} |P(z)|,$$

$$\left| \int_{BC} f(z) dz \right| = o(1/R) \quad (R \rightarrow \infty),$$

と評価できる。今,  $\alpha > 0$ , 右辺第一項の  $\alpha > 0$  の場合, 次の不等式:

$$\left| \int_{BC} f(z) dz \right| = \int_{|(b+y)-i\alpha|L}^{(b+y)-i\alpha \cdot R} \frac{\xi^{\nu+n}}{((b+y)-i\alpha)^{\nu+n+1}} P\left(\frac{\xi}{((b+y)-i\alpha)}\right) e^{-\xi} d\xi$$

$$\leq \frac{1}{|(b+y)-i\alpha|^{\nu+n+1}} \int_{|(b+y)-i\alpha|L}^{\infty} \xi^{\nu+n} |P\left(\frac{\xi}{((b+y)-i\alpha)}\right)| e^{-\xi} d\xi$$

$$\leq \frac{A}{|(b+y)-i\alpha|^{\nu+n+1+k}} \int_0^{\infty} \xi^{\nu+n+k} e^{-\xi} d\xi$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ここで, } |z| \geq L \Rightarrow |P(z)| \leq A|z|^k, \quad k > 0 \quad \alpha > 0 \\ \text{を用い, } |\xi| \geq |(b+y)-i\alpha|L \Rightarrow P\left(\frac{\xi}{((b+y)-i\alpha)}\right) \leq A \frac{|\xi|^k}{|(b+y)-i\alpha|^k} \\ \text{なる評価を使用する。} \end{array} \right)$$

$$= \frac{A \Gamma(\nu+n+k+1)}{|(b+y)-i\alpha|^{\nu+n+k}}$$

からなる。従って

$$\left| \int_L^{\infty} f(t) dt \right| \leq 2\pi L^{\nu+n+1} \max_{|z|=L} |P(z)| + \frac{A \Gamma(\nu+n+k+1)}{|(b+y)-i\alpha|^{\nu+n+k+1}}$$

より,  $\alpha > 0$  とおいて

$$\left| \int_0^{\infty} t^{\nu+n} P(t) e^{-t((b+y)-i\alpha)} dt \right|$$

$$\leq L^{\nu+n+1} \left( 2\pi \max_{|z|=L} |P(z)| + \max_{0 \leq t \leq L} |P(t)| \right) + \frac{A \Gamma(\nu+n+k+1)}{|(b+y)-i\alpha|^{\nu+n+k+1}}$$



$$\leq A \cdot \frac{\Gamma(n+\nu+k+1)}{|(b+y)-ix|^{n+\nu+k+1}} + B \cdot L^{n+\nu+1}$$

この評価式を  $| \frac{d^n}{da^n} I(a) |_{a=z}$  の評価式に代入すると,

$$| \frac{d^n}{da^n} I(a) |_{a=z} \leq \iint_D |w(x,y)| \left( A \cdot \frac{\Gamma(n+\nu+k+1)}{|(b+y)-ix|^{n+\nu+k+1}} + B \cdot L^{n+\nu+1} \right) d\mu(x,y)$$

$$\leq \iint_D |w(x,y)| \left( A \cdot \frac{\Gamma(n+\nu+k+1)}{(\sqrt{b^2+1})^{n+\nu+k+1}} + B \cdot L^{n+\nu+1} \right) d\mu(x,y)$$

$$\left( \because \tau, |(b+y)-ix| \geq \sqrt{b^2+1} \quad (\forall (x,y) \in D) \right)$$

$$= A \cdot \frac{\Gamma(n+\nu+k+1)}{(\sqrt{b^2+1})^{n+\nu+k+1}} + B \cdot L^{n+\nu+1}$$

