数理解析研究所講究録
第518巻 1984年 38-51

3次元多様体の同相写像の位相的エントロピーについて

阪大理 小林 毅 (Tsuyoshi Kobayashi)

§1. Introduction.

Thurstonは[Th]で双曲的なコンパクト連結曲面上の任意の自己同相写像 f は、次のいずれかをみたす写像 φ に isotopic なことを示した([F-L-P], [H-T], [M]も参照のこと)

(i) φ: periodic,

(ii) φ: pseudo-Anosov,

(iii) φ は reducible でその各 φ-component は (i) 又は (ii).

この φ を f の Thurstonの標準型と呼ぶことにする。

ここでは、geometricな 3-manifold上の自己同相写像に対して上のような標準型を見出すことを考える(geometricな 3-mfd. については[Sc]参照)。例えば hyperbolic 3-mfd. 上の任意の自己同相写像は periodic なものに homotopic である([Mo])。また Sol. 3-mfd. のうち Anosov型の torus bundleになっている ものも同様の性質をもつことが最近知られた([Sa])。

いま M を $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ 又は Nil 3-mfd. とする。この

とき次が成立する。

定理2. fをM上の自己同相写像とする。fは次のいずれかをみたす同相写像φに homotopic である。

(i) φ: periodic 型,

(ii) φ: pseudo-Anosov 型,

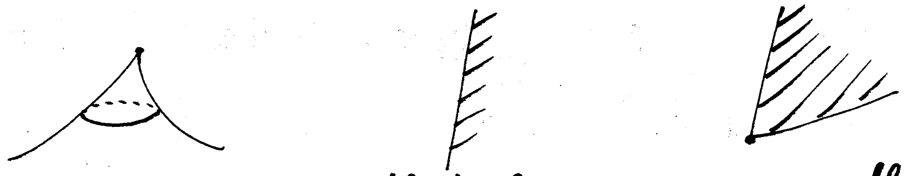
(iii) M内の essential torus の system $\mathcal{T}$ が存在しφは$\mathcal{T}$によって reducible。また$\mathcal{T}$のφ-invariant regular nbhd. $\eta(\mathcal{T})$が存在して$M-\mathrm{Int}\,\eta(\mathcal{T})$の各$\varphi$-component は(i)又は(ii)をみたす。$\mathcal{T}$の各 component T_jに対して$\eta(T_j)$をそれ自身に写す最小の正整数m_jが定まる。このとき$\varphi^{m_j}|_{\eta(T_j)}$は twist homeo. である。

さて、距離空間上の自己写像gに対しては<u>位相的エントロピー</u>と呼ばれる不変量$h(g)$ (≥ 0)が定義される([Bo]).
$h(g)$は、力学系的には、写像gの"乱雑さ"を表していると考えられる。ところで最初に述べた Thurston の標準型φは、$h(\varphi)\leq h(f)$をみたすこと、即ちφはその isotopy class の中での最小エントロピーを実現しており、特に$h(\varphi)>0$となるためには、φが pseudo-Anosov の成分を含むことが必要十分であることが知られている。以上のことから Thurston の標準型は力学系的

に重要な役割を果していることがわかる([H].[K].[Smi])。
§4では定理2で得られた φ が同様の性質をみたしていることを見る。

§2. Homeomorphisms of 2-dim. orbifolds.

ここでは 2-dim. orbifold上の同相写像の標準型を与える(定理1)。 orbifoldの定義については [Sc], [T_2]を参照のこと。
2-dim. orbifold上の singular points は cone, reflector line, 又は corner reflector のいずれかであるが以下では cone type の singularity のみをもつ 2-dim. orbifoldを考えることにする。



cone　　reflector line　　corner reflector

O (O' resp.)を cone singularity $x_1, \cdots, x_m$ ($m \geq 0$) ($x_1', \cdots, x_{m'}'$ ($m' \geq 0$) resp.) をもつ 2-dim. orbifoldとする。ここで x_i (x_i' resp.) での cone angle を $2\pi/p_i$ ($2\pi/p_i'$ resp.) とする。

