数理解析研究所講究録
第517巻 1984年 81-90

Balasubramanian の Multiple integration process について

立教大・理　松本 耕二
(Kohji MATSUMOTO)

R. Balasubramanian は[1]において，ある種の二重指数和を評価する新しい技法を開発して"Multiple integration process"（以下，本稿ではM.I.P.と略記）と名づけ，Riemann zeta 函数の二乗平均の残余項の評価に応用した．[1]で扱われた問題は，

$$\int_1^T \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = T\log T-(1+\log 2\pi-2\gamma)T+O(T^{\theta+\varepsilon})$$

（ここに γ は Euler の定数，ε は任意に小さい正数）なる漸近式の残余項の改良であって，Balasubramanian は $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ に関する当時最高の評価であった $\zeta(\frac{1}{2}+it)=O(t^{\frac{173}{1067}+\varepsilon})$（Kolesnik [2]）を M.I.P. と結びつけ，$\theta=\frac{346}{1067}$ をえた．これは，Titchmarsh [3] の結果 $\theta=\frac{5}{12}$ を，殆んど半世紀ぶりに更新した大結果であって，M.I.P. の輝かしい成果であったといえよう．

(念のために注意しておくが，M.I.P.というのはむしろ技術的な手段であって，[1]における議論の流れはTitchmarshのアイデアを踏襲したものである．更にいえば，Titchmarshもまた，Hardy-Littlewood以来の流れに沿っているのである．二乗平均に対する漸近式を（残余項$O(T)$の形で）はじめて出したのはHardy-Littlewood [4]であって，それは近似函数等式に本質的に依存するものだった．その後Ingham [5]は$\theta=\frac{1}{2}$をえたが，これは近似函数等式を用いて[4]のアイデアに従う限りの自然限界ともいえる結果であって，それ以上θの値を改良するためには，近似函数等式そのものの精密化が必要だった．それは1932年，Siegel [6]によってなされた．そしてその直後，近似函数等式の代りにこのRiemann-Siegel formulaを用いて，$\theta=\frac{5}{12}$に達したのがTitchmarshなのである)

M.I.P.が他の問題に対してどの程度有効なのかはまだよくわからないが，どうもBalasubramanianの方法そのままでは，適当範囲はそれほど広いとはいえないようである．大小比較をする必要性から，ある種の"係数が実数"という条件がいるし，またある場合には，部分和法が使えなくなって議論が進行しなくなるケースもおこってくる．(この後者の事実は，Heath-Brown氏から手紙で指摘されてはじめて知った)それにもかかわらず，実と限らない任意の原始指標に関するL-

函数について[1]の結果の拡張が可能である([7], [8].).
もっと別の問題に対する応用として,最近筆者は,Dirichlet級数に関するF. Carlsonの定理が,ある場合にはM. I. P. を用いて精密化できることを発見した([9]).これ以外にM. I. P. を使った研究があるかどうか,筆者は知らない.

論文[1]は,決して読みやすいものではなく,またそのM. I. P. を用いた部分はかなり後ろの方(pp. 564−570)に出てくるという事情もあるので,ここではM. I. P. の基本的な方法を紹介しようと思うが,細かい技術的な計算を追うよりも,その大要を述べる[redacted]にとどめる.

[Step 1.]

[1]においてM. I. P. によって評価される量は次の二つである:

$$\sum_{n=1}^{K}\sum_{m<n}\frac{\sin(T\log(n/m))}{(mn)^{\frac{1}{2}}\log(n/m)}$$

$$\sum_{n=1}^{K}\sum_{\substack{m\neq n\\ m\leq K}}\frac{\sin(2\theta_1(T)-T\log mn)}{(mn)^{\frac{1}{2}}(2\theta_1'(T)-\log mn)},$$

ただしここに $K=\left[\left(\frac{1}{2\pi}T\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, $\theta_1(T)=\frac{T}{2}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2}-\frac{\pi}{8}$ である.基本的なアイデアは全く同じであるので,ここでは前者の評価法([1], Lemmas [redacted] 23-26 および Lemma 33)を述べるが,その前にまず次の一般的なLemmaが必要である.

Lemma. ([1], Lemma 22)

$f(t) \geq 0$, $f(t) = g_1(t) + g_2(t)$, $\alpha \in \mathbb{N}$ とすると,

$$\int_{T-U}^{T+U} f(t)\,dt \ll \max_{|u_i| \leq U/4\alpha} \int_{T-2U+u_1+u_2+\cdots+u_\alpha}^{T+2U+u_1+u_2+\cdots+u_\alpha} g_1(t)\,dt$$

$$+ U^{-\alpha} \int_{-U/4\alpha}^{U/4\alpha} du_\alpha \int_{-U/4\alpha}^{U/4\alpha} du_{\alpha-1} \cdots\cdots \int_{-U/4\alpha}^{U/4\alpha} du_1 \int_{T-2U}^{T+2U} g_2(t+u_1+\cdots+u_\alpha)\,dt.$$

これは，初等的な計算でえられるごく簡単な補題であるが，Balasubramanian のアイデアの鍵となっており，M.I.P.の名前の由来ともなっているものである.

