数理解析研究所講究録
第517巻 1984年 12-23

Diophantus不等式 $|\lambda_1 x_1^2+\cdots+\lambda_4 x_4^2|<\varepsilon$ の可解性について

山梨大学　中井喜信 (Yoshinobu Nakai)

実数係数不定値の2次形式 $Q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$) について
「[?] $\forall\varepsilon$ 実数 >0, $\exists ?\ \mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n(\neq 0)$ s.t. $|Q(\mathbf{x})|<\varepsilon$」
のようなDiophantus不等式を扱いたい。もし $Q(\mathbf{x})$ が、有理数係数ならば、ε がある程度小さくなると、不等式を解く事は、Diophantus方程式 $Q(\mathbf{x})=0$ を解く事と同じになり、これは $Q(\mathbf{x})$ の「対角化」を行う事により、十分にくわしく調べられて来ている。一方 $Q(\mathbf{x})$ が真に実数係数のままのとき、つまり、$\forall\alpha$ 実数$(\neq 0)$ について $\alpha Q(\mathbf{x})$ は整数係数にならない (Oppenheim (1931) の "incommensurable") とき、有理数係数の場合の手法はそのままでは使えなくなる。そこで問題は二つに分れて、

「[?(*)] $\exists ?\ n_0$ s.t. $\forall n\geq n_0$, $\forall Q(\mathbf{x})$ (incommensurableな)不定値実数係数2次形式, $\forall\varepsilon$ 実数 >0, $\exists\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n(\neq 0)$ s.t. $|Q(\mathbf{x})|<\varepsilon$.」

というタイプの問題と, $Q(\mathbf{x})$ に一定の制限をつけて, 例えば

「[?(**)]　(?(*))について、$Q(\mathbf{x})$ は「additive type (x_i, x_j 達に cross-terms が出て来ないもの)」に制限した場合」というタイプの問題に分れる。更には、解の分布，性質などで問題は発展してゆくが、まず上記のように考えてみる。

一般には [?(*)] の n_0 は 5 で良かろうというのが「Oppenheim の予想 (1931) であるが今の所 Birch-Davenport-Ridout の $n_0 = 21$ が記録のようである。整数係数の方は古典的な Meyer の $n_0 = 5$ の結果がある。[?(**)] の方は、Davenport-Heilbronn (1946) で $n_0 = 5$ は十分というのが、Hardy-Littlewood が、Diophantus 方程式を扱うために開発した「circle method」を発展させた方法と、Diophantus 同時近似についての簡単なしかし決定的な lemma とを使い、示された。一方 $a_1x_1^2+\cdots+a_4x_4^2=N$ の形の Diophantus 方程式を扱うのに、Kloosterman (1926) は、いわゆる「Kloosterman 和」を non-trivial に評価する事により、解の個数に関する漸近公式の期待される主要項に比しても trivial に Kloosterman 和を評価すると誤差項になるべき部分が同程度の order を有してしまうという困難を切り抜けた。その後、4変数の additive 型の不等式について、Watson (1953) は Pell 方程式の解を上手に利用して、特定の形の係数を有する $Q(\mathbf{x})$ について、Diophantus 不等式の可解性を示した。(Watson は、同時に3変数の例も示している。) 次に、Iwaniec (1977)

は、彼の篩を用い $Q(x) = (x_1^2 + x_2^2) - \theta\cdot(x_3^2 + x_4^2)$ (θ:実数の無理数 >0) について Diophantus 不等式の可解性を示した。そこでは $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のノルムの性質が利用されている。そこで Davenport-Heilbronn の手法で Kloosterman 和の事をからめて $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_4 x_4^2$ (不定値, incommensurable) が扱えないであろうかと考えられるが、$\lambda_1, \cdots, \lambda_4$ に連分数の言葉で述べられる制限をかなり厳しくつければ「yes」であるという事を説明するのがこの稿の目的である。結局最大の neck は『積分用の変数 α および λ_i 達の「近似分数」(連分数の用語)がわかれば $\lambda_i\alpha$ の近似分数がわかるか』という事になるが、それがある意味で「わかる」という事(後記(Λ), (Λ)′ 参照)である。期待としては、$n_0 = 4$ で [?(x)] は肯定的であり、$n = 3$ では [?(x)] は $Q(x)$ の分類(肯定的に解けるような $Q(x)$ の特徴づけ)如何という事になるであろう。3変数については、Watson の例以外にはないようである。4変数については、後記(Λ) を(ト)で使用するとき、何か"実数係数の場合に Singular Series の役をする項"をとり出すべき事になるであろうと期待している。従ってその"項"の性質によっては、7行上に記した $n_0 = 4$ の場合の期待も $Q(x)$ の分類問題に帰するかもしれない。多分、Kloosterman 和に関する Linnik 予想 (Kuznecov 参(1981)) が解決される