<u>定義</u>　写像 $f: O \to O'$ が <u>O-homeomorphism</u> であるとは次の条件をみたすこととする。

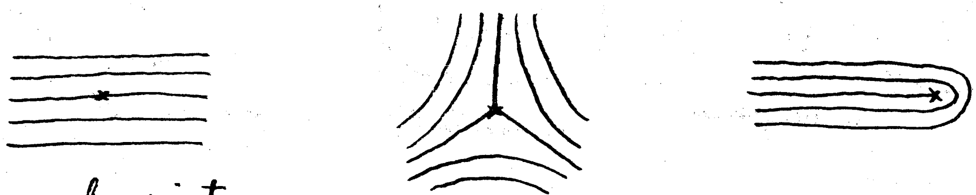
(i)　f は位相的に同相写像,

(ii)　f により O の singular points と O' の singular points は

1対1に対応する。特に $f(x_i)=x'_j$ とすると $p_i=p'_j$.

<u>定義</u> $f, f' : O \to O'$ を O-homeomorphisms とする。f と f' が O-isotopic であるとは、f と f' の間の位相的な homotopy F_t $(0 \le t \le 1)$ で、各 F_t が O-homeomorphism になっているようなものが存在することとする。

O 上の <u>measured foliation</u> $(\mathcal{F}, \mu)$ とは、O 上の singular foliation $\mathcal{F}$ と、$\mathcal{F}$ の leaf に横断的な measure μ の組とする。$\mathcal{F}$ は有限個の singularity $a_1, \cdots, a_\ell$ を持つことができるが、a_i が O の regular point ならば a_i での singularity は 3以上の prong をもつ saddle, a_i が O の singular point ならば、a_i は 1-pronged saddle も許すとする (cf. [T1]).



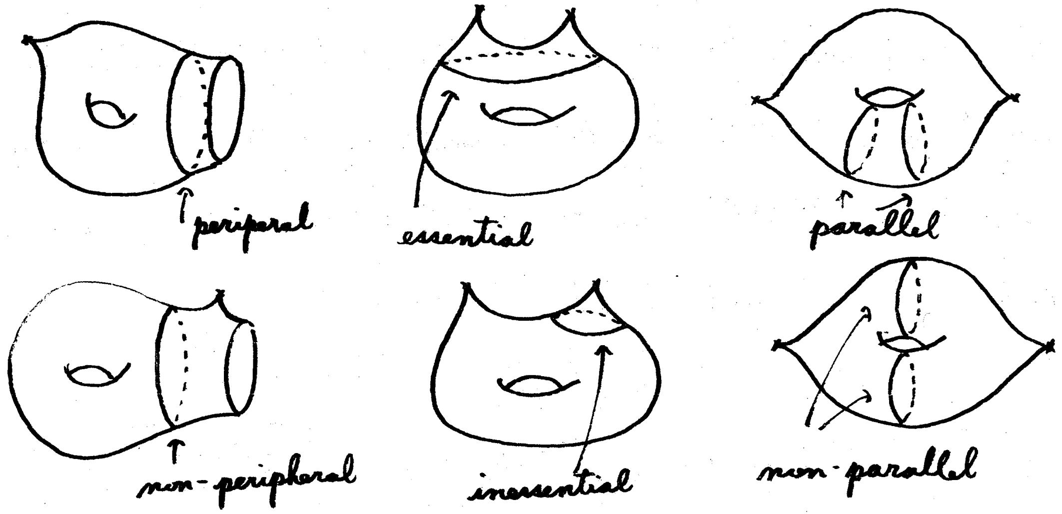
regular point　　3-pronged saddle　　1-pronged saddle

<u>定義</u>. O 上の self-O-homeo. f が <u>pseudo-Anosov</u> であるとは O 上の互いに横断的な measured foliation の組 $(\mathcal{F}^s, \mu^s), (\mathcal{F}^u, \mu^u)$ と実数 $\lambda > 1$ が存在して、次をみたすこととする;

(i) f は foliations $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ を保存する,

(ii) $f^*(\mu^s) = 1/\lambda \cdot \mu^s$, $f^*(\mu^u) = \lambda \cdot \mu^u$.

