数理解析研究所講究録
第514巻 1984年 92-109

CR(k)法の加速について

図書館情報大学　村田　健郎　（Kenro Murata）

1. はじめに：　ポアッソン方程式

$$div(-k(x)\nabla u) = f(x) \quad , \quad x \in \Omega \subset R^3$$

など、いわゆる自己共役形の方程式，即ち物理的に言うと、移流項のない純拡散の方程式の境界値問題に対しては、ICCG法，[1] あるいはMICCG法[2] があって、40×40×40 の程度の問題ならば分のオーダーで（スーパーコンピュータ S810 なら秒のオーダーで）計算できるようになった。

これからの問題は、移流項のある拡散方程式

$$div(\underbrace{-k(x,u)\nabla u}_{\text{拡散項}} + \underbrace{\mathbb{b}(x,u)u}_{\text{移流項}}) = f(x,u)$$

あるいは

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(-k(x,u)\nabla u + \mathbb{b}(x,u)u) = f(x,u)$$

をどうやって攻めるかである。移流項の無いときとくらべ、あみ目の細かさが強く要求されるので、困難はケタ違いである。原理的には非対称の帯行列Aを係数とする連立一次方程式：

$$Ax = b$$

を1回（線形定常問題）あるいは数十（非線形定常問題），あるいは数千回（線，非線形の非定常問題）解くことになるわけであるが、Aが非対称のためCG法系統の上記の諸方法が適用できない。そのため、$Ax = b$の代りに

$$A^T A x = A^T b$$

に対してICCG/MICCGという方法は論外としても、ひところ注目された'Kershawの方法'[(3)]:「$A = LU - R$（不完全LU）ののち、$L^{-1}Ax = L^{-1}b$，$x = U^{-1}\tilde{x}$ とおき $L^{-1}AU^{-1}\tilde{x} = L^{-1}b$，$B = L^{-1}AU^{-1}$とおき $B^T B\tilde{x} = B^T L^{-1}b$に対しCG法を施す.」程度の工夫ではまだまだ歯が立たない分野が山積している。

そこで、CG法ではないがCG-likeな方法がいろいろ提案され、今や戦国時代の感がある。それらの中で我々も、

- BCG（Biconjugate Gradient）：Fletcher[(4)]
- CR(k)（Conjugate Residual）（Orthomin(k)とも呼ばれる）
- チェビシェフ反復法

に不完全ガウスLUによるPreconditionをほどこした方法を試みてきた。このうち、BCGによるものが汎用性の点では優れているのであるが、何しろ計算時間の負担が、CR(1)でうまく行くときとくらべて大きい。そこで、CR(1)，CR(2)あたりに注目して、Preconditionningの方法を詳しく検討し

ようということにしたのである。以下 CR(k) に不完全ガウス LU による Precondition をほどこしたものを ILUCR(k), それにさらに Gustafsson の流儀の Modification をほどこしたものを MILUCR(k) と略称する。また BCG に基くものを ILUBCG , MILUBCG と略称する。

今日は、ILUCR(1) と MILUCR(1) , またそれぞれに対し粗いあみ目による粗解を使っての初期残差の Precondition をほどこしたときの効果について、ちょっとした試行結果についてお話したい。また、ILUCR(1)/MILUCR(1) と、ILUBCG/MILUBCG の比較例もお目にかけたい。

2　CR(k) 法の基本性質と収束定理

初期残差の Preconditioning がどう利くかを説明するために、Eisenstat の解析結果[5]を流用する。

扱う問題：

$$Ax=f,\quad A=M-R,\quad M=(A+A^T)/2,\quad R=(A^T-A)/2$$

即ち A の対称部を M，歪対称部を −R とする．M は正定値とする．

〔注〕 $R^T+R=0$，従って R の対角項は 0，また R の固有値は 0 か純虚数，そして

$$(x,Rx)=-(x,R^Tx)=-(Rx,x)=-(x,Rx)$$

から $(x,Rx)=0$，従って $(x,Ax)=(x,Mx)>0$ である。

〔算法〕

x_0 をえらぶ ; $r_0 = f - Ax_0$
$p_0 = r_0$; $i = 0$
while $\|r_i\| > eps * \|f\|$ do
  $a_i = (r_i, Ap_i)/(Ap_i, Ap_i)$ {残差ノルムを最小に}
  $x_{i+1} = x_i + a_i p_i$; $r_{i+1} = r_i - a_i Ap_i$ (1)
  $\boxed{\text{Compute } p_{i+1}}$; $i = i+1$ (2)

$\boxed{\text{Compute } p_{i+1}}$ をどうするかによって算法にバリエーションが生れる。

<u>オリジナルCR法</u>(Stiefel, 1955)

$$\begin{cases} b_i = -(Ar_{i+1}, Ap_i)/(Ap_i, Ap_i) \\ p_{i+1} = r_{i+1} + b_i p_i \end{cases} \tag{3}$$

Aが対称かつ正定値なら, CR法はCG法とよく似て、p_0, p_1, … が A^TA 直交 :

$$(Ap_i, Ap_j) = 0 \quad (\forall i \neq j) \tag{4}$$

かつ x_{i+1} は Affine Subspace $x_0 + span(p_0, p_1, \cdots, p_i)$ 上で、残差ノルム :

$$E(w) := \|f - Aw\|_2$$

を最小ならしめるよう働く。特に、(4) とAの正則性から、$p_0, p_1, \cdots$ が一次独立, 従って高々n回で正解に達する。
($\because$ $r_i \neq 0$ なら $p_i \neq 0$, 即ち $p_i = 0$ なら $r_i = 0$ が示される.)