を得る。

今、さらに、この評価式を、 $I(a)$  の収束半径を定める Cauchy-Hadamard の公式に代入すると、

$$\begin{aligned} \text{収束半径} &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{| \frac{d^n}{da^n} I(a) |_{a=z}}{n!}}} \\ &\geq \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{A \cdot \Gamma(n+\nu+k+1)}{n! (\sqrt{b^2+1})^{n+\nu+k+1}} + B \cdot \frac{L^{n+\nu+1}}{n!}}} \\ &= \sqrt{b^2+1} \end{aligned}$$

となる。従って、 $I(a)$  は、初めに述べた Taylor 展開 ( $L$  を中心とし収束半径  $\geq \sqrt{b^2+1}$  をもつ) を用いて、原点近傍に解折接続できる。ところが、 $b > 0$  は、任意であらう、 $k$  ので、 $I(a)$  は、収束半径 1 をもつ中級数 (正則関数) に解折接続できることがわかる。 □

## 《注意》

1. Bessel 関数  $J_\lambda(z)$  は

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{-1}^1 (1-t)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{itz} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{\Gamma: w=e^{i\theta}}^{\lambda} (1-w)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{i\lambda w z} dw$$

$0 \leq \theta \leq \pi$

と変形できる。従って、 $\int_0^\infty e^{-at}$  代数関数  $\cdot J_\lambda(zt) dt$  についても、定理5は、適用可能である。

2. 定理5において  $\int_0^\infty t^\alpha h(t) \cdot p(t) dt$  の存在は仮定してはいないことに注意せよ。例えば、定理5から、 $\int_0^\infty e^{-at} \sin^{2m+1} t dt$  ( $m$ : 非負整数) は、原点を中心とする収束半径1をとる中級数に解析接続可能であることがわかる ( $\int_0^\infty \sin^{2m+1} t dt$  は、存在しない)。

#### 4. 戸田, 小野による DE 変換公式と補外法を用いる数値積分法に関するまとめ

3. で得られた結果から、本質的に、戸田, 小野による DE 変換公式と補外法を用いる方法が、 $\int_0^\infty$  代数関数  $\times$  三角関数  $dx$  や  $\int_0^\infty$  代数関数  $\times$  Bessel 関数  $dx$  を計算するのに使用できることがわかった。ただし、散策には、定理4, 5の条件を満足することと調べる必要がある。例えば、 $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$  はこの方法と適用して積分値を計算することは、困難である(アルゴリズムの中の Richardson 補外と Aitken 補外をすれば、よいのである)。

### 5. 新しいアヴィリジムの導入とその有効性について

戸田・小野による文献[2]の中にある,  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  に対して, DE変換公式と補外法を適用し, 数値実験結果をみると,  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$  に DE変換公式を用いた時の収束の仕方が,  $a$  の小さいところで, 非常に遅いことがわかる. このことは, 定理2における結果, 数値積分誤差  $\approx O(e^{-\frac{2\pi}{k} \tan^2 a})$  より, 当然のことといえる. (しかし, 定理2の証明をみればわかるように,  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$  の代りに  $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\sin x}{x} dx$  に DE変換公式を適用すれば, 数値積分誤差  $\approx O(e^{-\frac{2\pi}{k}})$  となる ( $O(\cdot)$  の定数は  $a$  によるが). そこで, 戸田・小野による方法のアヴィリジムの(2.参照)の中の(1)を次の(1)'に代えることにし,  $\tau$ , 戸田・小野の方法より効率のよい方法が得られるのではないかと考えられる.

$$(1)' I(a_n) \stackrel{d}{=} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}} e^{-t^2} f\left(\frac{t}{\sqrt{a_n}}\right) dt, \quad a_n = \frac{1}{2^n} \quad (n=1, \dots, N)$$

DE変換  $t = \exp(\frac{1}{2}y) - \exp(-y)$  を用いて, 定形則で計算する.

以下, 戸田・小野のアヴィリジムのことについて考え方のと同様に, 新しいアヴィリジムのことについて有効性に関する理論的問題を考察していく.

まず, 問題(i)については, 戸田・小野のアヴィリジムの場合とま, 全く同じである.