$a_1, a_2\ (\subset O)$ を O上の simple loops で singular points を含まないものとする。 a_1 が <u>peripheral</u> とは ∂O のある成分 b で $a_1 \cup b$ が singular point を含まない annulus を bound するようなものが存在することとする。 a_1 が <u>essential</u> とは a_1 は non-peripheral で，高々 1 個の singular point を含む disk を bound しないこととする。 a_1 と a_2 が <u>parallel</u> とは $a_1 \cup a_2$ が singular point を含まない annulus を bound することとする。



<u>定義</u> O上の self-O-homeo. f が Γ によって <u>reducible</u> とは Γ は互いに交わらない，O上の mutually non-parallel, essential, non-peripheral な simple loop の system で，$f(\Gamma) = \Gamma$ となることとする。

このとき

定理1. fをO上のself-O-homeo.とする。このときfは次のいずれかをみたすφにO-isotopic.

(i) φ: periodic,

(ii) φ: pseudo-Anosov,

(iii) φはΓによって reducible. またΓのφ-invariant regular nbhd. $\eta(\Gamma)$が存在して$M-\mathrm{Int}\,\eta(\Gamma)$の各$\varphi$-component は(i)又は(ii)をみたす。Γの各component Γ_jに対して$\eta(\Gamma_j)$をそれ自身に写すφの iteration の最小回数m_jが定まる。このとき$\varphi^{m_j}|_{\eta(\Gamma_j)}$は twist homeo. である。

証明. Oが singular points を含まないとする。いま$\chi(O)<0$とすると定理1は Thurston の定理([T_1])と一致する。$\chi(O)=0$とする。Oが Annulus 又は Möbius band とするとfは periodic homeo. に isotopic。Oが Klein bottle のとき、[Li]よりfは periodic homeo. に isotopic。Oが torus のとき$f_*: \pi_1(O)\to\pi_1(O)$を表す行列$A\ (\in SL(2,\mathbb{Z}))$を1つとりその固有値を$\lambda_1, \lambda_2$とする。このとき$\lambda_1=\pm1=\lambda_2$, λ_1, λ_2: 虚数, 又はλ_1, λ_2: 相異なる実無理数, に従ってfは reducible, periodic, 又は (pseudo) Anosov homeo. に isotopic になる([F-L-P] Exposé 1)。$\chi(O)>0$とする。このとき[Sma]より

f は periodic homeo. に isotopic.

O は singular points $x_1, \cdots, x_m$ $(m \geq 1)$ を含むとする。S を $O - \cup x_i$ の各 non-compact end に circle をつけ加えて得られる surface とする。f を適当に rel $(\cup x_i)$ homotopy で動かすことにより $f|_{O - \cup x_i}$ は $\bar{f}: S \to S$ に拡張するとしてよい。$\chi(S) \geq 0$ とすると上より $\bar{f}$ は periodic map $\bar{\varphi}$ に isotopic。$\varphi: O \to O$ を $\bar{\varphi}$ の projection とすると φ は f に O-isotopic で periodic。$\chi(S) < 0$ とすると [T1] より $\bar{f}$ の Thurston の標準型 $\bar{\varphi}$ が定まる。$\varphi: O \to O$ を $\bar{\varphi}$ の projection とすると $\bar{\varphi}$; periodic, pseudo-Anosov, or reducible に応じて φ は定理1の結論 (i), (ii), or (iii) をみたすことがわかる。

§3. Homeomorphisms of $M \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, or Nil.

M を $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, or Nil 3-mfd. とし f を M 上の self-homeo. とする。[Sc] より M は good 2-dim. orbifold O 上の Seifert fibration $p: M \to O$ を許容する。また f を homotopy で動かすことにより fiber preserving にできる。従って f から次をみたす O-homeo. $\psi: O \to O$ が定まる;

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[d, "p"] \\ O \arrow[r, "\psi"] & O \end{tikzcd}$$

ψ が pseudo-Anosov のとき (periodic resp.) f を pseudo-Anosov 型 (periodic 型 resp.) と呼ぶ。

f が $\mathcal{T}$ によって <u>reducible</u> とは $\mathcal{T}$ が M 内の mutually non-parallel, non-peripheral な, regular fiber の和となっているような incompressible torus の system で, $f(\mathcal{T})=\mathcal{T}$ をみたすこととする。