Aが非対称だと (4) は成り立たない。$(Ap_i, Ap_{i-1}) = 0$ が言えるだけで、また x_{i+1} は直線 $x_{i+1} + \alpha p_i$ 上で $E(w)$ を最小

にするだけのことになる。しかし収束は保証される．（後述）

CR(k)法：　p_{i+1} を次式によって定める：

$$\begin{cases} j=i-k+1,\cdots,i \text{ につき } b_j^{(i)} = -(Ar_{i+1}, Ap_j)/(Ap_j, Ap_j) \\ p_{i+1} = r_{i+1} + \sum_{j=i-k+1}^{i} b_j^{(i)} p_j \end{cases} \tag{5}$$

$k=1$ のとき CR 法，$k=i$ のとき GCR 法と呼ぶ。実際には (5) の下段を

$$Ap_{i+1} = Ar_{i+1} + \sum_{j=i-k+1}^{i} b_j^{(i)} Ap_j \tag{6}$$

と書き，$q_j = Ap_j$，$j=i-k+1,\cdots,i+1$ の $k+1$ 本を使う。こうすることによって，ループの中では、Ar_{i+1} の計算だけが、A を掛ける計算となるよう仕向けるのである。

CR(k)法の基本性質

a)　$(Ap_i, Ap_j) = 0$ ，　$j=i-k,\cdots,i-1$ $(i \geq k)$

b)　$(r_i, Ap_j) = 0$ ，　$j=i-k+1,\cdots,i-1$ $(i \geq k+1)$

c)　$(r_i, Ap_i) = (r_i, Ar_i)$

d)　$(r_i, Ar_{i-1}) = 0$

e)　$(r_j, Ap_i) = (r_{i-k}, Ap_i)$ ，$j=i-k,\cdots,i+1$ $(i \geq k)$

f)　if $r_i \neq 0$ then $p_i \neq 0$

g)　$w = x_{i+1}$ のとき $E(w)$ は Affine Space：

$$x_{i-k} + \mathrm{span}(p_{i-k},\cdots,p_i)$$

上で最小になる。

h)　$(Ap_i, Ap_i) \leq (Ar_i, Ar_i)$　（次の定理で使う）

収束定理： CR(k)法は収束する：

$$\frac{(r_{i+1}, r_{i+1})}{(r_i, r_i)} \leqslant 1 - \frac{(\lambda_{min}(M))^2}{\lambda_{max}(A^TA)} \tag{6}$$

（証明）

$$(r_{i+1}, r_{i+1}) = (r_i - a_i Ap_i, r_i - a_i Ap_i)$$
$$= (r_i, r_i) - 2a_i(r_i, Ap_i) + a_i^2(Ap_i, Ap_i)$$

a_iの作り方から $= (r_i, r_i) - \dfrac{(r_i, Ap_i)^2}{(Ap_i, Ap_i)}$ となり、

$$\frac{(r_{i+1}, r_{i+1})}{(r_i, r_i)} = 1 - \frac{(r_i, Ap_i)}{(r_i, r_i)} \cdot \frac{(r_i, Ap_i)}{(Ap_i, Ap_i)} \tag{7}$$

c)により， $= 1 - \dfrac{(r_i, Ar_i)}{(r_i, r_i)} \cdot \dfrac{(r_i, Ar_i)}{(Ap_i, Ap_i)}$ (8)

h)により， $\leqslant 1 - \dfrac{(r_i, Ar_i)}{(r_i, r_i)} \cdot \dfrac{(r_i, Ar_i)}{(Ar_i, Ar_i)}$ (9)

$$= 1 - \left[\frac{(r_i, Ar_i)}{(r_i, r_i)}\right]^2 \frac{(r_i, r_i)}{(Ar_i, Ar_i)} \tag{10}$$

$(r_i, Ar_i) = (r_i, Mr_i)$であったから レーリー商の性質からこれで証明を終る．（以上 Eisenstat(5) ）

3　さて、証明の最後の式 (10) において、Mの固有値，固有ベクトルを λ_j, v_j とし、r_iをMの固有ベクトル v_j によって展開： $r_i = \sum_j c_j v_j$ して、

$$\frac{(r_i, Ar_i)}{(r_i, r_i)} = \frac{(r_i, Mr_i)}{(r_i, r_i)} = \frac{\sum c_j^2 \lambda_j}{\sum c_j^2}$$

もし $c_1 \fallingdotseq 0$, $c_2 \fallingdotseq 0$, …, $c_{l-1} \fallingdotseq 0$ なら上式は $\fallingdotseq \dfrac{c_l^2\lambda_l + \cdots + c_n^2\lambda_n}{c_l^2 + \cdots + c_n^2} \geqslant \underset{\sim}{\lambda_l}$

となり、

$$(r_{i+1}, r_{i+1})/(r_i, r_i) \underset{(およそ)}{\leqslant} 1 - (\lambda_l(M))^2/\lambda_{max}(A^TA) \tag{11}$$

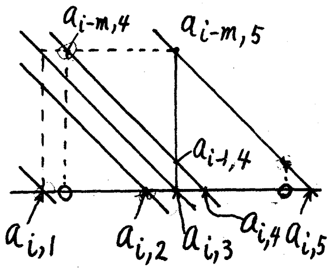
Aばかりでなく、$r_0 = f - Ax_0$ の x_0 を、粗いあみ目による粗解から求めることによって r_0 も Precondition して、$c_1 \fallingdotseq 0$, $\cdots$, $c_{\ell-1} \fallingdotseq 0$ ならしめておけば、收束は速くなるであろう.