程度に応じて 後記 Corollary の $\Lambda(\eta_1,\cdots,\eta_4)$ 中の ⊛ の $\bar{U}_1 < Q^{0.03}$ や $\bar{U}_3, \bar{U}_4 < p^{0.03}$ などは 改良されるはずで（ここでは、Weil の合同ゼータ関数のリーマン予想の解決を利用した $\left|\sum_{x} \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\frac{ax+b\bar{x}}{p}\right)\right| < 2p^{\frac{1}{2}}$（$p$ 素数, $x=1,2,\cdots,p-1$, $x\bar{x}\equiv 1 \bmod p$, $p\nmid(a,b)$）ではなく、旧い Kloosterman の $\ll p^{\frac{3}{4}}$ を利用した評価）、少くも

$$|\lambda_1\lambda_2^{-1}| = a_0 + \frac{1}{|a_1} + \frac{1}{|a_2} + \frac{1}{|a_3} + \cdots \qquad \left(\begin{array}{l} a_0\in\mathbb{Z}, \\ a_1, a_2, a_3, \cdots \in \mathbb{N}\end{array}\right)$$

が、$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$, $q_0 = 1$, $q_{-1} = 0$ とおいて、

$$\limsup_{k\to\infty} a_k (\log q_k)^{-c_0} = +\infty \qquad (c_0 \text{は適当な正定数})$$

ならば、本質的に、ここに述べると同じ原理で扱えると思われる。しかし（Linnik 予想が最良の意味で解決されたとき）

$$\limsup_{k\to\infty} a_k < +\infty \qquad (\text{例えば})$$

のときに、上記の「Singular Series のような項」が期待するような形に現れるかを見たいものである。３変数については circle method は無力のように見える。Goldbach（２ケの）の場合によく扱われる「almost all 流」の手法もないのであろうか。

§8.「系」　（((0.2.1)) 等はタイプ原稿の節番号．）

最初から系では妙だが、タイプ原稿 [N] で、複雑な条件を有する $\lambda_1,\cdots,\lambda_4$ についての定理の系として下記の系を得たので。まず $\nu(x)$ は整数の相異素因子数とし、いま $\eta_1,\cdots,\eta_4$ を $=\pm 1$ で $\eta_1,\cdots,\eta_4$ は同符号でないものの組とし

て。

$$\Lambda(\eta_1,\cdots,\eta_4) \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} (\lambda_1,\cdots,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4 \text{ s.t. } \lambda_i\neq 0,\ \mathrm{sgn}\,\lambda_i=\eta_i, \\ \qquad \lambda_1 \text{ 無理数}, \\ \qquad \lambda_2=\eta_2\ (=\pm 1) \leftarrow (\text{これは statement を簡単にするため}), \\ |\lambda_1| \text{ の相続く近似分数 } v_1/\sigma_1,\ R/Q,\ (1\le v_1<Q) \\ |\lambda_3| \text{ の近似分数 } v_3/\sigma_3, \\ |\lambda_4| \text{ の近似分数 } v_4/\sigma_4 \\ \text{による組 } (R/Q,\ v_1/\sigma_1,\ v_3/\sigma_3,\ v_4/\sigma_4) \text{ で下記の} \\ \text{条件 (☆) を満すものが無限に存在すること} \end{array} \right\}$$