問題(ii)については, 3.で導入した  $\varphi(\omega(\mu))$ ,  $\rho(\omega)$  に対して

$\mathcal{F}(\mathcal{D}(\eta)) \equiv \{ \varphi(z) \in \mathcal{E} \mid z \in \mathcal{D}(\mu) \}$ , ここで  $\varphi(z) = \exp(\frac{1}{2}z - \exp(-z))$ ,

$$\rho^*(w) \equiv \sup_{\substack{0 \leq \eta < \pi/2 \\ w \in \mathcal{F}(\mathcal{D}(\mu))}} \eta$$

とおく時, 次の定理が成立する.

### 定理 6

$h(t), P(t)$  は定理 4 と同じ条件を満足するものとあつた.

この時,  $g(y) = e^{-\varphi^2(y)} \cdot p(\varphi(y)/\sqrt{a}) \frac{h(\varphi(y)/\sqrt{a})}{(\varphi(y)/\sqrt{a})^{\mu+\nu}} \cdot \frac{\varphi'(y)}{\sqrt{a}}$ ,  $\varphi(y) = \exp(\frac{1}{2}y - \exp(-y))$

とあつたと,

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(mh) - \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = O(e^{-\frac{2\pi}{h}(\beta - \varepsilon)}), \quad (h \rightarrow 0),$$

ここで,  $\varepsilon$  は任意の正数,

$$\beta = \text{Min}(1, \rho^*(\sqrt{a}w_1), \rho^*(\sqrt{a}w_2), \dots, \rho^*(\sqrt{a}w_N)),$$

この定理から, 代数学関数  $P(t)$  の特異点が, 複素平面の右半面から離れ  $h$  と  $h^{-1}$  にある場合には,  $\int_0^{\infty} e^{-ax} f(x) dx$  に DE 変換公式を適用する場合には較べて  $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} f(x) dx$  に DE 変換公式を適用する方が収束が速いことが, 理論的には, わかる.

次に, 問題 (iii) について考察する. 新しい IV 型 II 級の関数の場合,  $I(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} f(x) dx$  は, 一般には,  $a=0$  の近傍で解析的ではない. 例として

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \quad (= \int_0^{\infty} e^{-a\xi^2} \frac{\sin \xi}{2\xi^{3/4}} d\xi)$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{2a}} e^{-\frac{1}{8a}} I_{1/4}(1/8a), \quad I_{\lambda}(z) \text{ は変形した Bessel 関数}$$

とほり ([7]),  $a \neq 0$   $a$  近傍で解析的ではない。しかし,

$$I(a) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(k+3/4)}{k! \Gamma(-k+3/4)} \cdot (4a)^k \quad (a \rightarrow 0)$$

と,  $a \rightarrow 0$  で漸近展開可能であり,  $I(a)$  に Richardson 補外が適用できることがわかる ([7]). この例,  $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ , の  $a \rightarrow 0$  での漸近展開可能性は, 次  $a$  より一般化でき, この定理の条件を満足する場合, Richardson 補外が適用できることがわかる。

### 定理 7

$f(x)$  は, 次の 2 つの条件を満足するとする。

(1) 次の Parseval の等式が成立するとする。

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} f(x) dx = \int_0^{\infty} \mathcal{F}_2(e^{-ax^2})(y) \cdot \mathcal{F}_2(f(x))(y) dy$$

但し,  $\mathcal{F}_2(f(x))(y) \triangleq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(xy) dx$  であり, この積分は,  $|y| < r$  で存在し,  $|y| > r$  に対しては, a.e.  $y$  で存在するとする。

(2)  $\mathcal{F}_2(f(x))(y)$  は,  $|y| < r$  ( $r > 0$ ) で正則であり,  $\mathcal{L}$ , 次  $a$  より一般化展開できるとする。

$$\mathcal{F}_2(f(x))(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 y^4 + \dots$$

ここで,  $\mathcal{F}_2(f(x))(y)$  は偶関数であることを注意せよ。

この時

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} f(x) dx \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Gamma(k+\frac{1}{2}) \cdot 4^k \cdot a^k, \quad (a \rightarrow 0),$$

が成り立つ。

(証明)

次の Watson の補助定理を用いれば,

Watson の補助定理

 $f(t)$  は,  $|t| < r$  ( $r > 0$ ) で

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots$$

と巾級数展開可能であるとし,  $\int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt < +\infty$  とする.

