数理解析研究所講究録
第 518 巻 1984 年 57-74

On wild knots which are weakly flat

広島大理 垣水修 (Osamu Kakimizu)

1. Introduction.

三次元球面S^3のなかのtopological knot —— S^3のなかにtopologicalにうめこまれたS^1 —— を考える。ふたつの性質"flatness"と"weak flatness"とのギャップに関する考察から得られた結果(Theorem I, II, III)について述べる。

top. knot $J \subset S^3$が <u>flat</u> であるとは，homeo. $h: S^3 \longrightarrow S^3$ で $h(J) = S^1$ をみたすものが存在することである．ここで $S^1 \subset S^3$ は standard な 1-sphere である．

また，top. knot $J \subset S^3$が <u>weakly flat</u> であるとは，$S^3 - J$ が $S^3 - S^1$ と homeomorphic になることである．

"top. knot $J \subset S^3$はいつweakly flatになるか？"については，つぎのhomotopy theoreticなかたちの解が得られている．(Daverman [6])．

<u>Weak flatness criterion</u>. top. knot $J \subset S^3$ が weakly flat であるためには，つぎの(1)，(2)をみたすことが必要十分，

(1) $\pi_1(S^3 - J) \cong \mathbb{Z}$,

(2) J は global 1-alg property をもつ i.e.

$S^3 \supset {}^{\forall}\underset{\text{open}}{U} \supset J$, $U \supset {}^{\exists}\underset{\text{open}}{V} \supset J$ s.t. $V-J$ の loop で $V-J$ のなかで null homologous なものは，$U-J$ のなかで null homotopic である．

PL 3-mfd M の closed subset X が <u>tame</u> であるとは，homeo. $h: M \to M$ で $h(X)$ が M の sub polyhedron になるものが存在することである．このような h が存在しないとき，X は <u>wild</u> であるという．Fig 1. は wild knot の例である．

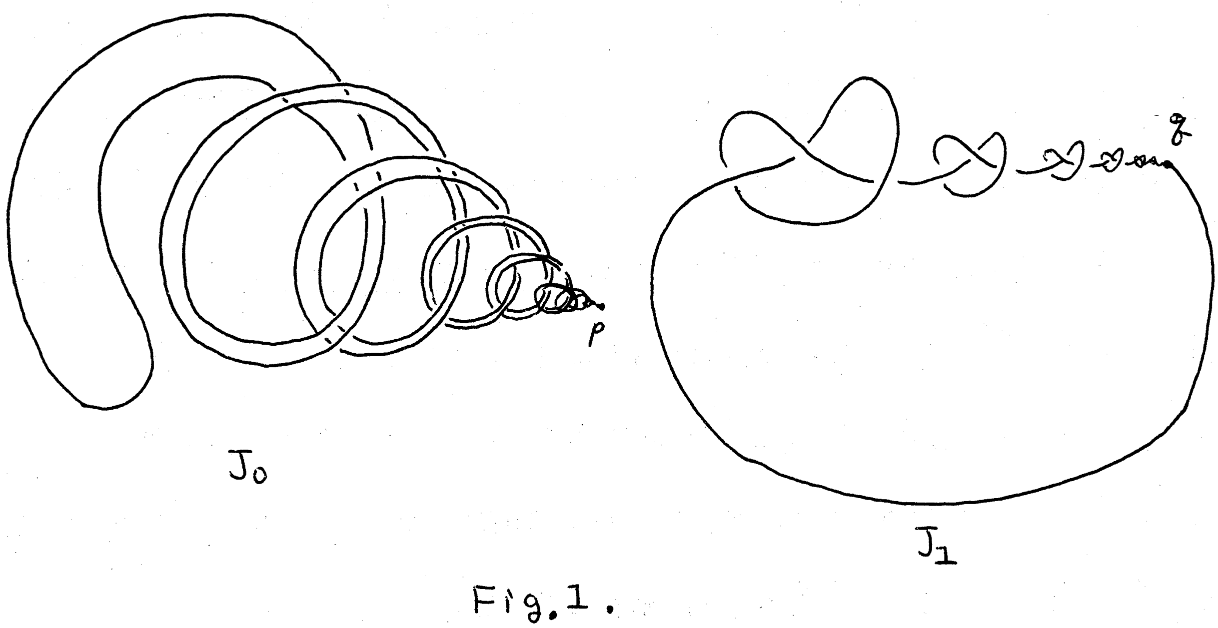

Fig.1.

