

M/GI/1 待ち行列の待ち人数分布の近似式

東京理科大学・理工 宮沢政清 (Masakiyo Miyazawa)

1. 序論

本論文の目的は、M/GI/1 型待ち行列モデル（すなわち、ポアソン到着で、1人の窓口をもつ待ち行列）の待ち人数の平衡状態における分布の近似式を求めることである。また、有限待ち台数をもつモデル、M/GI/1/k についても考察する。

M/GI/1 に関する近似については、すでに各種のものが提案されている。平均待ち時間については、Takahashi (1977) や Boxima, Cohen and Huffels (1980) が優れた近似式を得ている。また、待ち人数分布については、Tijms, Van Hoorne, and Feenstra (1981) が、かなりよい結果を出している。

このように、すでにいくつもの優れた近似式が知られているのだが、その作り方をみると、経験と直感に頼っている部分が多いように思う。たとえば、Takahashi (1977) や Boxima et al. (1980) では、平均待ち時間の近似式を、未知パラメー

夕を含む形で与え、後で、適切な条件を満すようにこのパラメータを定めている。この場合、どんな形のパラメータ表現から出発するかは問題である。彼らの論文では、その与え方は、かなり直感的な方法である。平均や分散であれば、このような方法でも可能かもしれないが、分布となると困難である。

一方、Tijms et al. (1981) では、いくつかの条件を与え、それらから近似解を求めている。Hokstad (1978) も同様にして待ち人数分布の近似式を得た。この方法は、与える条件の意味が明確ならばわかりやすいし、また、モデルの変化に対する拡張性にも富んでいる。この論文でもこれと同じ考えが使われる。ただし、Tijms et al. (1981) や Hokstad (1978) と少し異なる点は、厳密解そのものを未知量を含んだ形で解き出し、その後で各種の条件を与え近似解を求めている所である。このような方法によれば、条件を変えて近似解を改良することが容易である。また、原理的には、近似の精度をいくらでも上げることができると考えられる。この論文においては、特に優れた近似式が得られたわけではない。ここでは、むしろ、近似式を得たり、改良したりするための提案であると考えるべきである。ただし、M/GI/1/k に関しては、かなりよい結果が得られたことを付記しておく。

2. 平衡方程式及び厳密解のパラメータ表現

この節では、 $M/GI/s/k$ について論じる。このモデルでは待つことのできる人数が k に制限される。すなわち、 k 人待っている所へ到着した客は、すぐにシステムを退去する。この客も一応、到着及び退去に数える。また、 $k=+\infty$ のときには、通常の $M/GI/s$ に一致する。

以下においては、まず、 $M/GI/s/k$ に関する平衡方程式を作り、次に、この方程式を、待ち人数分布の母関数に関して未知の量を含んだ形で解き出す。この節の結果は、近似のための仮定を何もしていないので、厳密に成り立つものである。はじめに、記号の説明をしよう。

P --- 任意の時点における確率 (E ... その期待値)

P_0 --- 時刻 0 に客の到着があったという条件のもとでの条件付確率 (E_0 ... その期待値)

P_1 --- 時刻 0 に客の退去があったという条件のもとでの条件付確率 (E_1 ... その期待値)

δ --- 客のサービス時間: G はその分布を表す。

λ --- 客の平均到着率 (= 平均退去率), $\rho = \lambda E\delta$

$l(t)$ --- 時刻 t でのシステム内人数

$$l = l(0), \quad l^- = l(0-), \quad l^+ = l(0+)$$

$r_i(t)$ --- i 番目の窓口でサービス中の客の残りサービス時間。

($i=1, 2, \dots, A$) 窓口の指定がないときはしを略す。

$$r_i = r_i(0), \quad r_i^- = r_i(0-), \quad r_i^+ = r_i(0+)$$

$$r = r(0), \quad r^- = r(0-), \quad r^+ = r(0+)$$

$$P_n = P(l = n), \quad P_n^0 = P_0(l^- = n), \quad P_n^* = P_1(l^+ = n)$$

$\tilde{G}(\theta) = E(e^{-\theta S})$: サービス時間のラプラス変換

$$\phi_j(\theta) = E(e^{-\theta r} | r > 0, l = j) \quad (j=0, 1, 2, \dots, A+k, \theta \geq 0)$$

$$\phi_j^0(\theta) = E_0(e^{-\theta r} | r > 0, l^- = j) \quad (\quad \quad \quad)$$

$$\phi_j^*(\theta) = E_0(e^{-\theta r} | r > 0, l^+ = j) \quad (\quad \quad \quad)$$