とおく。ただし条件(☆)は（便宜上 $\sigma_2=v_2=1$ とおいて）

$$(☆)\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1, v_1 \text{ は } \left\{ \begin{array}{ll} e^{(\log Q)^{\frac{1}{3}}} < \sigma_1 < Q^{0.03}, \\ \nu(\sigma_1 v_1) < (\log Q)^{\frac{1}{4}}, \\ \exists p \text{ 素数 s.t. } p_1^{(\text{奇数巾})} \,\|\, \sigma_1 \ \&\ p_1 > (\log Q)^{0.26} \end{array} \right. \\ v_3/\sigma_3,\ v_4/\sigma_4 \text{ は } \quad P = \left(Q\sigma_1 (\log Q)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ とおいて} \\ \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left| |\lambda_i| - v_i/\sigma_i \right| < \dfrac{1}{P^2 (\log P)^{\frac{1}{2}}}, \\ \nu(v_i\sigma_i) < (\log Q)^{\frac{1}{4}}, \\ \lambda_i \text{ が無理数なら } (\log Q)^{\frac{1}{2}} < \sigma_i < P^{0.03}, \\ \lambda_i \text{ が有理数なら } |\lambda_i| = v_i/\sigma_i \end{array} \right. \quad (i=3,4) \\ \text{かつ} \\ \qquad \left\{ \begin{array}{ll} (\sigma_{i_1}, v_{i_2}) = 1 & i_1, i_2 = 1,\cdots,4 \\ (\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}) = 1 & i_1, i_2 = 1,\cdots,4,\ i_1\neq i_2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

である。$\Lambda(\eta_1,\cdots,\eta_4)\neq\phi$ については後述する。このとき

「[系] $\eta_1,\dots,\eta_4=\pm1$ (同符号ではない) に対し $\exists C, C_i'', C_i'$ (正の絶対定数),

s.t. 「$\forall\varepsilon>0$, $\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_4)\in\Lambda(\eta_1,\dots,\eta_4)$, $\exists P_0$

s.t. 「 $P>P_0$ (Pは⊛にあるもの)

ならば

$$\#\left\{(x_1,\dots,x_4)\in\mathbb{N}^4 ;\ C_i'|\lambda_i|^{-\frac{1}{2}}P < x_i < C_i''\cdot|\lambda_i|^{-\frac{1}{2}}P,\ |\lambda_1x_1^2+\dots+\lambda_4x_4^2|<\varepsilon\right\}$$

$$\geq C\cdot\varepsilon\cdot(\max_i|\lambda_i|)^{-2}P^2$$

」」

」が成立する。((C.2.1))

最後の所は $\geq C\cdot\varepsilon\,|\lambda_1\cdots\lambda_4|^{-\frac{1}{2}}P^2$ と書きたい所だが証明の都合でそうならなかった。(今春の広島大学での数学会の代数学分科会アブストラクト、筆者の P_0 は位置が書き間違い。)

上記 $\Lambda(\eta_1,\dots,\eta_4)$ が、十分沢山に $(\lambda_1,\dots,\lambda_4)$ を含む事は次のように構成できる。連分数論においてよく知られた

「[Lemma] 実数 $\beta\,(>0)$ と既約分数 P/Q について $|\beta-P/Q|<(2Q^2)^{-1}$ ならば、P/Q は β の正則連分数展開による近似分数の一つである。」

を利用する。今条件(i)の v_1/u_1, R/Q があるとして u_1^0, v_1^0 を相異る素数で $u_1^0>\exp(Q^{700})$, $v_1/u_1\leq v_1^0/u_1^0\leq R/Q$,