PL 3-mfd M の sub set X と点 $x \in X$ に対して，
X : <u>locally tame</u> at x とは，x の M のなかでの開近傍 U と，homeo. $\varphi : U \to \mathbb{E}^3$ （$x \in \mathrm{Int}\, M$ のとき）または $\varphi : U \to \mathbb{E}^3_+$ （$x \in \partial M$ のとき）が存在して $h(X \cap U)$ が $\mathbb{E}^3$ または $\mathbb{E}^3_+$ の sub polyhedron になることである．

PL 3-mfd M のなかの proper な k-mfd L （i.e. $\partial L \subset \partial M$, $\mathrm{Int}\, L \subset \mathrm{Int}\, M$）と点 $x \in L$ に対して，
L : <u>locally flat</u> at x とは，x の M のなかでの開近傍 U が存在して，$(U, U \cap L)$ が，$x \in \mathrm{Int}\, L$ のとき $(\mathbb{E}^3, \mathbb{E}^k)$ と，$x \in \partial L$ のとき，$(\mathbb{E}^3_+, \mathbb{E}^k_+)$ と homeomorphic になることである．
このとき，"L : locally flat at x" と "L : locally tame at x" とは同値である．

$$E(L) = \{ x \in L \mid L : \text{not locally flat at } x \text{ in } M \}$$

とおく．$E(L)$ は L の closed subset であることに注意する．
Bing は [2] においてつぎの定理を証明した．

PL 3-mfd のなかのすべての点で locally tame な closed subset は tame である．

したがって top. knot $J \subset S^3$ に対して，

$$J : \text{tame} \iff E(J) = \emptyset .$$

ここで問題をつぎのかたちで考える.

"top. knot $J \subset S^3$に対し, polyhedral knot $K \subset S^3$が存在して, S^3-JがS^3-Kとhomeo. になっているとき, $E(J)$はどのような性質をもつか?"

これに対してつぎの結果が得られた.

Theorem I. $S^3 \supset J$: top. knotに対して.

$S^3 \supset {}^\exists K$: polyhedral knot

s.t. $S^3-J \approx S^3-K$ (homeomorphic)

$\Longrightarrow$ $E(J)$は孤立点をもたない.

Corollary I′. $S^3 \supset J$はTheorem Iのものとする. 可算集合$C \subset J$に対して, J: locally flat at $\forall x \in J-C$.

$\Longrightarrow$ J: tame.

Corollary I″. $S^3 \supset J$: weakly flat top. knotに対し,

$J \supset {}^\exists C$: 可算集合, J: locally flat at $\forall x \in J-C$.

$\Longrightarrow$ J: flat.

weakly flat かつ wild な knot が存在する. さらに一般に つぎがなりたつ.

Theorem II. $S^3 \supset {}^\forall K$: polyhedral knot に対して,

$S^3 \supset {}^\exists J$: wild knot s.t.

(1) $S^3 - J \approx S^3 - K$.

(2) $E(J) = J$.

また, Theorem I において "$S^3 - J \approx S^3 - K$" を "$S^3 - J \simeq S^3 - K$ (ホモトピー同値)" に弱めることはできない.

すなわち,

Theorem III. $S^3 \supset {}^\forall K$: polyhedral knot に対して,

$S^3 \supset {}^\exists J$: wild knot s.t.

(1) $S^3 - J \simeq S^3 - K$.

(2) $E(J) =$ one point.

2. Theorem I の証明の概略.

Bing によって証明されたつぎの定理は重要な役割をもつ.

(2.1) Theorem (Bing [2, Th 9]). PL 3-mfd M の closed subset X に対し,

(a) X : locally tame at $\forall x \in X$

(b) $M \supset {}^\exists Y$ closed subset, X : locally polyhedral at $\forall x \in X \cap Y$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon : M - Y \to (0, \infty)$ continuous map

$\exists h : M \to M$ homeo. s.t.

(c) $h|Y = id$

(d) $d(h(x), x) < \varepsilon(x)$, $\forall x \in M - Y$

(e) $h(X)$: sub polyhedron of M.

J, K は Theorem I の仮定をみたしているとする．さらに，J∋p に対して，p の J での開近傍 U があって，J : locally flat at $\forall x \in U - p$ であると仮定する．このとき，J は点 p においても locally flat であることを示せば Theorem I は示される．

まず，仮定 $S^3 - J \approx S^3 - K$ から，S^3 のなかの locally flat な solid torus の列 $\{P_n\}$ で，

(1) $\mathrm{Int}\, P_n \supset P_{n+1}$, $\bigcap_n P_n = J$

(2) $P_n - \mathrm{Int}\, P_{n+1} \approx \partial P_n \times [0,1]$

をみたすものがとれる．

また，$U \approx E^1$ と仮定してよい．p の S^3 における連結な開近傍 W で，$U = W \cap J$ となるものがとれる．(2.1) から，

$\exists h : S^3 \xrightarrow[\approx]{} S^3$ s.t. $h|S^3 - W = id$, $h(p) = p$

$W - p \supset h(U - p)$ sub polyhedron.

したがってはじめから，J : locally polyhedral at $\forall x \in U - p$ であると仮定してよい．$U - p$ の $W - p$ のなかでの regular

neighborhoodをとり、それとpとのunionを$\mathcal{N}$とおく.
$\mathcal{N}$はWのclosed subsetで、$(\mathcal{N}-p, \mathcal{U}-p)\approx(\mathcal{U}-p)\times(B^2,0)$.
$\mathcal{N}'$をFig 2.のようにとると、$\exists\varphi:(\mathcal{N}', \mathbb{E}^1, 0)\underset{\approx}{\rightarrow}(\mathcal{N}, \mathcal{U}, p)$.

$$\mathcal{N}_+=\varphi(\mathcal{N}'\cap[0,1]\times\mathbb{E}^2),\quad \mathcal{N}_-=\varphi(\mathcal{N}'\cap[-1,0]\times\mathbb{E}^2)$$

$$D_+=\varphi(\mathcal{N}'\cap 1\times\mathbb{E}^2),\quad D_-=\varphi(\mathcal{N}'\cap(-1)\times\mathbb{E}^2)$$

$$E_+=\partial\mathcal{N}_+-\overset{\circ}{D}_+,\qquad E_-=\partial\mathcal{N}_--\overset{\circ}{D}_-$$

とおく. このとき$\{P_n\}$は

(3) $\forall n$, $P_n\cap(\partial D_+\cup\partial D_-)=\emptyset$

をみたすと仮定してよい.