本論で扱うモデルでは、客は空いている窓口を等確率で選ぶとする。このとき、 r_1, \dots, r_A は、同一分布に従う。Fukuh の公式と同様にして、 $P_n^0 = P_n^*$ ($n=0, 1, 2, \dots$) であることがわかる。また、到着がポアソン過程であることから、 $P_n = P_n^0$ ($n=0, 1, 2, \dots$) も得られる。ここに、 $\{(l(t), r_1(t), \dots, r_A(t))\}$ は、定常過程をなしていると仮定する。 $k = +\infty$ のときは、平衡条件 $\lambda E(S) < 1$ のもとで、そのような定常過程を作ることができ (Miyazawa (1979) を参照)。 $k < +\infty$ のときは、到着過程がポアソンであることより、何の条件もなしに、その定常過程を作ることができ。これらのことから、Miyazawa (1983) による保存則を、この定常過程に適用できる。これらの詳略については、Miyazawa (1984) を見るといい。次に結果のみをあげる。

定理 2.1 $M/GI/\Delta/k$ ($k < +\infty$ or $k = +\infty$) において, 平衡状態が存在するならば, $\forall \theta > 0$ と, $j = 1, 2, \dots, \Delta + k - 1$ に対して,

$$(2.1) \quad \theta \min(\Delta, j) \phi_j(\theta) p_j \\ = \lambda \{ (\min(\Delta, j) - 1) \phi_{j-1}^*(\theta) + 1 - (\tilde{G}(\theta) I_{\{j < \Delta + k\}} + \min(\Delta, j - 1) \phi_{j-1}(\theta)) \} p_{j-1} \\ - \lambda \{ \tilde{G}(\theta) I_{\{j > \Delta + k\}} + \min(\Delta - 1, j) \phi_j^*(\theta) - \min(\Delta, j) \phi_j(\theta) \} p_j$$

が成り立ち, また, $k < +\infty$ のときには, $j = \Delta + k$ に対して,

$$(2.2) \quad \theta \Delta \phi_j(\theta) p_j = \lambda [1 + (\Delta - 1) \phi_{j-1}^*(\theta) - \min(\Delta, j - 1) \phi_{j-1}(\theta) - \tilde{G}(\theta) I_{\{k = 0\}}] p_{j-1}$$

が成り立ち。ここに, I_A は, 集合 A の指示関数である。

次に, $\theta \geq 0$, $|x| \leq 1$ に対して,

$$\psi(\theta, x) = \sum_{i=\Delta}^{\Delta+k} \phi_i(\theta) x^{i-\Delta} p_i$$

とおく。(2.1), (2.2) に, $x^{i-\Delta}$ を掛けて加えることにより, 次式が得られる。

$$(2.3) \quad (\theta \Delta - \lambda(1-x)) \psi(\theta, x) + \lambda(\hat{G}(\theta) - x) \psi(\theta, x) \\ = \lambda(1 - \tilde{G}(\theta)) + L(\theta) + M(\theta, x) + N(\theta, x)$$

ここに,

$$L(\theta) = \lambda(\Delta - 1) (\phi_{\Delta-1}^*(0, \theta) - \phi_{\Delta-1}^0(0, \theta))$$

$$M(\theta, x) = \lambda (\tilde{G}(\theta) - x - (1-x) \phi_{\Delta+k}(\theta)) x^k p_{\Delta+k}$$

$$N(\theta, x) = \lambda (\Delta-1) (1-x) \sum_{i=1}^{\Delta+k-1} (\phi_i(\theta) - \phi_i^*(\theta)) x^{i-\Delta} p_i$$

とする。

いま、 $\theta = \theta(x) \equiv \lambda(1-x)/\Delta$ とおくと、 $\theta\Delta - \lambda(1-x) = 0$ である。したがって、(2.3) より、

$$(2.4) \quad \psi(\theta, x) = \frac{(1 - \tilde{G}(\theta(x))) p_{\Delta-1} + L(\theta(x)) + M(\theta(x), x) + N(\theta(x), x)}{\tilde{G}(\theta(x)) - x}$$