$|R/Q-v_1^0/u_1^0|<(2Q^2)^{-1}$ ととれば、v_1^0/u_1^0 は R/Q を近似分

数の一つとしている。次に V^0_{1*}/U^0_{1*} を $U^0_1 V^0_{1*} - V^0_1 U^0_{1*} = \pm 1$, $U^0_1 > U^0_{1*} \geqq Q$, $V^0_1/U^0_1 \gtrless V^0_{1*}/U^0_{1*} \gtrless R/Q$ととり（$V^0_{1*}/U^0_{1*} = R/Q$ かもしれない）、$a^0_1 \in \mathbb{N}$ を $R^0 = a^0_1 V^0_1 + V^0_{1*}$, $Q^0 = a^0_1 U^0_1 + U^0_{1*}$ が $\exp((\log Q^0)^{\frac{1}{3}}) < U^0_1 < Q^{0\,0.03}$ となるようにとると、R^0/Q^0, V^0_1/U^0_1, R/Q, V_1/U_1 が得られる。再び V^0_1/U^0_1, R/Q から上の事をくり返す。このようにして一つの Cauchy 列 V_1/U_1, R/Q, V^0_1/U^0_1, R^0/Q^0, …… を得て、これの定める実数が $|\lambda_1|$ の役を果せる。$|\lambda_3|$, $|\lambda_4|$ についても同じように構成してゆける。((0.2.1.2))

§ 証明に必要な主な事を述べる。各々正確に書くと長すぎるので、くわしくはタイプ原稿[N]を参照されたい。

イ) 2頁目に Davenport-Heilbronn の説明の所で述べた Diophantus 同時近似の lemma とは別のものであるが、その発展形として、

[Prop.] $\forall c_1\,(>1)$, $\forall \varepsilon_1\,(>0)$, $\exists h_1\,(\gg 1)$, $\exists h_1'\,(\gg 1)$, $\forall E_{100}\,(\gg 1)$, $\exists P_1$ s.t. 「λ_1, λ_2 実数 >0, $\lambda_1\lambda_2^{-1}$ 無理数, $|\lambda_2| \asymp E_{100}$,

$\lambda_1\lambda_2^{-1}$ の近似分数 R/Q ($R, Q \in \mathbb{N}$, $(R, Q) = 1$)

について、

P は $Q^{\frac{1}{2}}(\log Q)^{h_1'} \leq P \leq Q^{c_1}$, $P > P_1$,

H は $P \gg H \gg (\log P)^{h_1}$

とするとき、

$$\text{measure of}\left\{\begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R} \text{ s.t. } (\log H)^{-c_1} \le \alpha \le (\log H)^{c_1}, \\ \qquad i=1,2 \text{ について } \lambda_i\alpha \text{ は 既約分数 } B_i/A_i \text{ で} \\ \qquad\qquad \left|\lambda_i\alpha - \frac{B_i}{A_i}\right| < \frac{(\log H)^{c_1}}{p^2}, \\ \qquad p H^{-1} \le A_i \le p H^{-1} (\log H)^{c_1} \\ \qquad \text{となるものを有する} \end{array}\right\} \lesssim$$

$$\mathbb{L} \le \frac{1}{H^2 \cdot (\log H)^{e_1}}$$

となる。((1.1.1)).

及び $(\log p)^{h_1} \gg H \gg 1$ に応ずる少し形の S の う Prop 達.

((1.1.2)) 及び ((1.1.3)). 定性的には;「$\lambda_1\lambda_2^{-1} \notin \mathbb{Q}$ なら, $\lambda_1\alpha$, $\lambda_2\alpha$ が同時に, 同程度の既約分母をもつ分数で同程度に良く近似される事はない」.

(ロ) $\beta \in \mathbb{R}$ $(\notin \mathbb{Q})$, $\xi' \,\&\, \xi'' \in \mathbb{N}$ (s.t. ξ', $\xi'' - \xi' \asymp \xi''$),

β の相続く近似分数 B^*/A^*, B_*/A_* $(A_* \ll \xi'' \ll A^*)$

をとるて. $e(\xi) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\xi)$ とおいて

$$\left|\sum_{x;\, \xi' < x \le \xi''} e\left(\tfrac{1}{2}\beta x^2\right)\right| = \left\{\begin{array}{l} \asymp \min\left(\dfrac{\sqrt{A^*}}{\left(\xi''/\sqrt{A_* A^*}\right)},\ \sqrt{A^*} \times \left(\xi''/\sqrt{A_* A^*}\right)\right) \\ \text{または} \\ \ll \sqrt{A_*} \end{array}\right.$$

を得る. ((2.2.14)). ただし $\xi''/\xi' = 1 + \theta$ とおくとき $\theta \asymp 1$ はある absolute constant より小さくとる要がある。

(ロ') 同じく $\sum_{x;\, \xi' < x \le \xi''} e\left(\frac{1}{2}\beta x^2\right)$ のもっとくわしい表示. ((4.5.1)).