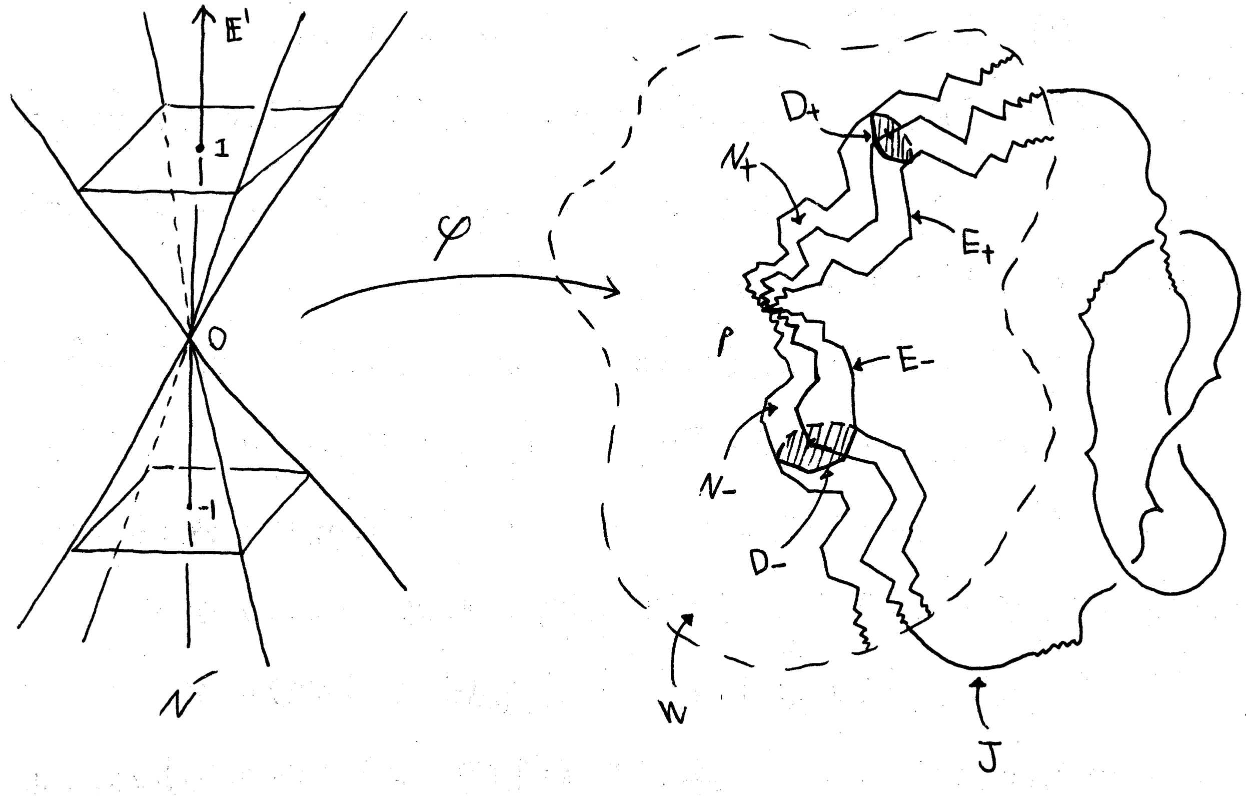

Fig.2.

上記の$\{P_n\}$に対して、(2.1)とGeneral position theorem

から，$\exists h: S^3 \xrightarrow{\approx} S^3$ s.t.

(a) $h|J = id$

(b) $h(P_n)$: polyhedral solid torus

(c) $h(P_n) \cap (\partial D_+ \cup \partial D_-) = \emptyset$

(d) $h(\partial P_n)$: in general position relative to $\mathring{E}_+ \cup \mathring{E}_- - p$.

このとき，$\{h(P_n)\}$ は再び(1)〜(3)をみたす．したがって $\{P_n\}$は，はじめから(1)〜(3)およびつぎの(4)，(5)をみたすと仮定してよい．

(4) $S^3 \supset P_n$: polyhedral solid torus

(5) ∂P_n : in general position relative to $\mathring{E}_+ \cup \mathring{E}_- - p$

ここで，$0 < \delta < \mathrm{diam}\, J$ をひとつfixする．つぎをみたす $0 < \varepsilon < 1$ をとる．すなわち，

$$N_\varepsilon = \varphi(N' \cap [0, \varepsilon] \times \mathbb{E}^2),\ N_{-\varepsilon} = \varphi(N' \cap [-\varepsilon, 0] \times \mathbb{E}^2)$$

$$D_\varepsilon = \varphi(N' \cap \varepsilon \times \mathbb{E}^2),\quad D_{-\varepsilon} = \varphi(N' \cap (-\varepsilon) \times \mathbb{E}^2)$$

$$E_\varepsilon = \partial N_\varepsilon - \mathring{D}_\varepsilon,\quad E_{-\varepsilon} = \partial N_\varepsilon - \mathring{D}_{-\varepsilon}.$$