以上が私の思惑の説明である。

4 ILUCR/MILUCR のための不完全ガウス LDU

もとの不完全ガウス（ICCG(1,1)に相当するもの）

$$\begin{cases} \tilde{a}_i = a_{i,3} - a_{i,2} \cdot a_{i-1,4}\,\tilde{d}_{i-1} - a_{i,1} \cdot a_{i-m,5}\,\tilde{d}_{i-5} \\ \tilde{d}_i = \tilde{a}_i^{-1} \end{cases}$$



（右図参照）

- A が M 行列なら $\tilde{a}_i > 0$ である。

（A の第 i 行を $a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}, a_{i,5}$ とし、L, U の非対角はもとのまゝ, L, U の対角を $\tilde{a}_i$, D の対角を $\tilde{d}_i$ としている.）

このように作った L, D, U を使うのが ILUCR(1) である. 但し、今回はこのやり方の三次元版を試みた。次いで、これに Gustafsson 流の補正をほどこす. 即ち $\tilde{a}_i$ を次式による：

$$\tilde{a}_i = (1+\varepsilon)\, a_{i,3} - a_{i,2} \cdot a_{i-1,4}\,\tilde{d}_{i-1} - a_{i,1} \cdot a_{i-m,5}\,\tilde{d}_{i-5}$$
$$\underbrace{- a_{i,1}\, a_{i-m,4}\,\tilde{d}_{i-m} - a_{i,2} \cdot a_{i-1,5}\,\tilde{d}_{i-1}} \quad .$$

〜〜のものを追加しただけでは、もとの行列がせっかく M 行列であっても、不完全 LDU 分解の安定性や正則分離性が保証されないから、対角項 $a_{i,3}$ に $(1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ を掛けることによって補償するのである。今回は、次のものを調べた：

$\varepsilon = \theta h^2$ （$\theta = 0, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 300, 400, 500, 1000, 2000$）

注意事項

(1) 行列をM行列になるよう仕向ける必要がある。ひとつの目安は、セル・ペクレ数を1以下に抑えることである。そのため、粗いあみ目による粗解を求める段が特に問題で、そのときには'パラメータ入り風上差分'によって強制的にM行列化すべきである。(附記参照)

(2) 斉次固定の境界値問題，移流項一定という、よく使われるテスト問題でうまく行っても安心できない。たとえば、

$$(-k\nabla u + \mathbb{b}(x)u)\cdot n = \beta \quad , x \in \Gamma_2$$

形の境界があるときには注意が要る。境界と交叉する$\mathbb{b}(x)$の成分があるとき特に問題である。また、$\mathbb{b}(x)$，$x \in \Omega$ の空間的変動が大きいと、これまた問題である。(附記参照)

(3) 中心差分のときは，M行列になっているかどうかを正確にチェックすることが容易でない。(逆行列が非負であるかどうかが判らない。) 従って Gustafsson 流の補正を行なうときのθ値としては、いつでも大き目の値をえらぶべきである。(セル・ペクレ数 0.5 におさえた上で、$\theta > 300$ という例がある。このあたり検討が進んでいない。)

まだ甚だ初歩的段階であるので心苦しいが、ともかく、取得したデータをお目にかけよう。

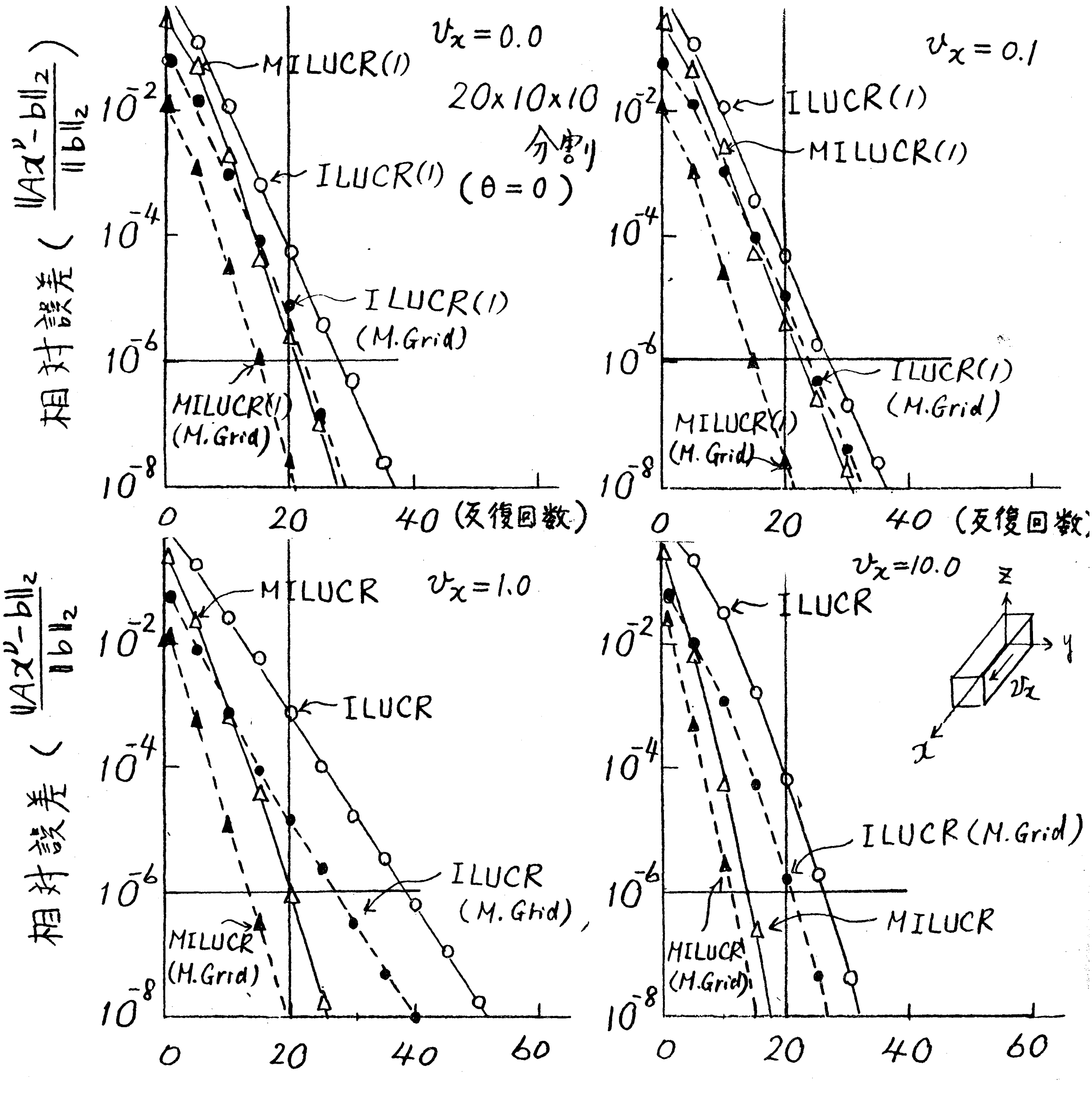
4 テスト問題とデータ.

