数理解析研究所講究録
第517巻 1984年 30-46

指数関数の有理点での値の有理近似について

慶応・理工　塩川宇賢　(Iekata Shiokawa)

1. はじめに表題に関して知られている主な結果を紹介しよう。

定理1. (Davis [5]) 任意の正数 ε に対し不等式

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{1}{q^2} \frac{\log\log q}{\log q}$$

は無限個の整数解 $q(>0)$, p をもつ。さらに定数 $q_0 = q_0(\varepsilon)$ が存在して, 不等式

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{1}{q^2} \frac{\log\log q}{\log q}$$

がすべての整数 $q(\geqslant q_0)$, p に対し成り立つ。

定理2. (Bundschuh [3], cf. Mahler [9], Durand [6]) 整数 $a(>0)$, b に対し正の定数 $c = c(a, b)$ が存在して, 不等式

$$\left| e^{a/b} - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^{2+4\log a/\log\log q}} \frac{\log\log q}{\log q}$$

がすべての整数 $q(\geqslant 3)$, p に対し成り立つ。

定理3. (Durand [7]) 相異なる0でない n 個の有理数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対し, 正の定数 $C = C(n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ が存在して, 不等式

$$|q_0 + q_1 e^{\alpha_1} + \cdots + q_n e^{\alpha_n}| > q^{-n-C/\log\log q}$$

がすべての整数の組 $(q_0, q_1, \cdots, q_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ に対し成り立つ。但し, $q = \max(|q_1|, |q_2|, \cdots, |q_n|, 3)$。

定理 4. (Baker [1], [2 ; chap. 10], Mahler [10]) 相異なる0でない有理数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ に対し正の定数 $C = C(n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ が存在して, 不等式

$$|q e^{\alpha_1} - p_1| \cdot |q e^{\alpha_2} - p_2| \cdots |q e^{\alpha_n} - p_n| > q^{-1-C/\sqrt{\log\log q}}$$

がすべての整数 $q\ (\geqq 3), p_1, p_2, \cdots, p_n$ に対し成り立つ。

注意, 定数 C はいずれも explicit に与えられている。定理 1 の q_0 も計算可能である。

2. 証明の方法について述べよう。Mahler, Durand の証明は Hermite の方法による。m, n をパラメタとし, 多項式

$$f(t)=\frac{t^m(t-1)^n}{m!\,n!}$$

を考える。

$$f(z;t)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}f^{(k)}(t)$$

とおくと，部分積分により

$$f(z;0)e^z-f(z;1)=e^z\int_0^1 f(t)e^{-zt}\,dt$$

を得る。両辺に $(m+1)!\,z^{m+n+1}$ をかけてそれを

$$(1)\qquad Q(z)e^z-P(z)=R(z)$$

とおく。（これがいわゆる Hermite's identity である。Hermite は類似の多項式から出発し（1）を用いて e の超越性を証明した。）定義より $Q(z),\ P(z)\in\mathbb{Z}[z]$, $\deg Q=n$, $\deg P=m$, $R(z)$ の $z=0$ での order $=m+n+1$ がわかる。ここで，パラメタ (m,n) をそれぞれ $(n-1,\ n)$ または $(n,\ n-1)$ と選び，対応する $P,\ Q,\ R$ をそれぞれ $P_n,\ Q_n,\ R_n$ または $P_n^*,\ Q_n^*,\ R_n^*$ と書く。すると degree と order の比較から

$$(2)\qquad \det\begin{pmatrix} P_n(z) & Q_n(z)\\ P_n^*(z) & Q_n^*(z)\end{pmatrix}\neq 0\quad(\forall z\neq 0)$$

がわかる。$z=a/b$ ($a,\ b\in\mathbb{N}$) を代入する。$P_n(a/b)$, $Q_n(a/b)$, $P_n^*(a/b)$, $Q_n^*(a/b)$ をそれぞれ，$p_n,\ q_n,\ p_n^*,\ q_n^*$