とおくとき，

$$N_\varepsilon \cup N_{-\varepsilon} \subset \mathrm{Int}\, P_1,\ \mathrm{diam}(N_\varepsilon \cup N_{-\varepsilon}) < \delta.$$

p の $\mathrm{Int}\, P_1$ のなかでの連結な開近傍 V で，$\mathrm{diam}\, V < \delta$，$V \cap N = (N_\varepsilon - D_\varepsilon) \cup (N_{-\varepsilon} - D_{-\varepsilon})$ をみたすものをとる．ここで $F = \mathrm{Fr}\, V - (\mathring{D}_\varepsilon \cup \mathring{D}_{-\varepsilon})$ つぎの条件をみたす $n_1 > 1$ が

とれることが示せる．

(6) $\forall n \geqq n_1$, $P_n \cap F = \emptyset$

(7) $\forall n \geqq n_1$, $J \hookrightarrow P_n$ deformation retract

(8) $\forall n \geqq n_1$, $P_n \supset X$ closed subset, $\operatorname{diam} X < \delta$

$\Longrightarrow X$: null homotopic in P_n.

ここでしばらく，$P \equiv P_{n_1}$ について考える．(5) から，

$\partial P \cap (E_\varepsilon \cup E_{-\varepsilon}) = \partial P \cap (\mathring{E}_\varepsilon \cup \mathring{E}_{-\varepsilon} - p) = S_1 \cup \cdots \cup S_k$

有限個の互いに交わらない simple closed curve (s.c.c.).

(8) から，S_i : null homotopic in P だから，$\{S_i\}$ はつぎのふたつに分類される．

(ア) S_i は ∂P 上で disk を bound する．

(イ) S_i は P の meridian curve.

一方 S_i が E_ε または $E_{-\varepsilon}$ 上で bound する disk を D_i とすると，$\{S_i\}$ はつぎのように分類される．

(ア)′ $D_i \not\ni p$

(イ)′ $D_i \ni p$

このとき，上記のふた通りの分類は一致する．実際，S_i に対して，

(ア) $\Leftrightarrow$ (ア)′ $\Leftrightarrow$ $0 = [S_i] \in H_1(S^3 - J) \cong \mathbb{Z}$

(イ) $\Leftrightarrow$ (イ)′ $\Leftrightarrow$ $[S_i]$ は $H_1(S^3 - J)$ の generator.

ここで，P を surgery することにより，(ア)＝(ア)′ type の S_i はすべて除去でき，(イ)＝(イ)′ type の S_i は

$\mathring{E}_\varepsilon - p$，$\mathring{E}_{-\varepsilon} - p$ 上にそれぞれひとつづつにできる．こうして得られたpolyhedral solid torus をR_1とする．

つぎに$\mathrm{Int}\, R_1 \supset P_{n_2}$となる$n_2 > n_1$をとり，$P_{n_1}$から$R_1$を得た操作を$P_{n_2}$に適用して$R_2$を作る．以下この方法をくり返し適用してゆくことにより，S^3のなかのpolyhedral solid torusの列$\{R_n\}$でつぎをみたすものがとれる．

(1) $\mathrm{Int}\, R_n \supset R_{n+1}$ ，$\bigcap_n R_n = J$

(2) $R_n - \mathrm{Int}\, R_{n+1} \approx \partial R_n \times [0,1]$

(3) $\partial R_n \cap (\mathring{E}_\varepsilon - p) = S_n$ 1個のs.c.c.

$\partial R_n \cap (\mathring{E}_{-\varepsilon} - p) = S'_n$ 1個のs.c.c.

S_n，S'_nは共にR_nのs.c.c.

ここで，∂R_n上のふたつのmeridian curve S_n, S'_nによってかこまれるannulusのうち$\mathrm{Int}\, N_\varepsilon \cup \mathrm{Int}\, N_{-\varepsilon}$と交わらない方を$L_n$とおき，

$$M_n = (R_n - \mathrm{Int}\, R_{n+1}) \cap (V - \mathrm{Int}\, N_\varepsilon \cup \mathrm{Int}\, N_{-\varepsilon})$$

とおくと，E.M. Brown [5 , Theorem (5.1)] から，

$$(M_n, L_n, L_{n+1}) \approx L_n \times ([0,1], 0, 1)$$

が示せる．

S_1と∂E_ε，S'_1と$\partial E_{-\varepsilon}$がそれぞれ$E_\varepsilon$，$E_{-\varepsilon}$上でかこむannulusを，$A, A'$とおき，2-sphere $D_\varepsilon \cup A \cup L_1 \cup A' \cup D_{-\varepsilon}$が$S^3$のなかでboundする3-cellのうち$p$を含むものを