このとき定理 2 は定理 1 より直ちに従う。

以下では periodic 型の homeo., pseudo-Anosov 型の homeo. の性質を見てゆく。

$f: M \to M$ を periodic 型の homeo. とし, G を $f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(M)$ から生成される $\mathrm{Out}(\pi_1(M))$ の部分群とする。また $\psi: \mathrm{Out}(\pi_1(M)) \to \mathrm{Out}(\pi_1^{orb}(O))$ を cannonical homo. とする。このとき次の完全系列が得られる; $\quad 1 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\psi \longrightarrow G \longrightarrow \psi(G) \longrightarrow 1.$

$\psi(G)\ (< \mathrm{Out}(\pi_1^{orb}(O)))$ は finite cyclic group. また [Ko] より O が non-orientable のとき $\mathrm{Ker}\,\psi$ は有限群。従って O が non-orientable のとき G は有限群。これと [Zi] より次が得られる。

Proposition 3.1. O が non-orientable で $f: M \to M$ は periodic 型 homeo. とすると f は periodic homeo. に homotopic である。

Remark: O が orientable のときは Prop. 3.1 の命題は成立しない。

periodic 型 homeo. の定義より次は直ちに従う。

Proposition 3.2 $f: M \to M$ を periodic 型 homeo. に homotopic な homeo. とする。このとき或る正整数 n が存在して，M内の任意の incompressible torus T に対して $f^n(T)$ は T に isotopic になる。

pseudo-Anosov 型の homeo. に対しては Prop. 3.2 とは対照的に次が成立する。

Proposition 3.3 $f: M \to M$ を pseudo-Anosov 型 homeo. に homotopic な homeo. とし T を M内の incompressible torus とする。このとき任意の整数 $n\,(\neq 0)$ に対して $f^n(T)$ は T に homotopic でない。

証明. M内の或る incompressible torus T と或る正整数 n が存在して $f^n(T)$ は T に homotopic とする。 f は fiber preserving, また T は regular fiber の和になっているとしてよい ([JJ])。一般の位置の議論により $T, f(T), \cdots, f^{n-1}(T)$ は，互いに横断的と仮定できる。 $T \cap f(T) \cap \cdots \cap f^{n-1}(T)$ の component のうち isotopy ではずせるものは全て除いてしまう。そうして $T \cup f(T) \cup \cdots \cup f^{n-1}(T)$ から得られる 2-complex を P とし N を P の regular nbhd. とする。M は irreducible だから ∂N の component のうち compressible なもの

は，solid torus を bound することがわかる。∂N の各 compressible component に このsolid torus を付け加えて得られる M の submfd. を N' とすると N' は次の性質をもつ；・$\partial N'$ は incompressible tori ・$f(N')$ は N' に properly homotopic。いまこのような性質をもつ M の submfd. のうち包含関係に関して極大なものを $\bar{N}$ とする。このとき $i: \bar{N} \to M$ が homotopy eq. とすると f は periodic 型 homeo. に homotopic, homotopy eq. でないとすると f は reducible homeo. に homotopic となり矛盾。

§4. Topological entropy.

ここでは定理2で得られた φ がその homotopy class の中での最小エントロピーを実現していることを見る。

次の2つの定理は Bowen [Bo] による。

定理A　X を metric space, f を X 上の一様連続写像とする。このとき任意の正整数 m に対して　$h(f^m) = m \cdot h(f)$

定理B　X, Y を compact metric spaces, $p: X \to Y$, $f: X \to X$, $g: Y \to Y$ を次をみたす連続写像とする。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

このとき　$h(g) \leq h(f) \leq h(g) + \sup\{h(f|_{p^{-1}(y)}) ; y \in Y\}$

Lemma 4.1. Nを surface F上の circle bundle, $g: N\to N$を fiber preserving homeo. $\psi: F\to F$をgから induce される homeo. とすると $h(g)=h(\psi)$.

証明は CをNの fiber とすると $h(g|C)=0$ となる事実と定理B より直ちに従う。

以下Mを $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, or Nil 3-mfd. とする。

Proposition 4.2. $f: M\to M$を periodic 型の homeo. とすると $h(f)=0$.