とおく。これらの有理数の共通分母は $d_n := b^n/(n-1)!$ である。

さて，$p, q\ (>0)$ を与えられた整数とする。(2)より，任意の n に対して　$p_n q - q_n p \neq 0$ または $p_n^* q - q_n^* p \neq 0$.
各 n に対して $\neq 0$ となる p_n, q_n または p_n^*, q_n^* を選び，それを改めて，p_n, q_n と書く。(1)より

$$d_n q_n e^{a/b} - d_n p_n = d_n R_n(a/b)$$

故に
$$d_n(q_n p - p_n q) = (q e^{a/b} - p) d_n q_n - q d_n R_n(a/b)$$

左辺 $\in \mathbb{Z}, \neq 0$. よって，

$$|(q e^{a/b} - p) d_n q_n - q d_n R_n(a/b)| \geqq 1$$

従って

(3)　　$$|q d_n R_n(a/b)| \leqq \frac{1}{2}$$

ならば

$$|(q e^{a/b} - p) d_n q_n| \geqq \frac{1}{2}$$

$$\text{i.e}\quad \left|e^{a/b} - \frac{p}{q}\right| \geqq \frac{1}{2} q^{-1-\log|d_n q_n|/\log q}$$

$q_n, R_n(a/b)$ の大きさ(小ささ)は正確にわかっている。
そこで(3)をみたす n を選び，$d_n q_n$ を q の関数として，上から評価する事ができる。

3.

Davis も Hermite の証明から idea を得ている。$f(t)$ を多項式とすると，

$$\int_0^\infty e^{-t} f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-t} f(t)\,dt + e^{-1}\int_0^\infty e^{-t} f(t+1)\,dt$$

これを　$q = u + e^{-1}p$　と書くと，

$$e - \frac{p}{q} = \frac{v}{q^2}, \qquad \text{但し}\ v = euq.$$

いま $f(t)$ として次の多項式 $f_n(t)$ $(n \geqq 0)$ をとる。

$$f_{3n-2}(t) = \frac{t^n (t-1)^n}{n!}, \quad f_{3n-1}(t) = \frac{t^n (t-1)^{n+1}}{n!}, \quad f_{3n}(t) = \frac{t^{n+1}(t-1)^n}{n!}$$

対応する p, q, v を p_n, q_n, v_n と書くと

$$p_n, q_n \in \mathbb{Z}, \quad e - \frac{p_n}{q_n} = \frac{v_n}{q_n^2},$$

かつ次の回帰関係をみたす。

$q_{3n} = q_{3n} + q_{3n-2}$，$q_{3n-1} = 2n q_{3n-2} + q_{3n-3}$，$q_{3n-2} = q_{3n-3} + q_{3n-4}$

（p_n も同様）これより e の正則連分数展開

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \cdots]$$

が得られる。p_n/q_n はその第 n 近似分数であり，q_n の大きさは計算できる。正則連分数が最良近似を与える事から，定理 1 が証明される。

Bundschuh は合流型超幾何関数に対する Kummer の変換公式

$$ {}_1F_1(\alpha;\beta;z) = e^z {}_1F_1(\beta-\alpha;\beta;-z) $$

を用いて e^z の有理関数近似を構成している。実際これは e^z の Padé table (Perron [11; §75] 参照) の主対角線に一致している。彼は同じ方法で $\tanh z$ と Bessel 関数の比 $J_\nu(z)/J_{\nu+1}(z)$ の有理点での値を扱っている。(cf [4].)

Hermite の方法の最も重要な改良は Siegel E 関数の理論である。Baker-Mahler の結果はこれによる。定理4において $\sqrt{\log\log q}$ を $\log\log q$ に置きかえる事が残されている。同じ方法で Shidlovskii, Sprindzuhuk, Galochkin 等が e^z を含む超幾何 E 関数に対して, §1 と同種の結果を得ている。

3. 本論文において定理2の才3の証明を与えよう。前§の証明では, まず e^z の有理関数近似を構成し, $z = a/b$ とおいて, その値の有理数近似を導いた。そこで能率の良い関数近似 ― Padé 近似 ― が必要となる。"良い関数近似 $\Longrightarrow$