Cとする．このとき，Fig 3に示すようにして，

homeo. $\varphi : (C, C\cap J) \longrightarrow (B^3, B^1)$

が得られる．したがって　Jはpにおいてlocally flatである．

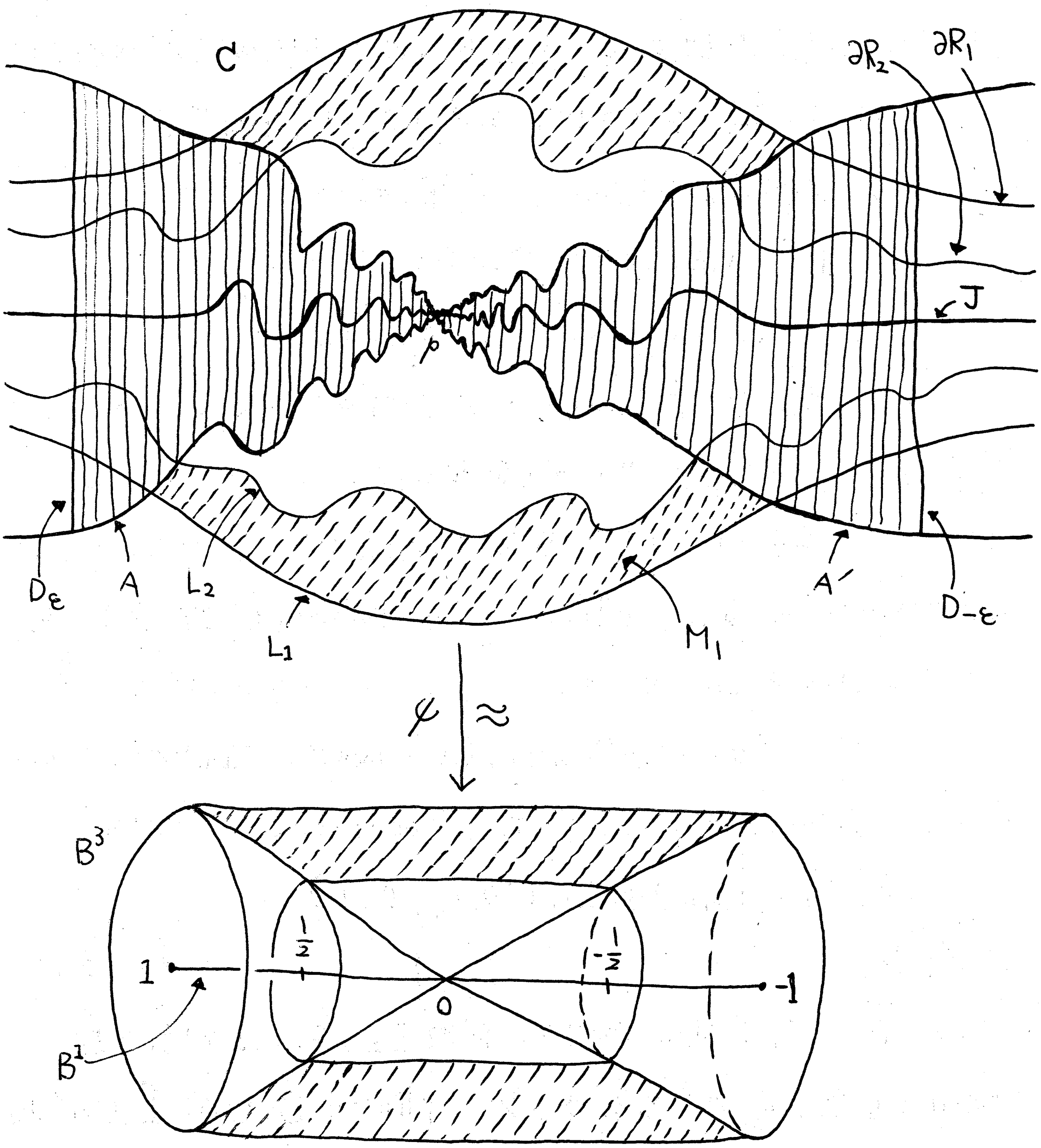

Fig. 3.

3. Theorem II の証明の概略.

(3.1) Theorem. wild knot $J^* \subset S^3$ でつぎをみたすものが存在する.

(a) J^* : weakly flat

(b) $S^3 \supset {}^\exists U$ open, $h : (U, U \cap J) \xrightarrow{\approx} (E^3, E^1)$

$D \equiv h^{-1}(B^3)$, $D' \equiv S^3 - \mathrm{Int}\, D$ とおくと

(c) $\mathrm{Int}\, D' \supset E(J^*)$, $E(J^*)$ は J^* の sub arc

(d) $D' - J^* \approx (\partial D - J^*) \times [0, \infty)$

Theorem (3.1) から Theorem II はつぎのようにして得られる. Polyhedral knot K に対して求める wild knot J を

$$J = K \# J^* \# J^* \# \cdots$$

(K と無限個の J^* との connected sum) によって定義する. ここで, 無限個の connected sum は一意的でないから与えられた条件をみたすように連結の仕方を注意して指定する必要がある. (Fig 4).