[Step 2.]

さて Balasubramanian は，和

$$\psi(t) = \sum_{m=1}^{K} \sum_{m<n} \frac{\sin(t \log(n/m))}{(mn)^{\frac{1}{2}} \log(n/m)}$$

を考える.($T-100H \leq t \leq T+100H$) 最終的にほしいのは値 $\psi(T)$ の評価であるが，そのために T の近傍における実函数 $\psi(t)$ の挙動をみるのである.($H \ll T$). 結果的には，任意に小さい正数 δ に対して，

$$\psi(T) = O(HT^{50\delta}) \tag{1}$$

がえられる ([1], Lemma 26) のであるが，そのためにまず，

$$\psi(T_0) = O(HT^{50\delta}) \tag{2}$$

をみたす T_0 が，$T-4H \leq T_0 \leq T+4H$ の範囲に存在することを示す（このあたりで出てくる，100, 50, 4 といった数には，もちろんあまり深い意味はない）

ここで $\psi(t) \in R$ ということが本質的に重要となる．まず $[T-4H, T+4H]$ の範囲で $\psi(t)=0$ となる点があれば，その点を T_0 とすればよい．そうでなければ $\psi(t)$ の符号が $[T-4H, T+4H]$ の間で一定ということだから，たとえば $\psi(t)>0$ としてよい．すると $\psi(t)=f(t)$ として［Step 1］の Lemma が使える．

$$\psi(t) = \sum_{m<HT^{10\delta}} \sum_{n<m} + \sum_{(M)>HT^{10\delta}} \sum_{M<m\leq 2M} \sum_{0<m-n<MH^{-1+\delta}}$$

$$+ \sum_{(M)>HT^{10\delta}} \sum_{M<m\leq 2M} \sum_{m-n>MH^{-1+\delta}}$$

$$= S_1(t) + S_2(t) + S_3(t)$$

とわければ，Lemma によって，

$$\int_{T-H}^{T+H} \psi(t)\,dt \ll \max_{|u_i|\leq H/4\alpha} \int_{T-2H+u_1+\cdots+u_\alpha}^{T+2H+u_1+\cdots+u_\alpha} (S_1(t)+S_2(t))\,dt$$

$$+ H^{-\alpha} \int_{-H/4\alpha}^{H/4\alpha} du_\alpha \cdots \int_{-H/4\alpha}^{H/4\alpha} du_1 \int_{T-2H}^{T+2H} S_3(t+u_1+\cdots+u_\alpha)\,dt \tag{3}$$

と書ける．

ここでまず，$S_1(t)$ については "trivial bound" $O(HT^{10\delta})$ を

使う．$S_2(t)$ に関しては次の［Step 3］でのべる．$S_3(t)$ の入った積分については，この積分を実行してやることにより，

$$\ll H^{-\alpha} \sum_{(M)>HT^{10\delta}} \sum_{M<m\leq 2M} \sum_{m-n\geq MH^{-1+\delta}} Y_1 (mn)^{-\frac{1}{2}} \left(\log \frac{m}{n}\right)^{-\alpha-2}$$

となる．ここに Y_1 は，積分によってでてくる sin と cos の和であり，その項数 $\ll_\alpha 1$，従って $Y_1 \ll_\alpha 1$ を得る．$\alpha=\alpha(\delta)$ を十分大きくとれば，上式 $\ll_\delta 1$ とできることがわかる．

［Step 3］

$S_2(t)$ を評価するため，Balasubramanian は次の評価を使う：$T-100H \leq t \leq T+100H$ において一様に，

$$\sum_{r<(M/H)^{1+\delta}} \sum_{M<m\leq 2M} \frac{\exp\{it\log((m-r)/m)\}}{(m(m-r))^{\frac{1}{2}}\log((m-r)/m)} = O(HT^{50\delta}) \qquad (4)$$

が成り立つ．

この評価が成り立つような H が存在することは，もちろん自明ではない．Balasubramanian は van der Corput の方法を用いて，$H=T^{27/82+\varepsilon}$ として (4) が成り立つことを示し（[1], Lemma 33．そこで述べられるアイデアは Titchmarsh [10] によるものである），さらに Kolesnik の結果 [2] によれば $H=T^{346/1067+\varepsilon}$ とできることを示唆している．

さて (4) を用いると，$S_2(t)=O(HT^{50\delta})$ が容易にえられ，以上えられた結果を (3) にすべて代入することにより，

$$\int_{T-H}^{T+H}\psi(t)\,dt \ll H^2T^{50\delta}$$

をうる．よって $[T-H,\ T+H]$ の間にある T_0 が存在して，$\psi(T_0)=O(HT^{50\delta})$ となっていなければならない．即ち (2) が証明された．([1], Lemma 23)