ここには Gauss 和 及び Kloosterman 和 に対応する項が現れ

る。((4.5.2)).

(ロ). $\left(\frac{Y}{p}\right)$ を素数 p について $X^2 \equiv Y \bmod p$ に関する Legendre 記号とし、一般に $X, Y \in \mathbb{N}$ のとき、$X = (X,Y)\cdot X_1$, $Y = (X,Y)\cdot Y_1$, $X_1 = 2^x \hat{X}_1$ ($2 \nmid \hat{X}_1$, $(X_1, Y_1) = 1$) とおいて

$$J\left(\frac{Y}{X}\right) = \left(\frac{Y_1}{\hat{X}_1}\right) \quad \text{Jacobi の記号}$$

とおく。このとき ((2.3.9))

$$\left|\sum_{\ddot{A}^\Delta} \prod_{i=1,\dots,4} J\left(\frac{(p_i+q_i)\ddot{A} - q_i\ddot{A}^\Delta}{(\hat{t}_i^{-1} O_i a)}\right)\right| \ll \left(\begin{array}{r}\text{non-trivial な}\\ \text{評価}\end{array}\right)$$

を得る。ただし、$a, b, \ddot{A}, p_i, q_i$ は止めてあり V_i/O_i は $1/\lambda_i$ の近似分数で、$\ddot{A}^\Delta$ は

$$(*)\quad \begin{cases} \ddot{A}^\Delta \equiv \ddot{A}^\Delta_0 \mod W'\underbrace{[V_1, \dots, V_4]}_{\text{最小公倍数}}, \\ (\ddot{A}^\Delta, \ddot{A}) = 1, \\ \ddot{A}^\Delta \text{ はいろいろの整数との公約数が「大きくない」} \end{cases}$$

を動き、W' はいろいろの条件を満す数だが特に

$\hat{t}_i$ を $(\ddot{A}^\Delta, O_i V_i a b)$ の因子で $O_i a$ の約数部分

とおくとき

$$\hat{t}_i \mid W' \quad \text{for } \forall \ddot{A}^\Delta \ ((*) の \forall の)$$

となっている。この証明の際に5頁の㊉における素数 p の存在を仮定した。

(ハ)′ 及び上記 $\ddot{A}^\Delta$ の存在を保証する Proposition ((2.3.11.5)).

(ニ) Kloosterman 和を含む重み附の指数和についての

van der Corput 的な表示．((3.1.4)), ((3.2.4)).

(ホ) さて．Birch - Davenport (1958) のように $|\lambda_1 x_1^2+\cdots+\lambda_4 x_4^2|<\varepsilon$ のかわりに $\left|\sum_{i=1}^{4}(\varepsilon^{-1}2^{2t_i+1}\lambda_i)(2^{t_i}y_i)^2\right|<2$ を用う事を考えて．λ_i 達は少しかわるが $|\lambda_1 x_1^2+\cdots+\lambda_4 x_4^2|<2$ $(|\lambda_i|\asymp E_{100})$ の形で用う．（E_{100} がほぼ ε^{-1} の役をする）

$$\#\left\{\begin{array}{ll}(x_1,\cdots,x_4)\in\mathbb{N}^4 & c_i'|\lambda_i|^{-\frac12}P<x_i\le c_i''|\lambda_i|^{-\frac12}P,\\ & |\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_4x_4^2|<2\end{array}\right\}$$

$$\geq\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2\cdot\prod_{i=1}^{4}\left(\sum_{\substack{x_i:\\ \text{st. } c_i'|\lambda_i|^{-\frac12}P<x_i\le c_i''|\lambda_i|^{-\frac12}P}}e\left(\tfrac12\alpha\lambda_i x_i^2\right)\right)\cdot d\alpha$$