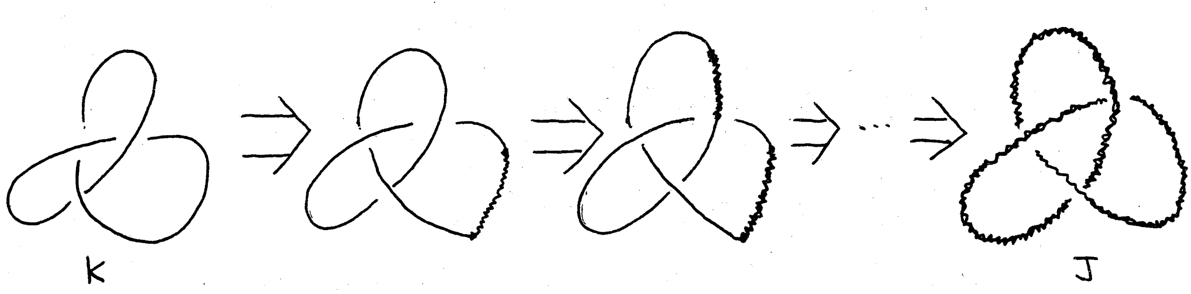

Fig. 4.

Theorem (3.1)の証明の方針：

(1) Bingの"hooked rug"の方法により，特別な3-cell $C \subset S^3$ を構成する．さらに knot $J^* \subset \partial C$，sub arc $A \subset J^*$，dense subset $X \subset A$ を選ぶ．

(2) $S^3 - C \approx E^3$ を示す．

(3) ∂C : locally flat at $\forall x \in \partial C - A$，

$S^3 - C$: not 1-LC at $\forall x \in X$ を示す．

($S^3 - C$: 1-LC at $x \in X$ とは，
$S^3 \supset_{open} {}^{\forall}U \ni x$，$U \supset_{open} {}^{\exists}V \ni x$ s.t. $V - C$ の任意の loop は $U - C$ で null homotopic となること．)

これから，$E(\partial C) = A$ となる．

(4) A : cellular in S^3 を示す．i.e. S^3のなかの3-cellの列$\{C_i\}$で，$\mathrm{Int}\, C_i \supset C_{i+1}$，$\bigcap_i C_i = A$ をみたすものが存在する．これは $S^3 - A \approx E^3$ と同値である．

これから，$S^3 \approx S^3/A \supset \partial C/A \approx S^2$

$\partial C/A$: locally flat mod $\langle A \rangle$

ここで，点$\langle A \rangle \in \partial C/A$は，projection $\partial C \longrightarrow \partial C/A$ によるAの image．

(5) $S^3/A \supset \partial C/A$: locally flat を示す．

これから，$S^3/A \supset J^*/A$: flat

したがって，$S^3 \supset J^*$: weakly flat．

(6) U, h, D, D' を $\mathrm{Int}\, D' \supset A$, $D' - J^* \approx (\partial D - J^*) \times [0, \infty)$ をみたすように選ぶ.

(7) $S^3 - J^*$: not 1-SS at $\forall x \in X$ を示す.

$$\left(\begin{array}{l} S^3 - J^* : 1\text{-}SS \text{ at } x \text{ とは,} \\ S^3 \underset{\text{open}}{\supset} {}^{\forall}U \ni x,\ U \underset{\text{open}}{\supset} {}^{\exists}V \ni x \text{ s.t. } V - J^* \text{内の loop で} \\ S^3 - J^* \text{ 内で null homotopic なものは, } U - J^* \text{内} \\ \text{で null homotopic となる.} \end{array} \right)$$

これから, $E(J^*) = A$.

(1)の C の構成法については, Bing[3]とAlford[1]を参照のこと. その概略は, まず, S^3のなかにflatな3-cellをとり, その表面に, Fig 5のように cube-with-eye-boltを生やす. その各cube-with-eye-boltのなかにFig 5のようにdiskをとり, そのdiskの斜線部に, Fig 6のようにしてcube-with-eye-boltを生やしてゆく. 各eye-boltのloopはつぎのeye-boltのstemをまわる, ただし, 最後のloopは"free"で, 最初のeye-boltのstemをまわるloopはない. Cは, この操作を無限に繰り返した極限として得られる. J^* はFig 5の S^1の極限である. また, Aは S^1 上の arc で, Fig 5の破線で示した部分の極限である.