良い有理数近似”という図式である。我々の証明は Gauss による合流型超幾何関数の連分数展開にもとずく。即ち連分数の才 n 近似分数 $p_n(z)/q_n(z)$ という既製の有理関数近似を用いる。それ故証明は単純明快で e^z, $\tan z$, $\tanh z$, $J_\nu(z)/J_{\nu+1}(z)$ etc を含む広いクラスの合流型超幾何関数の有理数値が一遍に扱える。もちろん得られる定数は計算可能である。

補題1　関数

$$Y = F(X) := X \log X + \lambda X \quad (\lambda \text{は実定数})$$

の逆関数　$X = F^{-1}(Y)$ は，X, Y が十分大きい所で次の級数に展開される。

$$X = F^{-1}(Y) = \frac{Y}{\log Y}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k}\frac{(\log\log Y - \lambda)^{n-k}}{(\log Y)^n}\right\}$$

ここで $A_{n,k}$ は次の関係式で帰納的に定義される。

$$A_{n,0} = 1 \ (n \geqq 0), \quad A_{n,n-1} = (-1)^{n-1} \ (n \geqq 1)$$

$$A_{n+1,k+1} = A_{n,k+1} - \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ k_1+k_2=k \\ 0 \leq k_i \leq n_i}} A_{n_1,k_1} B_{n_2 k_2}$$

$$(n \geqq 1,\ 0 \leq k \leq n-1)$$

但し，
$$B_{n,k}=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_j=n\\ k_1+\cdots+k_j=k\\ n_i\geqq 1,\ 0\leqq k_i\leqq n_i}}A_{n_1,k_1}\cdots A_{n_j,k_j}\quad(n\geqq 1,\ k\geqq 0)$$

はじめの数項を書けば，

$$X=F^{-1}(Y)=\frac{Y}{\log Y}\left\{1+\frac{\log\log Y-\lambda}{\log Y}+\frac{(\log\log Y-\lambda)^2}{(\log Y)^2}-\frac{\log\log Y-\lambda}{(\log Y)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{(\log\log Y-\lambda)^3}{(\log Y)^3}-\frac{5}{2}\frac{(\log\log Y-\lambda)^2}{(\log Y)^3}+\frac{\log\log Y-\lambda}{(\log Y)^3}+\frac{(\log\log Y-\lambda)^4}{(\log Y)^4}\cdots\cdots\right\}$$

証明省略

定理　整数 $a(>0)$，b に対して，正の定数 $C=C(a,b)$ が存在して不等式

$$\left|e^{a/b}-\frac{p}{q}\right|>\frac{C}{q^{2+2\log a\cdot\nu(q)}}\frac{\log\log q}{\log q},\qquad \nu(q):=\frac{F^{-1}(\log q)}{\log q}.$$

がすべての整数 p, $q(\geqq 3)$ に対して成り立つ。

系．整数 $a(>0)$，b に対して，正の定数 $C=C(a,b)$ が存在し，

$$\left|e^{a/b}-\frac{p}{q}\right|>C\,q^{-2-2\log a\cdot(1/\log\log q+\log\log\log q/(\log\log q)^2)}$$

がすべての整数 p, $q(\geqq 3)$ に対して成り立つ。

C の下からの評価は可能であるが，相当小さくなる。

4. Gauss は Euler, Lambert, Lagrange 等の連分数を一般化して超幾何関数の連分数展開を得た。これを合流型超幾何関数

$$\Phi(\beta;\gamma;z):=1+\frac{\beta}{\gamma}\frac{z}{1}+\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

($\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ は定数, $\gamma\notin\{0,-1,-2,\cdots\}$) に限定して述べよう。$\Phi$ は entire で, Kummer の関数と呼ばれ, しばしば ${}_1F_1(\beta;\gamma;z)$ と表示される。これは Kummer の方程式 $zd^2w/dz^2+(\gamma-z)dw/dz-\beta z=0$ をみたす。いま $n\geqq 0$ に対し

$$P_{2n}:=\Phi(\beta+n;\gamma+2n;z),\quad P_{2n+1}:=\Phi(\beta+n+1;\gamma+2n+1;z)$$