証明 [Sc], [T2] より Mの finite cover $p: \bar{M}\to M$でMの Seifert bundle structure が $\bar{M}$の circle bundle structure に lift するものが存在する。このとき,或る $m\,(>0)$ が存在して f^mは $g: \bar{M}\to\bar{M}$に lift するようにできる。Sを$\bar{M}$の base space (: surface) とし $\bar{\psi}: S\to S$をgから誘導される homeo. とする。$\bar{\psi}$は periodic になることに注意すると:

$$
\begin{aligned}
h(f) &= \frac{1}{m}h(f^m) && (\text{定理A})\\
&= \frac{1}{m}h(g) && (\text{[F-L-P] Exposé 10})\\
&= \frac{1}{m}h(\bar{\psi}) && (\text{Lemma 4.1})\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Proposition 4.3. $f: M \to M$ を pseudo-Anosov 型の homeo. とすると $h(f) > 0$. 特に f はその homotopy class の中での最小エントロピーを実現している。

証明. $\overline{M}, S, g, \overline{\Psi}$ を Proposition 4.2 の証明と同様にとる。O を M の base orbifold, $\psi: O \to O$ を f から定まる pseudo-Anosov homeo. とする。また $\lambda (>1)$ を ψ から定まる定数とする。

Proposition 4.2 の証明より $h(f) = \frac{1}{m} h(\overline{\Psi})$。また [F-L-P] Exposé 10 より $h(\overline{\Psi}) = m \cdot \log \lambda > 0$。従って $h(f) = \log \lambda > 0$。

いま [F-L-P] Exposé 10 での議論より M 内の essential loop ℓ で $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log L(f^n(\ell)) = \lambda$ をみたすものが存在することがわかる，ここで $L(\alpha)$ は α に homotopic な loop の長さの infimum を表す。これより f' を f に homotopic な homeo. とすると $h(f') \geq \log \lambda$ ([F-L-P] Exposé 10), 即ち f はその homotopy class の中で最小エントロピーを実現している。

Proposition 4.2, 4.3 および $T^2 \times [0,1]$ 上の twist homeo. の entropy が 0 になるという事実から定理 2 で得られた φ がその homotopy class の中で最小エントロピーを実現していることがわかる。

References

[B-F] Blanchard, P., Franks, J.: The dynamical complexity of orientation reversing homeomorphisms of surfaces: Invent. Math. 62, 333-339 (1980)

[Bo] Bowen, R.: Entropy for group endomorphism and homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 153, 337-342 (1976)

[F-L-P] Fathi, A., Laudenbach, F., Poenaru, V.: Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque 66-67 (1979)

[H] Handel, M.: The entropy of orientation reversing homeomorphisms of surfaces, Topology 21, 291-296 (1982)

[H-T] Handel, M., Thurston, W.: New proofs of some results of Nielsen, preprint

[J] Jaco, W.: Lectures on three manifold topology, CBMS Regional conference series in Math. No. 43 (1980)

[K] Kobayashi, T.: Links of homeomorphisms of a disk and topological entropy, preprint

[Ko] Kojima, S.: Bounding finite group actions on 3-manifolds, preliminary report

[Li] Lickorish, W.B.R.: Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds, Proc. Camb. Philos. Soc. 59, 307-317 (1963)

[M] Miller, R.: Geodesic laminations from Nielsen's viewpoint, Advances in Math. 45, 189-212 (1982)

[Mo] Mostow, G.: Strong rigidity of locally symmetric spaces, Ann. Math. Studies 78, Princeton Univ. Press, 1973

[Sa] Sakuma, M.: private communication

[Sc] Scott, P.: The geometries of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc. 15, 401-487 (1983)

[Sma] Smale, S.: Diffeomorphisms of the 2-sphere, Proc. A.M.S. 10, 621-626 (1959)

[Smi] Smillie, J.: Periodic points of surface homeomorphisms with zero entropy, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 3, 315-334 (1983)

[T_1] Thurston, W.: On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces I, preprint

[T_2] Thurston, W.: The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture note, Princeton University 1978

[Zi] Zimmermann, B.: Periodische Homöomorphismen Seifertscher Faserräume, Math. Z. 166, 289-297 (1979)