が得られる。 $p_{\Delta-1}$, $L(\theta)$, $M(\theta, x)$, $N(\theta, x)$ は、必ずしも簡単な量ではないが、これらを何らかの方法で定めることができれば近似解が得られる。(2.4) は、 $\psi(\theta, x)$ の一種のパラメータ表現であるが、1つの面白い性質をもちている。それは、(2.4) の分母で、その零点を ζ とすると、すなわち、

$$\tilde{G}(\theta(\zeta)) - \zeta = 0 \quad (\zeta > 0)$$

とすれば、 ζ は、 $M/PH/\Delta$ の場合に、 p_n/p_{n+1} の $n \rightarrow \infty$ での極限值になってくる (Takahashi (1981) を参照)。これより、 $k = +\infty$ ときには、(2.4) の ψ は、 L, M, N 等が、 $0 \leq x \leq 1$ で有限であるなら、十分くとも大きくなるとして p_n のよい近似を与えることが期待できる。

3. $M/GI/\Delta$ の近似式

$k = +\infty$ の場合には、 $M(\theta, x) \equiv 0$ であるから、 L, N 及び

p_{s-1} を定めればよい。ここで、このために、いくつかの仮定をおこなう。これらの仮定が使われると、 ψ は、もはや真の解ではなくなるので、 $\psi(0, x)$ (app) と表わす。 p_{s-1} などの他の量についても、仮定を使って値を定めたときには、(app) と付記する。

p_0, p_1, \dots, p_{s-1} に対しては、M/M/s の値が、かなりより近似を与えることが知られている。M/M/s のときの p_i を $p_i(\text{exp})$ と表わすことにしよう。すなわち、

$$p_0(\text{exp}) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{s-1} (\lambda ES)^j / j! + (\lambda ES)^s / (1-p)s!}$$

$$p_j(\text{exp}) = \frac{(\lambda ES)^j}{j!} p_0 \quad (j=1, 2, \dots, s-1)$$

とおく。また、s の残余寿命の定常分布のラプラス変換を $\tilde{G}_e(\theta)$ とする。すなわち、

$$\tilde{G}_e(\theta) = \frac{1 - \tilde{G}(\theta)}{\theta ES}$$

次の補題は、 p_0, \dots, p_{s-1} に対して、M/M/s 近似が可能となる十分条件を与えている。

補題 3.1 $|\phi_j'(0)| = |\phi_j^{*'}(0)| < +\infty$ ($j=1, 2, \dots, s-1$) ならば、

(3.1) $p_j(\text{app}) = p_j(\text{exp})$ ($j=0, 1, \dots, s-1$)
が得られる。

よく、サービス時間の残余寿命分布として、 \tilde{G}_e を仮定することがあるが、次の補題は、これに一つの理論的裏づけを与えらる。

補題 3.2 任意の $\theta > 0$ と $j = 1, 2, \dots, \Delta-1$ に対して、

$\phi_j(\theta) = \phi_j^*(\theta)$ ならば、 $j = 1, 2, \dots, \Delta-1$ に対して、

$$(3.3) \quad \phi_j^*(A_{pp}) = \tilde{G}_e$$

が得られる。

これらの補題においては、独立性の仮定がないことに注意してほしい。Nozaki and Ross (1978) にあつたような独立性の仮定は、結局必要ないことがわかる。さて、近似解を得るために次の仮定を使おう。

$$(A) \quad \phi_j'(0) = \phi_j^{*'}(0) \quad j = 1, 2, \dots, \Delta-1$$

$$(B) \quad \phi_{\Delta-1}(\theta) = \phi_{\Delta-1}^{*'}(\theta) \quad \forall \theta > 0$$

$$(B') \quad \phi_{\Delta-1}'(0) = \phi_{\Delta-1}^{*'}(0)$$

$$(C, j) \quad \phi_i(\theta) = \phi_i^*(\theta) \quad \forall \theta > 0, \quad i = j, j+1, \dots$$

$$(C', j) \quad \phi_i'(0) = \phi_i^{*'}(0) \quad i = j, j+1, \dots$$

ここに、微分は、すべて右微分を表わし、それらは、有限の値になつてゐるものとする。(C, j), (C', j') では、j の値によつて条件が変ることには注意してほしい。(2.4) より、す