4.1 粗い網目による初期残差の Precondition の効果.

問題　一様流れ場における熱拡散問題　（風上差分）

$$-\Delta u + v_x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (v_x \text{ 一定})$$

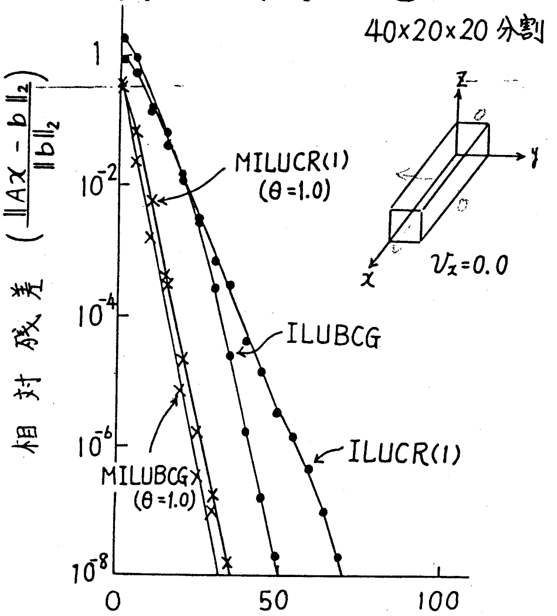
（実線が何もしないとき，点線が粗メッシュによる Precondition を行ったもの。）

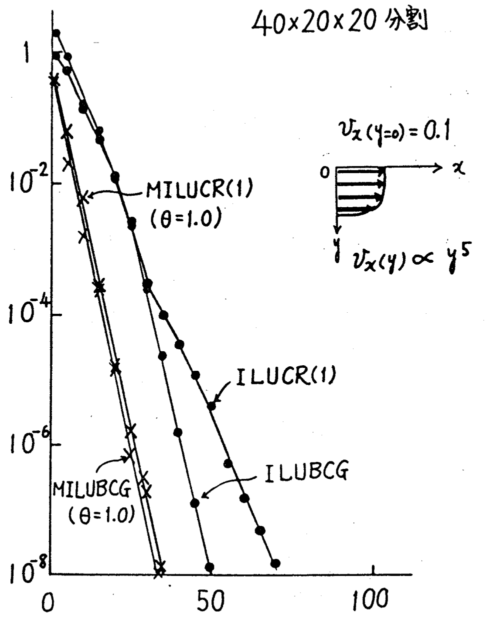


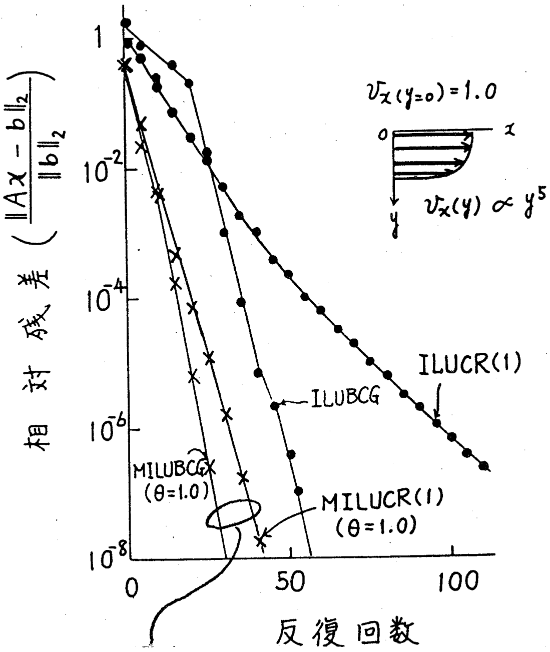
4.2 ILUCR(1)/MILUCR(1) とILUBCG/MILUBCG の比較

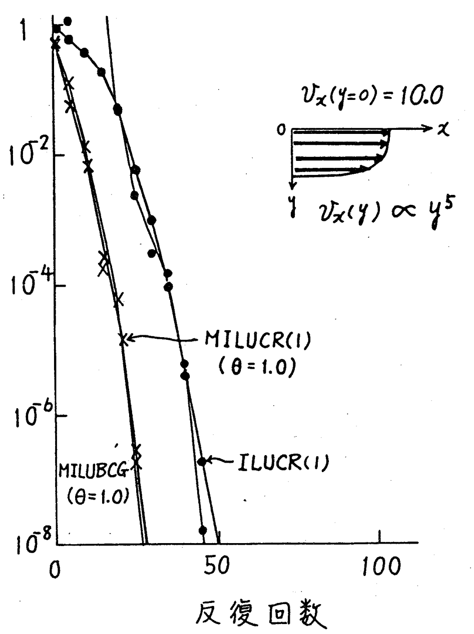
すべて風上差分，$\theta = 1$，$v_x \propto y^5$ のもの.