とおくと, P_n は次の3項回帰関係をみたす;

$$P_n=P_{n+1}+a_{n+1}zP_{n+2}\qquad(n\geqq 0)$$

但し

$$a_{2n}=\frac{\beta+n}{(\gamma+2\beta-1)(\gamma+2n)},\quad a_{2n+1}=-\frac{\gamma-\beta+n}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)}.$$

これより形式的に連分数

$$\frac{\Phi(\beta;\gamma;z)}{\Phi(\beta+1;\gamma+1;z)}=\frac{P_0}{P_1}=1+\frac{a_1z}{P_1/P_2}=\cdots=1+\frac{a_1z}{1}\,\underset{+}{}\,\frac{a_2z}{1}\,\underset{+}{}\cdots$$

が得られる。この連分数は左辺の関数の poles を含まない任意の compact set 上で一様収束する事が分かる。特に $\beta=0$, $\gamma+1$ を γ でおきかえると

$$\Phi(1;\gamma;z)=\frac{1}{1+}\frac{z}{\gamma+}\frac{1\cdot z}{\gamma+1-}\frac{\gamma\cdot z}{\gamma+2+}\frac{2\cdot z}{\gamma+3-}\frac{(\gamma+1)z}{\gamma+4+}\frac{3z}{\gamma+5-}\cdots$$

さらに $\gamma=1$ とすれば e^z が連分数

$$e^z=\Phi(1;1;z)=\frac{1}{1-}\frac{z}{\gamma+}\frac{z}{2-}\frac{z}{3+}\frac{2z}{4-}\frac{2z}{5+}\frac{3z}{6-}\frac{3z}{7+}\cdots$$

に展開される。ここで連分数の変形公式

$$(1)\quad b_0+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\cdots=b_0+\frac{r_1a_1}{r_1b_1+}\frac{r_1r_2a_2}{r_2b_2+}\frac{r_2r_3a_3}{r_3a_3+}\cdots$$

を用いれば

$$(2)\quad e^z=\frac{1}{1+}\frac{-z}{1+}\frac{z}{2+}\frac{-z}{3+}\frac{z}{2+}\frac{-z}{5+}\frac{z}{2+}\frac{-z}{7+}\cdots$$

この形では扱いにくいのでもう少し"加速"する。一般に2つの連分数

$$b_0^*+\frac{a_1^*}{b_1^*+}\frac{a_2^*}{b_2^*+}\cdots,\qquad b_0+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\cdots$$

があって，それらの第 n 近似分数 f_n^*, f_n の間に

$$f_n^*=f_{2n+1}\quad(n\geqq 0)$$

の関係があるとき，前者は後者の odd part であるという。

補題 連分数 $b_0+\dfrac{a_1}{b_1+}\dfrac{a_2}{b_2+}\cdots$ が odd part をもつ必要十分条件は $b_{2k+1}\neq 0$ $(k\geqq 0)$. この時，odd part

$b_0^* + \dfrac{a_1^*}{b_1^*} + \dfrac{a_2^*}{b_2^*} + \cdots$ は次の式で与えられる；

$$b_0^* = (a_1 + b_0 b_1)/b_1, \quad a_1^* = -a_1 a_2 b_3/b_1, \quad b_1^* = a_2 b_3 + b_1(a_3 + b_2 b_3),$$

$$a_k^* = -a_{2k-1} a_{2k} b_{2k-3} b_{2k+1}, \quad b_k^* = a_{2k} b_{2k+1} + b_{2k-1}(a_{2k+1} + b_{2k} b_{2k+1}).$$

この補題により（2）の odd part をとり（1）で変形すれば

$$(2') \quad e^z = 1 + \frac{2z}{2-z} + \frac{z^2}{2\cdot 3} + \frac{z^2}{2\cdot 5} + \frac{z^2}{2\cdot 7} + \cdots + \frac{z^2}{2(2n-1)} + \cdots$$