ぐ次の結果が得られる。

定理 3.1 $M/GI/A$ において, (A), (B), (C, A) が成り立つならば, $\forall x (|x| < 1)$ に対して,

$$(3.3) \quad \psi(0, x)(app) = \frac{1 - \tilde{G}(\theta(x))}{\tilde{G}(\theta(x)) - x} P_{\Delta-1}(exp)$$

が得られる。ここに, $\rho = \lambda E S / \mu < 1$ とする。

この結果は, Hokstad (1978) 及び Tijms et al. (1981) の Case B の近似式である。(3.3) より平均待ち人数を求めることができるが, 平均に関してだけならば, 条件は次のようにゆるめることができる。

系 3.1 $M/GI/A$ において, (A), (B'), (C', A) が成り立つならば,

$$(3.4) \quad E \bar{z}(app) = \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2\mu^2(1-\rho)^2} P_{\Delta-1}(exp).$$

ここに, $\bar{z} = (L-1)^+$ を表わす, \bar{z} は待ち人数を表わす。

(3.4) は, Nozaki and Ross (1978) の結果と同じである。(3.3), (3.4) は, 数値的に必ずしも満足できるものではない。Tijms et al. (1981) では, Case A としてこれを改良した

近似式を提案してゐる。これは、定理 3.1 の仮定をゆるめることにより改善を試みよう。

定理 3.2 $M/GI/\Delta$ において, (A), (B), (C, $\Delta+1$) が成り立ち $\phi_\lambda(\theta)(app)$ 及び $P_\lambda(app)$ が与えられたならば, $\forall x (0 < x < 1)$ に対して,

$$(3.5) \quad \psi(0, x)(app)$$

$$= \frac{\lambda x (1 - \tilde{G}(\theta(x))) P_{\lambda, (app)} + (1-x) (\Delta \theta(x) - \lambda) \phi_\lambda(\theta(x))(app) + \lambda \tilde{G}(\theta(x)) P_\lambda(app)}{\lambda (\tilde{G}(\theta(x)) - x)}$$

が得られる。(3.5) は, $M/M/\Delta$ に対しては, 真の値と一致する。

この定理の詳しい証明は, Miyazawa (1984) にある。

(3.5) を実際に使うためには, $\phi_\lambda(\theta)(app)$ と $P_\lambda(app)$ を具体的に与えてやる必要がある。ここでは次の 2 条件からこれらを定めよう。

$$(D) \quad \phi_\lambda(\theta)(app) = \tilde{G}_\lambda(\theta) \quad \forall \theta > 0$$

$$(E, \theta_0) \quad \phi_\lambda(\theta_0) = \phi_\lambda^*(\theta_0)$$

条件 (E, θ_0) においては, θ_0 の値により条件は変わる。(D) 及び (E, θ_0) の条件のもとで, P_λ が定理 1 の関係式をもちいて次のように決定できる。

$$(3.6) \quad P_0(\text{app}) = \frac{\lambda(1-\tilde{G}(\theta_0, \lambda))}{(\theta_0, \lambda - \lambda)\phi_0(\theta_0) + \lambda\widehat{G}(\theta_0)} P_{\lambda-1}(\text{exp})$$

この論文では、 $\theta_0 = \lambda$ として近似式を作る。 $\theta_0 = \frac{\lambda}{2}$ とした場合には、 $P_0(\text{app})$ は Hokstad (1978) の近似における P_0 に一致する。(3.6)及び (D) により、(3.5)の $\psi(0, x)$ が決定できる。これより次の系が得られる。

系 3.2 $M/GI/\lambda$ において、(A), (B'), (C', $\lambda+1$) (D) (E, θ_0) が成り立つならば、

$$(3.7) \quad E\eta(\text{app}) = \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2\lambda^2(1-\rho)^2} P_{\lambda-1}(\text{exp}) + \frac{\rho P_{\lambda-1}(\text{exp}) - (1+\rho)(S_0^2-1)/2 P_0(\text{app})}{1-\rho}$$