この時,

$$\int_0^\infty e^{-xt} t^\lambda f(t) dt \sim x^{-\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k \Gamma(\lambda+k+1)}{x^k}, \quad (x \rightarrow \infty)$$

但し,  $\lambda > -1$ .

(1), (2) から, 次の一連の評価を得る.

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} f(x) dx = \int_0^\infty \mathcal{F}_c(e^{-ax^2})(y) \cdot \mathcal{F}_c(f(x))(y) dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-y^2/4a} \mathcal{F}_c(f(x))(y) dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\xi^2/4a} \frac{\mathcal{F}_c(f(x))(\sqrt{\xi})}{2\sqrt{\xi}} d\xi$$

$$\sim \frac{1}{2\sqrt{2a}} (\sqrt{4a} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Gamma(k+\frac{1}{2}) (4a)^k), \quad (a \rightarrow 0)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ここで, } \mathcal{F}_c(f(x))(\sqrt{\xi}) = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{\xi} + \alpha_2 \xi^2 + \dots \\ |z| < r^2 \text{ とある } z \text{ を用いる.} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Gamma(k+\frac{1}{2}) \cdot 4^k \cdot a^k, \quad (a \rightarrow 0)$$

□

さらに、定理7と定理5とを結びつくと、使い易い次の系を得る。

### 系8

$h(t), P(t)$  は定理5に述べられる条件を満足するとし、 $f(t) \equiv h(t) \cdot P(t)$  は定理7にいう Parseval の等式を成立させるような関数であるとする。この時、 $\int_0^{\infty} e^{-at} f(t) dt$  は、 $a \rightarrow 0$  で漸近展開可能である。

(証明)

$\mathcal{F}_c(f(t))(y)$  が定理7の(2)の条件を満足することを言えよ。

Fourier変換の存在性から、 $\mathcal{F}_c(f(t))(y) = (I(iy) + I(-iy))/2$  が得られ、定理5から、この右辺は、 $|y| < 1$  で巾級数展開可能であるから、 $\mathcal{F}_c(f(t))(y)$  に対して(2)が成立する：とわかる。

この系8における Parseval の等式の成立条件 (Fourier変換の存在条件も入っている) は、文献[6], [7]にみるように実用上は、ほとんど考慮する必要がないと思われるので、新しいParsevalの法は、定理6の成立も考慮に入れれば、戸田・小野のParsevalの法と、実用上、同じ積分問題に適用可能である。

6. 数値実験を通じての、戸田・小野による方法と、新しい方法の比較

Rabinowitz が提出した積分の例題を変数変換して得られる無限積分 ([8])

$$\int_0^{\infty} \frac{A_m(x+1)}{(x+1)^2} dx$$

に、戸田・小野による方法と、新しい方法を適用した結果を表 1, 表 2 に示す。この積分に対しては、両方法とも適用可能であることが、一連の定理からわかることに注意せよ。なお、積分は、区間  $[-6.0, 6.0]$  に台形則を適用して計算した。

この結果からわかるように、新しい方法が、非常に有効である。他の例についても、同様の結果が得られ(ここに示すことは紙数の関係でできないが)、新しい方法が有効であることがわかる。

## 7. 結論

DE 変換公式と補外法を用いて、半無限区間における振動的関数を計算する場合に、積分問題が一連の定理の条件を満足することを確認、次の (1), (2) に従って積分値を求めればよい。

$$(1) I(a_n) = \int_0^{\infty} e^{-a_n x^2} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}} e^{-f\left(\frac{x}{\sqrt{a_n}}\right)} dx, a_n = \frac{1}{2^n} \quad (n=0, 1, \dots, N)$$