1反復当りの計算時間比 MILUBCG/MILUCR(1) = 1.7，50回反復のとき MILUBCG/MILUCR(1) はM280Hにて 22.7秒/13.3秒。結局MILUCR(1)がもっとも速い。









この場合でもMILUCR(1)の方が速い。
(但し、10^{-12}点では逆転する。)

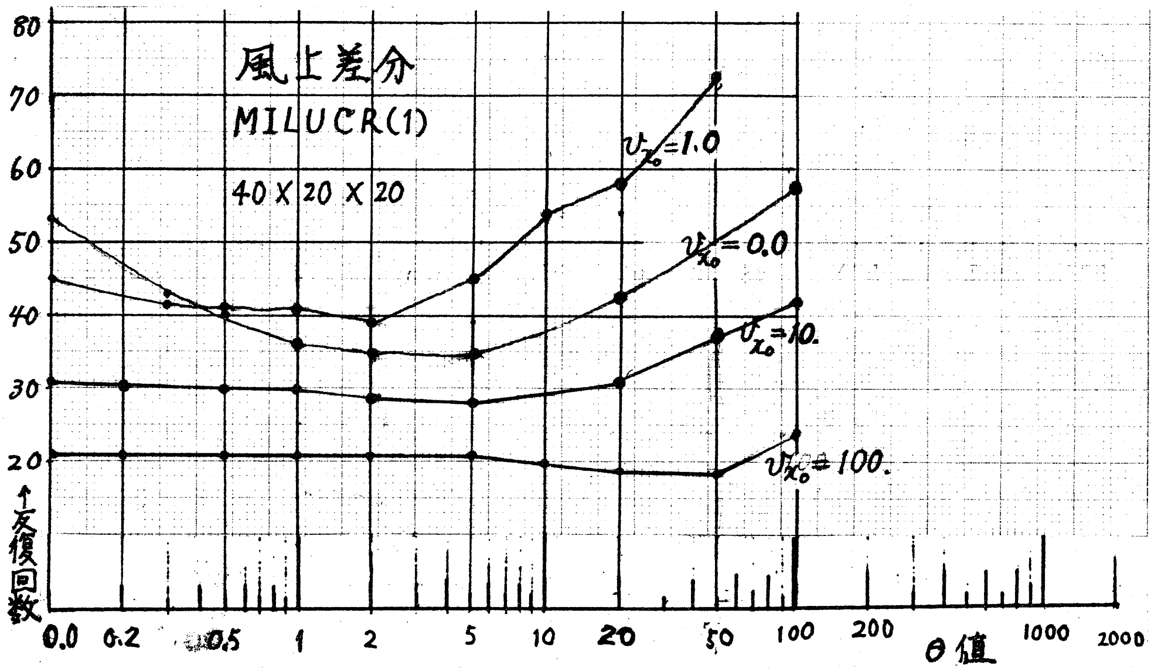
4.3　MILUCRにおけるθ値について、

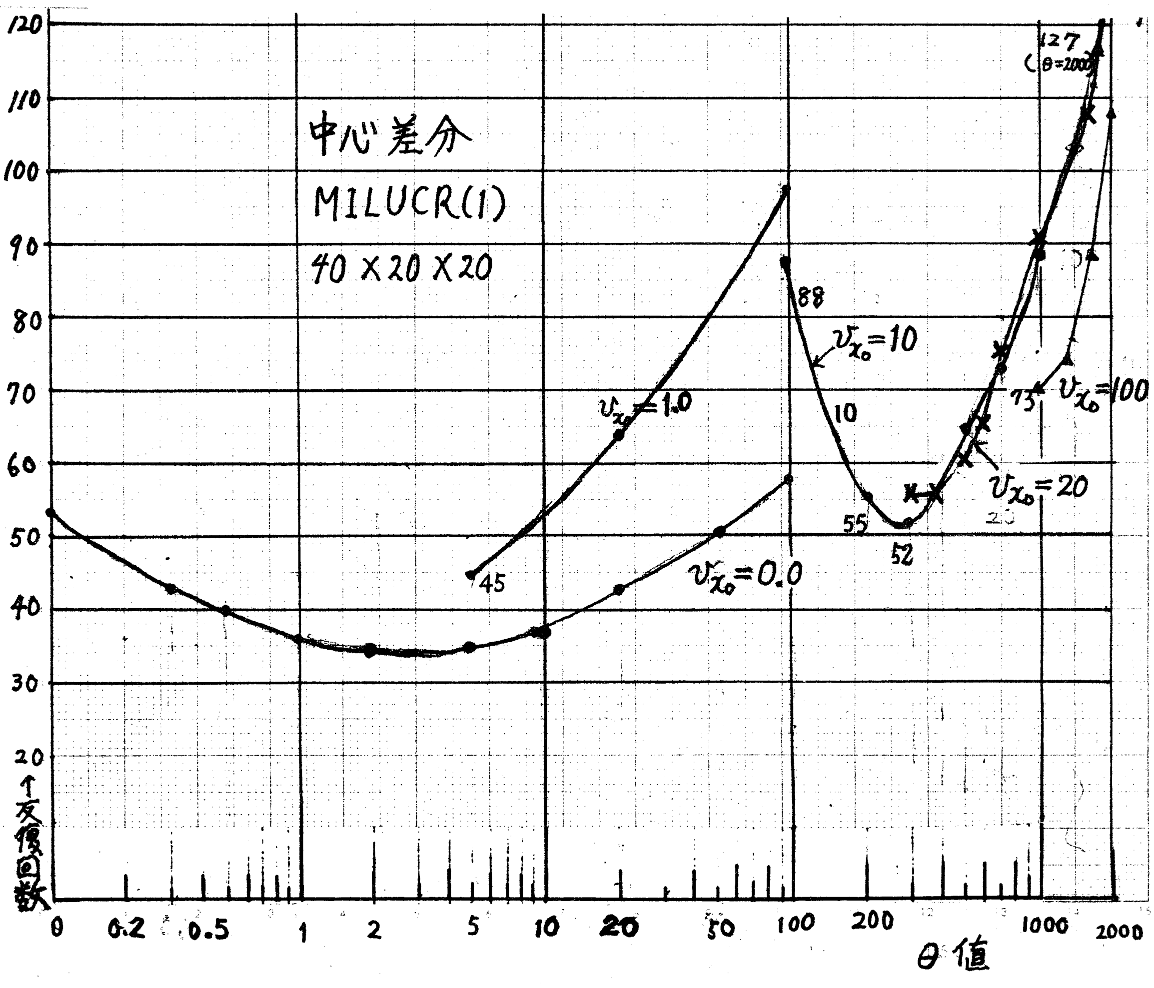
Gustafsson流の補正を行うにあたり、M行列であることと正則分離であることを要求するために、a_{ii}の頭に$1+\theta h^2$を掛けた。40×20×20の場の問題に対し$h=1/40=0.025$を使ったが、θ値についてはどうであろうか、次頁に示すように、風上差分の場合には、$0.2<\theta<20$という広い範囲にわたって大差無い結果を得ているが、中心差分の場合には問題である。セル・ペクレ数を抑えればよいというわけには行かない。テスト例の$v_x \propto y^5$という、壁際のv値の急変のある問題：40×20×20，$v_{x_0}=10$の場合，セル・ペクレ数は0.25となっていて十分小さいにもかゝわらず、$\theta \geqq 100$にせねばならず、θの最適値は300であった。$v_{x_0}=20$のときは$\theta \geqq 300$にせねばならず，θの最適値は350であった。このようにθ値の下限と最適値が近接しているのでは、実用上θを最適値の近くに設定することは困難である。因みに今の例の場合，