を得る。さらに変形公式

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots = b_0 + \frac{1}{\frac{1}{a_1} b_1} + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} b_2} + \frac{1}{\frac{a_2}{a_1 a_3} b_3} + \frac{1}{\frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} b_4} + \cdots$$

を用いて正則連分数に直せば

$$(*) \begin{cases} e^z = 1 + \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots \\[2ex] a_1 = \dfrac{2-z}{2z}, \quad a_{2n} = \dfrac{4(4n-1)}{z}, \quad a_{2n+1} = \dfrac{4n+1}{z} \quad (n \geqq 1) \end{cases}$$

を得る。

つぎに $\Phi(\beta;\gamma;z)$ において，z を z/β におきかえ $\beta \longrightarrow +\infty$ とすると，合流型超幾何関数

$$\Phi(\gamma; z) = 1 + \frac{1}{\gamma}\frac{z}{1} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{z^3}{3!} + \cdots$$

及び連分数展開

$$\frac{\Psi(\gamma;z)}{\Psi(\gamma+1;z)}=1+\frac{\frac{z}{\gamma(\gamma+1)}}{1}+\frac{\frac{z}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1}+\frac{\frac{z}{(\gamma+2)(\gamma+3)}}{1}$$

を得る。今度は（2）→（2′）への変形は必要なく，このままで良い。$\tan z$，$\tanh z$，$J_\nu(z)/J_{\nu+1}(z)$ などはこの形の連分数である。

以上連分数に関しては，Perron［11］，Wall［12］，Jones-Thron［8］を参照してほしい。但し［8］の（2.4.30）式にはミスがある。上記（2′）が正しい。

5．定理の証明

補題2．連分数

$$a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots \qquad (a_n \text{ 複素数})$$

において

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n a_{n+1}|^{-1}<+\infty .$$

とすると

(i) 比 $p_n/(a_2a_3\cdots a_n)$，$q_n/(a_1a_2\cdots a_n)$ はそれぞれ0でない有限値に収束する。

(ii) $\alpha_n=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}+\cdots$ とおくと，$|\alpha_n|\sim|a_{n+1}|^{-1}$．

証明省略

定理の証明は連分数(*)にもとずく。(*)に $z=a/b$ を代入すると，才 n 近似分数 p_n/q_n において，$p_n, q_n \in \mathbb{Q}$．いま

(1) $$\alpha_n = 2a^n$$

とおくと，帰納法により

$$\alpha_n p_n,\ \alpha_n q_n \in \mathbb{Z} \qquad (n \geqq 1)$$

がいえる。(*)は補題2の条件をみたすから，n_0 を十分大きく選べば，

(2) $$\begin{cases} |q_n| < |q_{n+1}|, & |q_n/\alpha_n| < |q_{n+1}/\alpha_{n+1}| \\ |a_n| > 1, & |\alpha_n| < 1/2 \qquad (n \geqq n_0) \end{cases}$$

と出来る。さて $p, q\ (>0)$ を与えられた整数とする。

$$|q_{n_0}/\alpha_{n_0}| < 4q$$

と仮定してよい。(そうでないものは有限個しかないから。)

すると(2)より

(3) $$|q_{n-1}/\alpha_{n-1}| \leqq 4q < |q_n/\alpha_n|$$

をみたす $n = n(q) > n_0$ が唯一つ定まる。

連分数の公式

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1$$

より $p_n q - q_n p \neq 0$ または $p_{n-1} q - q_{n-1} p \neq 0$ の少くとも一方が成り立つ。

いま $p_n q - q_n p \neq 0$ とすると，

$$d_n q_n \left(e^{a/b} - \frac{p}{q}\right) = \frac{d_n (p_n q - q_n p)}{q} + d_n (q_n \alpha - p_n)$$

において

$$d_n (p_n q - q_n p) \in \mathbb{Z}, \neq 0, \qquad 即ち$$

$$|d_n (p_n q - q_n p)| \geqq 1.$$

また連分数の公式

$$q_n \alpha - p_n = \pm \frac{1}{q_{n+1} + \alpha_{n+1} q_n}$$

と(2),(3)より

$$|d_n (q_n e^{a/b} - p_n)| \leqq \frac{2 d_n}{|q_{n+1}|} \leqq \frac{1}{2q}.$$

よって

$$\left| d_n q_n \left(e^{a/b} - \frac{p}{q}\right)\right| \geqq \frac{1}{2q}$$

故に

$$\left|e^{a/b} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2} q^{-1 - \log|d_n q_n| / \log q}.$$