に DE 変換公式を適用して、 $I(a_n)$  を計算する。

$$(2) I(a_0), I(a_1), \dots, I(a_N) \text{ に Richardson 補外を適用し, } I(a_n)$$

$\rightarrow I(0)$  の加速を行ない、 $I(0)$  の近似値を求める。



表1.  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+L)}{(x+L)^2} dx$  戸田・木野の方法を適用した時の  
数値実験結果

(DE変換公式を用いて  $\int_0^{\infty} e^{-t} f(\frac{x}{a_0}) \frac{dx}{a_0}$ )  
 を計算した結果

$1/a_0 = 1.0$ 整数	数値積分結果
17	0.354782116843333543868249741591
33	0.354781894443638178432177581654
65	0.354781894443810587883962706660
129	0.354781894443810587883962944575
257	0.354781894443810587883962944575 = I(a <sub>0</sub> )
$1/a_1 = 2.0$	
17	0.429091491198479330290623041078
33	0.429057209604368276980485174116
65	0.429057211715126732958673541657
129	0.429057211715126582679288702474
257	0.429057211715126582679288702472 = I(a <sub>1</sub> )
4.0	
33	0.468925893913739555207242304354
65	0.468932374221528017351628476734
129	0.468932374945247574152284277851
257	0.468932374945247599263923857075
513	0.468932374945247599263923857075
8.0	
65	0.487567978295816646458040777695
129	0.487565006169355790379424681212
257	0.487565006066978468330800550079
513	0.487565006066978463191140710568
1025	0.487565006066978463191140710568
16.0	
129	0.496148236555294288046654280621
257	0.496148738303813198202714440286
513	0.496148738221497182257499608835
1025	0.496148738221497183287165885881
2049	0.496148738221497183287165885881
32.0	
257	0.50019952898337852400210208393
513	0.500199558234023232314364747673
1025	0.500199558205335662402948353086
2049	0.500199558205335662889079330625
4097	0.500199558205335662889079330625
64.0	
513	0.502157173717272587302927212201
1025	0.502157285211103350354714189354
2049	0.502157285209260977958682047112
4097	0.502157285209260978060798307602
8193	0.502157285209260978060798307601
128.0	
1025	0.503118296135511190709511252701
2049	0.503118299564434868636859869167
4097	0.503118299568252470533712474903
8193	0.503118299568252470523539669251
16385	0.503118299568252470523539669251
256.0	
2049	0.503594212717766376039989580139
4097	0.503594228734730840020135721490
8193	0.503594228733553668850795883841
16385	0.503594228733553668869421804031
32769	0.503594228733553668869421804031
512.0	
4097	0.503831037286472097044938536316
8193	0.503831034378507532982127042626
16385	0.503831034378383951405061284673
32769	0.503831034378383951406624858295
65537	0.503831034378383951406624858295

( I(a<sub>0</sub>) ~ I(a<sub>q</sub>) に Richardson  
 補外を施した時の結果 )

2	0.50333252898644257747461446036978
4	0.51063254123834396197320719544682
8	0.50456983147241512643234992239000
16	0.50405724648308930769513259317000
32	0.50406646775764933789950228644821
64	0.50406706220539684171783838525175
128	0.50406706194900211013800367014924
256	0.50406706190694705800142808344956
512	0.50406706190692817227040451004875

\* 下線部が真値(数値的  
 和)と一致している。

表2.  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+1)}{(x+1)^2} dx$  に対する新しい方法を適用した時の

数値実験結果

(DE変換公式を用いて  $\int_0^{\infty} e^{-t^2} H(\frac{t}{a_n}) \frac{dt}{a_n}$ )  
 の計算結果  
 数値積分結果