[Step 4]

(2)：$\psi(T_0)\ll HT^{50\delta}$ から，(1)：$\psi(T)\ll HT^{50\delta}$ を導くには，$\psi(T)-\psi(T_0)$ があまり大きくはなりえないことを示せばよい．実際 Balasubramanian は [1], Lemma 25 において，

$$\psi(T)-\psi(T_0)=O(HT^{50\delta}) \qquad (5)$$

を示す．(2) と (5) から明らかに (1) を得る．

(5) の証明は，次のようにして行なわれる．

$$\psi(T)-\psi(T_0)=\int_{T_0}^{T}\psi'(t)\,dt$$

$$=\int_{T_0}^{T}\sum_{m=1}^{K}\sum_{m<n}\frac{\cos(t\log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{T_0}^{T}\sum_{m=1}^{K}\sum_{n=1}^{K}\frac{\cos(t\log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\,dt$$

$$+O((T-T_0)\log T)$$

この第一項の積分の評価のために，再び [Step 1] の Lemma が用いられる．

[Step 5]

まず $T-100H \leq t \leq T+100H$ で,

$$\sum_{m=1}^{K}\sum_{n=1}^{K}\frac{\cos(t\log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{Re}\left|\sum_{m=1}^{K} m^{-\frac{1}{2}+it}\right|^2 \geq 0$$

であることに注意すれば, M.I.P. の基本 Lemma が適用できることがわかる. そこで

$$\sum_{m=1}^{K}\sum_{n=1}^{K}\frac{\cos(t\log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sum_{m=1}^{K}\frac{1}{m} + 2\sum_{m\leq HT^{10\delta}}\sum_{n<m}\frac{\cos(t\log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+2\sum_{(M)>HT^{10\delta}}\sum_{M<m\leq 2M}\sum_{0<m-n<MH^{-1+\delta}}$$

$$+2\sum_{(M)>HT^{10\delta}}\sum_{M<m\leq 2M}\sum_{m-n\geq MH^{-1+\delta}}$$

$$= S_4(t)+S_5(t)+S_6(t)+S_7(t)$$

と分けて, $\displaystyle\int_{T-4H}^{T+4H}\sum_{m=1}^{K}\sum_{n=1}^{K}\frac{\cos(t\log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\,dt$

$$\ll \max_{|u_i|\leq H/\alpha}\int_{T-8H+u_1+\cdots+u_\alpha}^{T+8H+u_1+\cdots+u_\alpha}(S_4(t)+S_5(t)+S_6(t))\,dt$$

$$+H^{-\alpha}\int_{-H/\alpha}^{H/\alpha}du_\alpha\cdots\int_{-H/\alpha}^{H/\alpha}du_1\int_{T-8H}^{T+8H}S_7(t+u_1+\cdots+u_\alpha)\,dt$$

とする．あとは[Step 2][Step 3]と同様に，$S_4(t)$, $S_5(t)$ については"trivial bound"を用い，$S_6(t)$ は積分してから式(4)を使い，$S_7(t)$ の入った積分は積分を実行したあとで α を十分大きくとることによって，求める評価(5)が出てくることになる．([1], Lemma 24). 以上が Balasubramanian による $\psi(T)$ の評価の道筋である．

文献

[1] R. Balasubramanian, An improvement on a theorem of Titchmarsh on the mean square of $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$, Proc. London Math. Soc. (3) 36 (1978) 540–576.

[2] G.A. Kolesnik, On the estimation of some exponential sums, Acta Arith. 25 (1973) 7–30. (in Russian)

[3] E.C. Titchmarsh, On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (V), Quart. J. Math. Oxford 5 (1934) 195–210.

[4] G.H. Hardy – J.E. Littlewood, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes, Acta Math. 41 (1918) 119–196.

[5] A.E. Ingham, Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function, Proc. London Math. Soc. (2) 27 (1926) 273–300.

[6] C.L. Siegel, Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astr. und Physik 2 (1932) 45–80.

[7] K. Matsumoto, The mean square of Dirichlet L-functions, Proc. Japan Acad. 58 (1982) 443–446.

[8] ———, Dirichlet の L-函数の 2 乗平均について, In: "Fourier analysis on arithmetical sequences", 数理研講究録.

[9] ———, On a theorem of Carlson for Dirichlet series of finite order, in preparation.

[10] E.C. Tirchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford (1951).

付記．講演では[9]の内容について話しましたが，その後証明の中にミスが見つかり，現在修正原稿を準備中です．そうした事情もあって，この稿では[9]の内容にまでは触れないことにしました．しかしこの稿をM.I.P.の解説を中心にまとめたのは，当初からの予定です．雑な解説になりましたが，詳細にたちいると相当のページ数を要することになるので，御了承ください．