$\theta_{inf}:=\theta$の下限，$\theta_{opt}:=\theta$の最適値，$\theta_2:=\theta_{opt}$での反復の2倍となるθ値とするとき，下表のようになる。(( )内はそのときの反復回数)

$v_{x_0}=10$：	$\theta_{inf}=100$(88回)，$\theta_{opt}=300$(52回)，$\theta_2=1400$(104回)	$\theta_2/\theta_{inf}=14$
$v_{x_0}=20$：	$\theta_{inf}=300$(56回)，$\theta_{opt}=350$(56回)　$\theta_2=1600$(112回)	$\theta_2/\theta_{inf}=5.3$

風上差分のときは問題ないが、精度のよい中心差分を行ないたい場合，補正項$1+\theta h^2$をもっと工夫せねばなるまい。

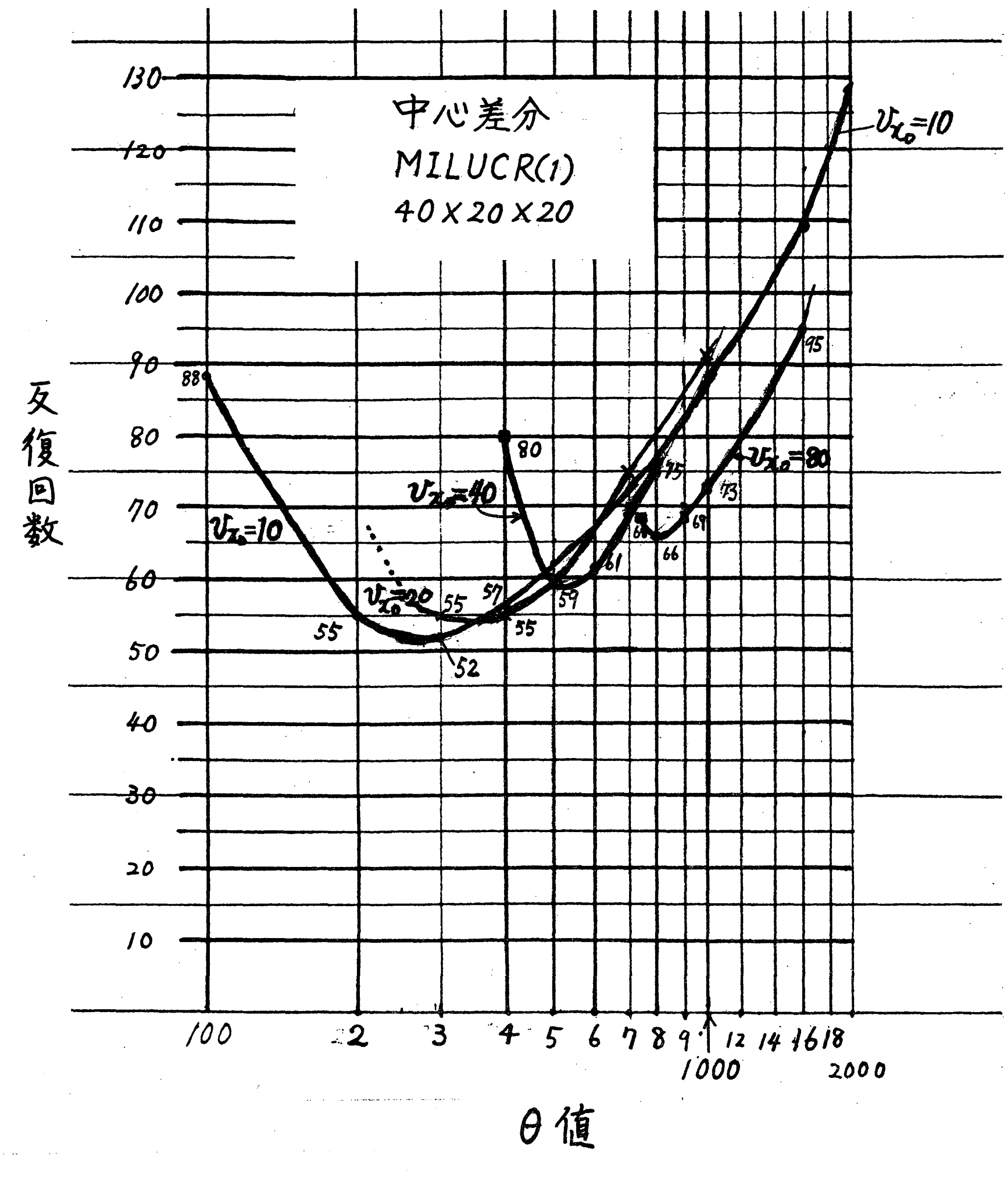

風上差分
MILUCR(1)
40×20×20
v_{x_0}=1.0
v_{x_0}=0.0
v_{x_0}=10.
v_{x_0}=100.
↑反復回数
θ値
0.0 0.2 0.5 1 2 5 10 20 50 100 200 1000 2000
20 30 40 50 60 70 80