であり．積分変数 α について $|\alpha|\ll P^{-1}$ の部分は．右辺について contribution $\gg|\lambda_1\cdots\lambda_4|^{-\frac12}P^2$ なので．他の α についてはすべて contribution $=o(|\lambda_1\cdots\lambda_4|^{-\frac12}P^2)$ を示したい。

まず (イ)(ロ) を利用して L^1-ノルム的に処理してしまうと ((§§4.1〜4.3))，残る α は

$$\alpha \text{ st. }\left\{\begin{array}{l}|\alpha|\asymp 1,\\ |\lambda_i\alpha| \text{ の } \xi'' \text{ の近くの近似分数達はすべて}\\ \text{分母は} \asymp \xi''\ (=E_{100}^{-\frac12}P)\end{array}\right.$$

となる。この α も結局は contribution $=o(\cdots)$ を示したいのだが；次のようになる。

(ヘ) 上記残る α について．α の相続く近似分数 B/A, B'/A'

($A > A'$, いずれも ≍ C^g など) および $|\lambda_i\alpha|^{-1}$ の相続く近似分数 A_i^{**}/B_i^{**}, A_i^{*}/B_i^{*}, A_{i*}/B_{i*} ($A_i^{**} > A_i^{*} > A_{i*}$, いずれも ≍ C など), (g は適当に調整する E_{100} 等に depend する大きい定数)
について

$$\varepsilon = AB' - BA' \quad (= \pm 1)$$

を見て、各 i について

$(A_i^{**}/B_i^{**}, A_i^{*}/B_i^{*})$ または $(A_i^{*}/B_i^{*}, A_{i*}/B_{i*})$

のうち $A_i^{**}B_i^{*} - B_i^{**}A_i^{*} = \varepsilon$ または $A_i^{*}B_{i*} - B_i^{*}A_{i*} = \varepsilon$
を満たす方を採用して改めて $(A_i/B_i, A_i'/B_i')$ と書けば、

「B/A, B'/A', V_i/U_i から A_i/B_i が書ける」

ことがわかる。((4.4.12)), ((4.4.14)). 正確には B/A, B'/A' そのものではなく、少し因子をとり除いた $\tilde{B}/\tilde{A}$ 等 ((ハ)参) を使う。

(ハ)' 及び逆に相当する, ((4.4.19)); (ハ)の書しかたで機械的に作った A_i/B_i 等をもつ α は

① A_i/B_i, A_i'/B_i' は $|\lambda_i\alpha|^{-1}$ の相続く近似分数

かまたは

② (ホ)で ((§§4.1–4.7)) 既に処理できるもの

となる。

(ト) 従って残る①について、(ニ), (ハ), (ハ)' を使い、この α 達寄与分は contribution $= o(\cdots)$ が示せる。この最後の段階で [系]の $Q^{0.03}$, $P^{0.03}$, (☆)の「互に素」, 素数 p の存在

など強い仮定が要る事になる。(ヘ)の所までは、(イ)にあるような Prop. が使える程度の仮定があれば扱える。

A. Oppenheim : Ann. of Math., (2) 32 (1931), 271–298.

B. J. Birch – H. Davenport : Mathematika, 5 (1958), 8–12.

H. Davenport – D. Ridout : Proc. London Math. Soc., (3) 9 (1959), 544–555.

H. Davenport – H. Heilbronn : J. London Math. Soc., 21 (1946), 185–193.

以上三篇は H. Davenport 全集(III巻目)に入っている。

H. D. Kloosterman : Acta Math., 49 (1926), 407–464.

G. L. Watson : J. London Math. Soc., 28 (1953), 293–242.

H. Iwaniec : Acta Arith., 33 (1977), 209–229.

N. V. Kuznecov : Math. of USSR-Sbornik, 39 (1981), 299–342.

Y.-N. Nakai : "On Diophantine inequalities of real indefinite quadratic forms of additive type in four variables", タイプ原稿[N]。

(5-6頁目の[要]は今春の広島大学での学会の分科会でのアブストラクトと同内容(P_0の位置書きまちがい))

(補) 2頁目の Davenport-Heilbronn の Diophantus 同時近似の考え方。(ト)の((4.3.9))で使う。

以上。