$p_{n-1} q - q_{n-1} p \neq 0$ からも同じ不等式が得られる。ここで(1),(2)より

$$\begin{aligned} \log|d_n q_n| &\leqq \log|q_{n-1}/d_{n-1}| + 2\log|d_n d_{n-1}| + \log|q_n/q_{n-1}| \\ &\leqq \log q + 2n \log a + \log n + B. \end{aligned}$$

(以後同じ文字Bで適当な正の定数を表わす。Bおよび O 定数は高々a, bにのみ依存する。)よって

$$(4) \quad \left|e^{a/b} - \frac{p}{q}\right| > B q^{-2 - (2n \log a + \log n)/\log q}$$

あとは $n = n(q)$ を q の関数として explicit に表わせばよ

い。(*)より

$$a_1 a_2 \cdots a_{2m+1} = \frac{2-z}{8}\left(\frac{8}{z}\right)^{2m+1}(m!)^2\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{1}{16k^2}\right)$$

$$\log|a_1 a_2 \cdots a_{2m+1}| = 2\log m! + (2m+1)\log(8/|z|) + O(1)$$

$$\log|a_1 a_2 \cdots a_{2m}| = \log|a_1 a_2 \cdots a_{2m+1}| - \log|a_{2m+1}|$$

$$= 2\log m! + 2m\log(8/|z|) - \log(2m) + O(1)$$

よって Stirling の公式

$$\log m! = m\log m - m + \frac{1}{2}\log m + O(1)$$

および補題2より

$$\log|q_n| = n\log n + n\log\frac{4}{|z|e} + O(1)$$

故に(1),(3)より

$$(5) \qquad \log q + B < n\log n + \lambda n = F(n) < \log q + B'$$

$$但し\ \lambda = 2\log 2 - 1 + \log|b| - 2\log a.$$

特に

$$(6) \qquad \log n = \log\log q - \log\log\log q + O(1).$$

また平均値の定理を用いて

$$F^{-1}(Y + O(\log Y)) = F^{-1}(Y) + O(1)$$

これと(5),(6)から

$$(7) \qquad n = F^{-1}(\log q) + O(1)$$

(4),(6),(7)および補題1より定理と系が従う。

References

[1] A. Baker: On some Diophantine inequalities involving the exponential function. Canad. J. Math. 17(1965), 616-626

[2] A. Baker: Transcendental Number Theory. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975

[3] P. Bundschuh: Irrationalitätsmasse für e^a, $a \neq 0$ rational oder Liauville-Zahl. Math. Ann. 192(1971), 229-242

[4] P. Bundschuh: Scharfe Irrationalitätsmasse für Zahlen, die mit Bessel-funktion zusammenhängen. Math. Zeit. 165 (1979), 251-260

[5] C. S. Davis: Rational approximations to e. J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 25(1978), 497-502

[6] A. Durand: Note on rational approximations of the exponential function at rational points. Bull. Austral. Math. Soc. 14(1976), 449-455

[7] A. Durand: Simultaneous Diophantine approximations and Hermite's method. Bull. Austral. Math. Soc. 21(1980), 463-470

[8] W. B. Jones and W. J. Thron: Continued Fractions: Annalytic Theory and Applications, Encyclopedia of Math. Appl., vol. 11. Addison-Wesley, 1980

[9] K. Mahler: On rational approximations of the exponential function at rational points. Bull. Austral. Math. Soc. 10(1974), 325-335

[10] K. Mahler: On a paper by A. Baker on the approximation of rational powers of e. Acta Arith. 27(1975), 61-87

[11] O. Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Chelsea, New York, 1929

[12] H. S. Wall: Analytic Theory of Continued Fractions. Van Nostrand, New York, 1948