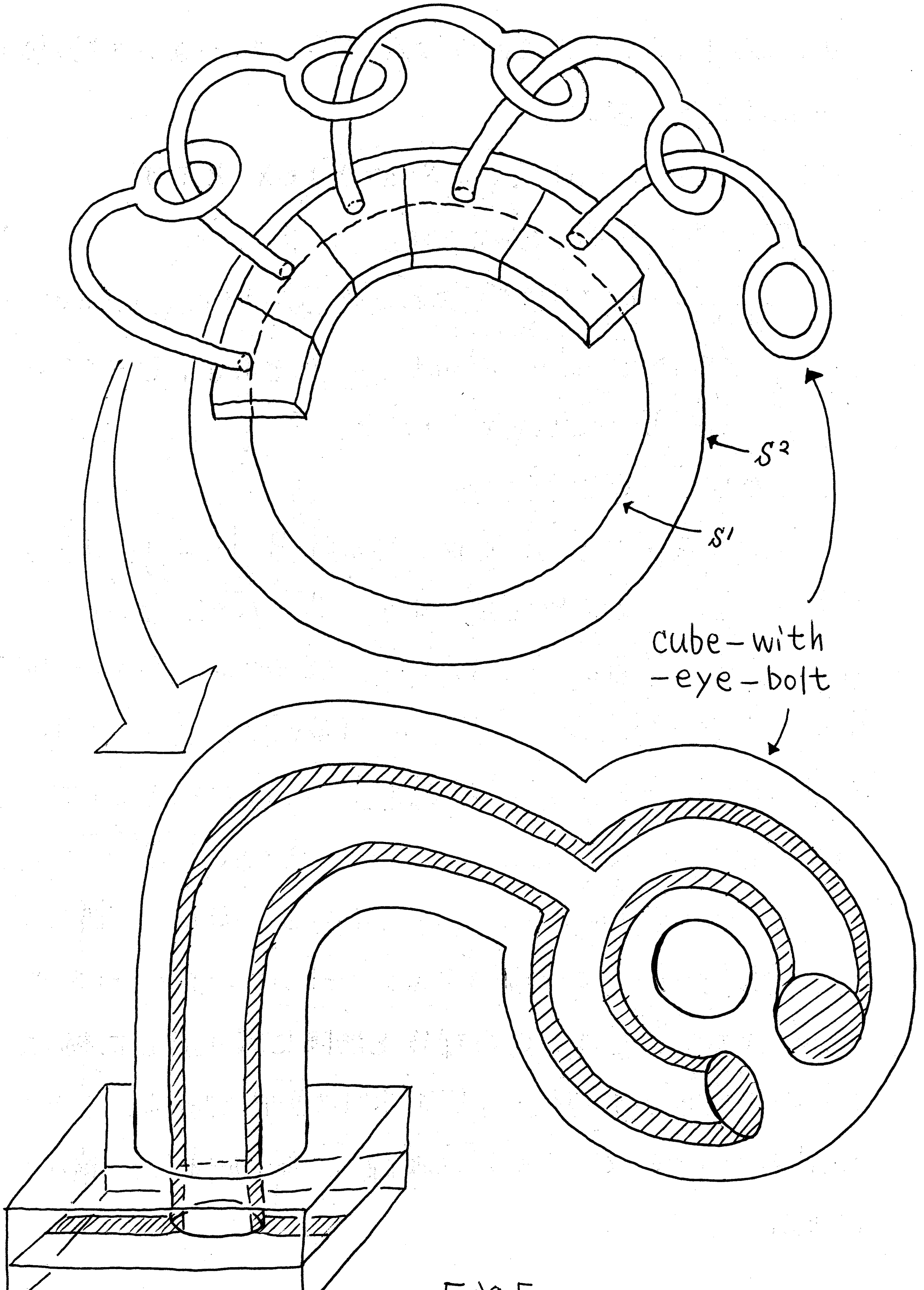

Fig.5

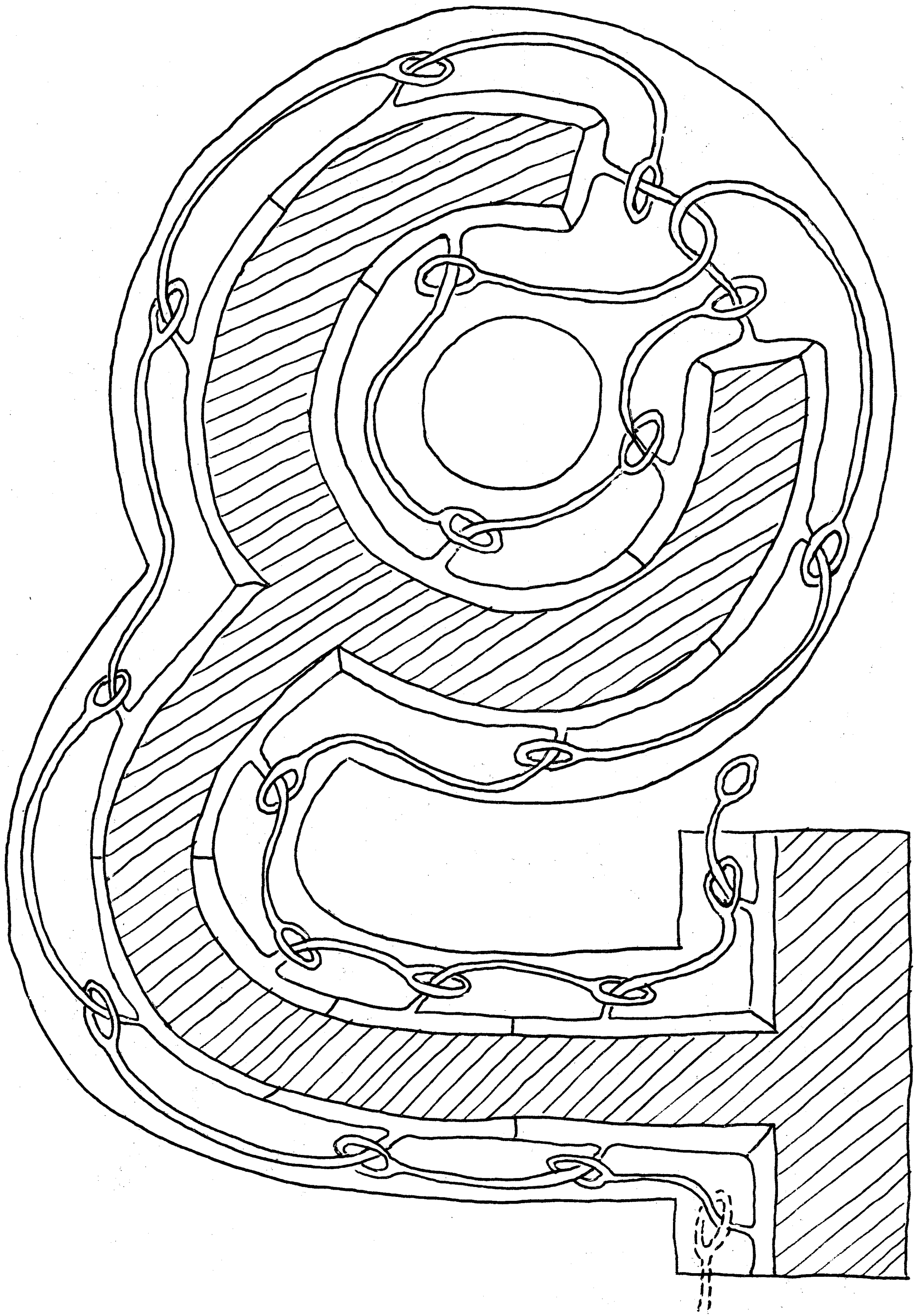

Fig. 6

4. Theorem III の証明

Fig 1 の wild knot J_0 を考える。$S^3 - J_0 \simeq S^1$、$E(J_0) = \{p\}$ である (cf. Fox and Artin [8])。

polyhedral knot K に対して，J を J_0 と K との connected sum として定ぎする。(Fig 7)。

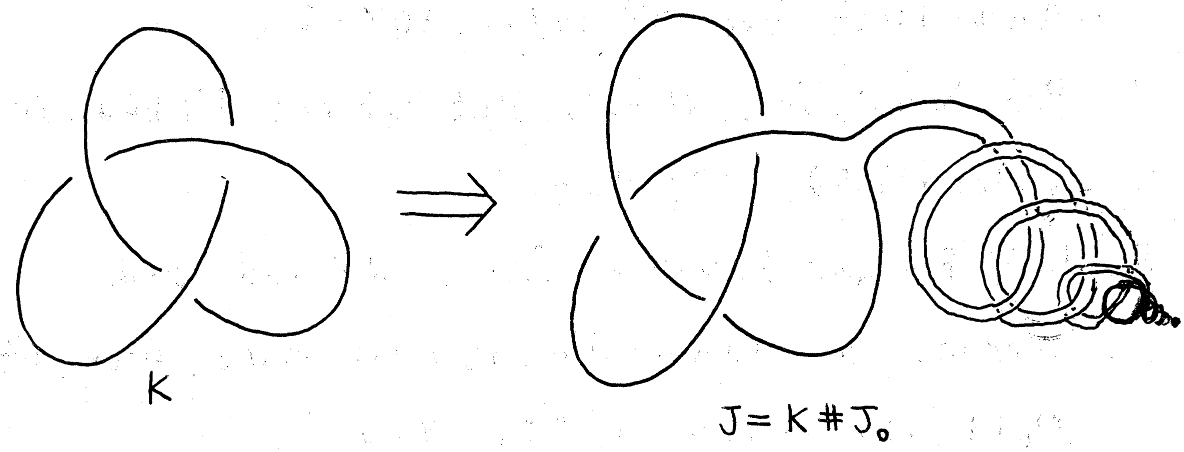

Fig.7.

References

1. W.R. Alford, Some "nice" wild 2-spheres in E^3, Topology of 3-manifolds and Related Topics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1962), 29-33.

2. R.H. Bing, Locally tame sets are tame, Ann. of Math. (2) 59 (1954), 145-158.

3. ——, A wild surface each of whose arcs is tame, Duke Math. J. 28 (1961), 1-15.

4. ______, A surface is tame if its complements is 1-ULC, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 294-305.

5. E.M. Brown, Unknotting in $M^2 \times I$, Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966), 480-505.

6. R.J. Daverman, On weakly flat 1-spheres, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 207-210.

7. P.F. Duvall, Jr., Weakly flat spheres, Michgan Math. J. 16 (1969), 117-124.

8. R.H. Fox and E. Artin, Some wild cells and spheres in three-dimensional space, Ann. of Math. (2) 49 (1948), 979-990.

9. J.G. Hollingsworth and T.B. Rushing, Homotopy characterizations of weakly flat codimension 2 spheres, Amer. J. Math. 98 (1976), 385-394.

10. D.R. McMillan, Jr., A criterion for cellularity in manifold, Ann. of Math. (2) 79 (1964). 327-337.

11. D.V. Meyer, $\mathbb{E}^3$ modulo a 3-cell, Pacific J. Math. 13 (1963), 193-196.

12. D. Rolfsen, Knots and Links, Mathematics Lecture Series 7, Publish or Perish Inc. (1976).