中心差分
MILUCR(1)
40×20×20
v_{x_0}=1.0
v_{x_0}=0.0
v_{x_0}=10
v_{x_0}=20
v_{x_0}=100
127 (θ=2000)
88
45
55
52
73
↑反復回数
θ値
0 0.2 0.5 1 2 5 10 20 50 100 200 1000 2000
20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120

補記：下に示すのは、中心差分による MILUCR(1)で、v_{x_0} = 10，20，40，80 についてのものである．

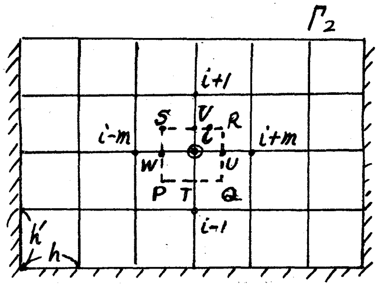
（前頁下段右側のものと一部重複）

v_{x_0} 値（即ちペクレ数）が増すと共に $\theta_{opt}/\theta_{inf}$ が1に近くなって、応用上差しつかえがある様が見られよう。



4.4 附記 M行列になる，ならないの問題．

簡単のため、長方形の場に対する'積分による差分法'の場合について調べる。



問題 $\mathrm{div}(-k(x)\nabla u+\mathbf{b}(x)u)=f$

$$u=0 \quad \text{on } \Gamma_1$$

$$(-k(s)\nabla u+\mathbf{b}(s)u)\cdot\mathbf{n}=\beta(s) \quad \text{on } \Gamma_2$$

基礎式は $\int_\Gamma(-k(x)\nabla u+\mathbf{b}(x)u)\cdot\mathbf{n}\,ds=\int_\Omega f(x)\,dx$ (1)

簡単のため $k(x)=1$，$x\in\Omega$ とする。中心差分の場合，

$\int_{PQ}$ の近似式：$\left(-\dfrac{u_i-u_{i-1}}{h'}\cdot h+b'_T\dfrac{u_i+u_{i-1}}{2}h\right)\cdot(-1)$

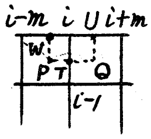
$\int_{QR}$ の近似式；$\left(-\dfrac{u_{i+m}-u_i}{h}h'+b_U\dfrac{u_i+u_{i+m}}{2}h'\right)\cdot(+1)$

$\int_{RS}$ の近似式；$\left(-\dfrac{u_{i+1}-u_i}{h'}h+b'_V\dfrac{u_i+u_{i+1}}{2}h\right)\cdot(+1)$

$\int_{SP}$ の近似式；$\left(-\dfrac{u_i-u_{i-m}}{h}h'+b_W\dfrac{u_i+u_{i-m}}{2}h'\right)\cdot(-1)$

$\mathbf{b}=(b,b')$ としている。簡単な $\mathbf{b}$ 値一定の場合、内点に関する式は、<u>$h=h'$ のとき</u>

$$\boxed{\left(-1-\frac{bh}{2}\right)u_{i-m}+\left(-1-\frac{b'h}{2}\right)u_{i-1}+4u_i+\left(-1+\frac{b'h}{2}\right)u_{i+1}+\left(-1+\frac{bh}{2}\right)u_{i+m}=f_ih^2} \quad (2)$$



Γ_2 上の方程式は特別である。$\int_{PQ}$ は上と同じ。$\int_{QU}$，$\int_{WP}$ は積分するときの辺長が半分になる。$\int_{UW}$ は、Γ_2 上の境界条件によって定数となる。結局，

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2}-\frac{bh}{4}\right)u_{i-m}+\left(-1-\frac{b'h}{2}\right)u_{i-1}+\left(2-\frac{b'h}{2}\right)u_i+0\,u_{i+1}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{bh}{4}\right)u_{i+m}=-\beta h+f_ih^2} \quad (3)$$

(2), (3) 式から $|bh/2|<1$, $|b'h/2|<1$ がM行列となるための必要条件である。（セル・ペクレ数が2より小）もし Γ_2 上で $b'=0$ ならば、$B:=I-D^{-1}A$ とおくとき、

$$\rho(B) \leqq \|B\|_\infty < 1$$

となって、それが十分条件にもなるが、b' が Γ_2 上で正値をとるときは尼介である。

次に $b(x)$ 値に場所による変化があるときは、(2)式の u_i の係数が、4ではなく、

$$\left(4-\frac{b'_T h}{2}+\frac{b'_V h}{2}+\frac{b_U h}{2}-\frac{b_W h}{2}\right) \tag{4}$$

となる。従って、隣接するあみ目間の速度差が大きければ大きいだけ、4以外の項が大きく残り、それらが負の値を示すとき尼介である。(Γ_2 上では、$2-\frac{b'_T h}{2}+\frac{b_U h}{4}-\frac{b_W h}{4}$)

M行列でないと困るので、風上差分がしばしば使われる。一つのやり方は、(2)に対して，例えば b, b' 共に正のとき (2)の左辺を次のように直すというものである．$0<\theta\leqq 1$ として、

$$\left(-1-\frac{bh}{2}\right)u_{i-m}+\left(-1-\frac{b'h}{2}\right)u_{i-1}+\left(4+\theta\cdot\frac{b+b'}{2}h\right)u_i+\left(-1+\frac{(1-\theta)b'}{2}h\right)u_{i+1}$$
$$+\left(-1+\frac{(1-\theta)b}{2}h\right)u_{i+m}$$