$\frac{1}{a_n} = 16.0$	9	0.516096156450331814580492370724
	17	0.516367163771402106686551832807
	33	0.516367154787263423888392997323
	65	0.516367154787263409022783019385
	129	0.516367154787263409022783019385 = $I(a_n)$
$\frac{1}{a_n} = 32.0$	9	0.517286919187481805110940607772
	17	0.510554725181398993726008999006
	33	0.510555161862477455425076785967
	65	0.510555161862477578363284380522
	129	0.510555161862477578363284380522 = $I(a_n)$
64.0	9	0.492903907709034796359867720633
	17	0.507285197490050699174082460510
	33	0.507296849421665007753110407302
	65	0.507296849421828423856913542362
	129	0.507296849421828423856913542366
128.0	9	0.469935919122522291461077095722
	17	0.505309230883257541383942012025
	33	0.505675818074325356296044884405
	65	0.505675818220759464188776514715
	129	0.505675818220759464188776434603
256.0	17	0.498519295575467129316797996779
	33	0.504869658994550589163307003325
	65	0.504869783284350616646893485599
	129	0.504869783284350616683406667435
	257	0.504869783284350616683406667435
512.0	17	0.502757924863026962110587583148
	33	0.504496498959719761072494106342
	65	0.504467996743635551322556036855
	129	0.504467996743724416919579153171
	257	0.504467996743724416919579153171
1024.0	17	0.565948492423550543023118840004
	33	0.501771608533805578281126909639
	65	0.504267425963595357900990798601
	129	0.504267421575626908756112232957
	257	0.504267421575626908756112204040
2048.0	33	0.491844131229058480053368596959
	65	0.504182785093730745962759833754
	129	0.504167214652443334457988658654
	257	0.504167214652443330408993871624
	513	0.504167214652443330408993871624
4096.0	33	0.511653308932451950412211095792
	65	0.505047261965715086177025544759
	129	0.504117130339418660154126988448
	257	0.504117131489107701232965184011
	513	0.504117131489107701232965184010
8192.0	65	0.504981835891896652288979714775
	129	0.504088758984631207400450032305
	257	0.504092094998111138616225764918
	513	0.504092094998111134253707035465
	1025	0.504092094998111134253707035465
16384.0	65	0.494288066851982605285805259395
	129	0.504338458751593954942823668249
	257	0.504079577737582517763899454270
	513	0.504079578027262317511955376007
	1025	0.504079578027262317511955376007

( $I(a_0) \sim I(a_n)$ ) に Richardson  
 補外を施した時の結果

2	0.52786402760501652460183798628741
4	0.55278631752382187725324982552333
8	0.52555711516019677152599837294608
16	0.50092982343790387466966140492430
32	0.50153234334564870445834821060301
64	0.50434305898787672842232581401701
128	0.50409137311483966214750135125249
256	0.50406376683004353017363742582940
512	0.50406715781046229227948934841679
1024	0.50406706145097993955915965407695
2048	0.50406706189349806391077623325919
4096	0.50406706190709819012470886054208
8192	0.50406706190692766061756862281603
16384	0.50406706190692837324168217851666

\* 下線部が真値と一致  
 12.3

## 参考文献

- [1] H. Takahasi and M. Mori: Double exponential formulas for numerical integration. Publ. RIMS, Vol. 9 (1974), pp. 721-741.
- [2] 戸田英雄, 小野令美: Double Exponential 変換数値積分公式の有効性を發揮せよための注意. 京都大学数理解析研究所講究録, No. 339 (1978), pp. 74-109.
- [3] D.V. Widder: The Laplace Transform. Princeton Univ. Press, 1941.
- [4] P. Henrici: Applied and Computational Complex Analysis, Vol. II. John Wiley & Sons, 1977.
- [5] A. Zygmund: Trigonometric Series, Vol. I, Vol. II. Cambridge Univ. Press, 1959.
- [6] E. C. Titchmarsh: Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford Univ. Press, 1937.
- [7] 森田繁一, 宇田川銓久, 一松経: 数学公式 I, II, III. 岩波書店, 1957.
- [8] H. Toda and H. Ono: Notes on effective usage of double exponential formulas for numerical integration. 京都大学数理解析研究所講究録, No. 401 (1980), pp. 21-47.