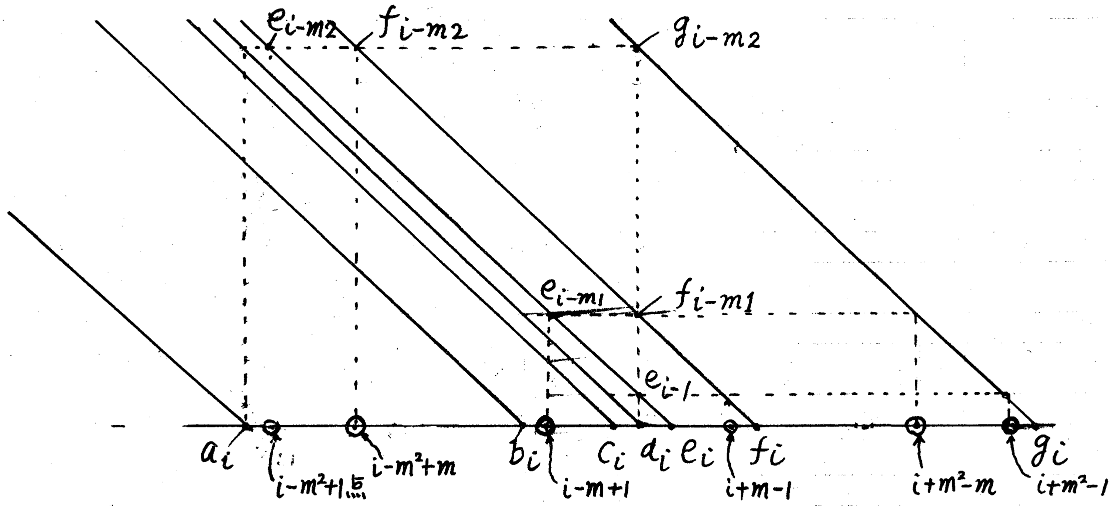
$\theta=0$ のとき中心差分，$\theta=1$ のときが風上差分である。

$$-1+\frac{(1-\theta)b'}{2}h<0 \quad , \quad -1+\frac{(1-\theta)b}{2}h<0$$

となるよう θ をえらぶ，というのがひとつの指針である。

4.5 附記　3次元用不完全LU分解について．

下図のように中心行を命名する．



$$w = (1+\theta h^2)d_i - a_i g_{i-m2}\tilde{d}_{i-m2} - b_i f_{i-m1}\tilde{d}_{i-m1} - c_i e_{i-1}\tilde{d}_{i-1}$$

$$\left.\begin{aligned} &- a_i e_{i-m2}\tilde{d}_{i-m2} - a_i f_{i-m2}\tilde{d}_{i-m2} - b_i e_{i-m1}\tilde{d}_{i-m1} \\ &- c_i f_{i-1}\tilde{d}_{i-1} - b_i g_{i-m1}\tilde{d}_{i-m1} - c_i g_{i-1}\tilde{d}_{i-1} \end{aligned}\right\} *$$

$$\tilde{d}_i = w^{-1}$$

＊項がGustafsson流の補正項である。これらは負になるから，$w>0$ を保持するために d_i の係数に（$1+\theta h^2$）を置くのである。今回のように断面が正方形の場で、あみ目が、

$m \times m \times n$　（テスト例では $m=20$，$n=40$）

の場合，もとの中心番方程式の左辺を、

$$a_i x_{i-m^2} + b_i x_{i-m} + c_i x_{i-1} + d_i x_i + e_i x_{i+1} + f_i x_{i+m} + g_i x_{i+m^2}$$

と書くとき、ILUCRにおける LDUx を作ると，x_{i-m^2+1}，x_{i-m^2+m}，x_{i-m+1}，x_{i+m-1}，x_{i+m^2-m}，x_{i+m^2-1} の各項に上記＊の＋符号の項をその順に掛けたものがあらわれる。それを補正した。

5 おわりに

以上，データのとり方が甚だ粗くて心苦しいが、若干の推測も交えて次のようにまとめておこう：

1 初期残差の、粗いあみ目による Preconditionning については、20×10×10，流速一定という簡単な問題に対し、$\theta=0.0$ の風上差分についてやって見ただけゆえ大きなことは言えないが、このような素性のよい問題に対しても、3割程度は速くなる，ということである。素性のよくない問題に対しては、（もとが悪いから）もっとよく利くと期待したい。

2 Gustafsson 流の補正は、（風上差分に対しては問題なく）効果が著しい。ILUCR(1)では、ときに収束が甚だしくおそくなることがあるが、MILUCR(1)にすると、そういうバラツキが非常にすくなくなり、反復回数で見て MILUBCGに近い値を示す。残差の相対ノルムで見て 10^{-8} 程度でよければ、総時間で見て MILUBCG に劣るケースは今まで経験していない。

中心差分を採用したいときには、θ 値の選定のための指針をどう与えるかについて、あるいはもっと一般に a_{ii} の頭につける $1+\varepsilon$ 項の作り方について、これから大いに検討する必要がある。純中心差分でなく，'パラメータ付中心差分'も検討する必要があるかもしれない。現状の $1+\theta h$ 法だけでは、よほどセルペクレ数を小さくとらない限り、θ の範囲がせま

くて、実用上差しつかえる。

3　精しい（最終の）あみ目上で、精度のよい中心差分を行いたい場合には、粗いあみ目上での計算をどうしたらよいか、大いに問題である。ここでも、パラメータつき中心差分すなわち風上差分と中心差分の中間の差分を起用する必要があろう。

以上，今回の研究に関し、プログラム作成とデータ取得については、日立製作所ソフト工場，後保範氏をわずらわした。ここに深謝したい。

参考文献

1) Meijerink, Van Der Vorst　J. Compt. Phys. 44 (1981) 134-155

2) Gustafsson　BIT, 18 (1978) 142-156

3) Kershaw　J. Compt. Phys. 26 (1) (1978) 43-65

4) Fletcher　In Lecture Note in Math. Vol 506 (1975) Springer

5) Eisenstat, Elmán & Schultz　SIAM J. Numer. Anal. 20, 2 (1983) 345 — 357 .