が得られる。ここに、 $P_0(\text{app})$ は、(3.6)により与えられるとする。

η の分散については (3.5) より求まることがここでは略す。

4. $M/GI/\lambda/k$ の場合

$k < +\infty$ とし、有限待ち合い室の場合を考える。この場合には、(C, f) の条件を次のように変える。

$$(C_1, j, \Delta+k) : \phi_i(\theta) = \phi_i^*(\theta) \quad \forall \theta > 0, \quad i = j, j+1, \dots, \Delta+k-1$$

$$(C_2, \Delta+k) \quad \phi_{\Delta+k}(\theta) = \tilde{G}_2(\theta) \quad \forall \theta > 0.$$

有限待ち合列室の場合には、(2.4)式は、すべての x で存在しなければならぬ。したがって、 $\tilde{G}(\theta(x)) - x = 0$ を満たす x に対し、(2.4)の右辺の分布は0でなければならぬ。 $x = \rho > 0$ が、その1と異なる唯一の解である。これと、仮定により次の結果が得られる(Miyazawa (1984))。

定理 4.1 $M/GI/A/k$ において $(A), (B), (C_1, \Delta, \Delta+k), (C_2, \Delta+k)$ が成り立つならば、

$$(4.1) \quad P_0(\text{app}) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\Delta-1} \frac{1}{j!} (\lambda E(S))^j + \frac{(1-\rho\gamma^{-r})(\lambda E(S))^\Delta}{(1-\rho)^{\Delta!}}}$$

$$(4.2) \quad P_j(\text{app}) = \frac{(\lambda E(S))^j}{j!} P_0(\text{app}) \quad (j=1, 2, \dots, \Delta-1)$$

$$(4.3) \quad P_{\Delta+k}(\text{app}) = \rho\gamma^{-k} P_{\Delta-1}(\text{app})$$

$$(4.4) \quad \psi(0, x)(\text{app}) = \frac{1 - \tilde{G}(\theta(x))}{\tilde{G}(\theta(x)) - x} (P_{\Delta-1}(\text{app}) - x^k P_{\Delta+k}(\text{app}) / \rho) + x^k P_{\Delta+k}(\text{app})$$

が得られる。また、これらは、 $M/M/1$ の場合には、真の値と一致する。

平均待ち人数については、(4.4)より、

系 4.1 定理 4.1 と同じ条件のもとで、

$$(4.5) \quad E\{q(\text{app})\} = \frac{\lambda^2 E\{S^2\} (P_{\Delta-1}(\text{app}) - P_{\Delta+k}(\text{app})/p)}{2\lambda^2(1-p)^2} - \frac{k\rho P_{\Delta+k}(\text{app})}{1-p}$$

$$(4.6) \quad E\{q^2(\text{app})\} = \frac{2\rho^2 m_3 + 3\rho(1+\rho^2 m_2)m_2}{6(1-p)^3} (pP_{\Delta-1}(\text{app}) - P_{\Delta+k}(\text{app})) \\ - \frac{k\rho}{(1-p)^2} (m_2 + (k-1)(1-p)) P_{\Delta+k}(\text{app})$$

ここに、 $P_{\Delta-1}(\text{app})$, $P_{\Delta+k}(\text{app})$ は、(4.2) と (4.3) で与えられる。また、 $m_i = E\{S^i\}/(E\{S\})^i$ ($i=2,3$) とする。

定理 4.1 と 系 4.1 の近似式には、いくつかの欠点がある。その第一は、 $\rho=1$ に対しては使えないことである。(4.1) や (4.5) を見てわかるように、 $\rho=1$ のときは、計算できない。次に、(4.4) は、本来 k 次の多項式でなければならぬが一般にはそうならない。これらの欠点にもかかわらず数値的にはかなりよい結果が出る。これについては次節で考察する。なお (4.4) は、 $k=0$ のときは真の値に一致し、 $k=\infty$ のときは、Hokstad (1978) の近似式と同じものになることを注意しておこう。もちろん、(4.1)~(4.6) をさらに改善することは容易であるが、式が複雑化しすぎてしまう。

5. 考察

得られた近似式についての考察をおこなう。数値計算例についても検討してみる。

(1) M/GI/1 の場合

定理 3.2 の (3.5) による近似は、 $\rho \uparrow 1$ のときには、heavy traffic 近似に一致するので、真の値に近づく。これは、Hokstad (1978) や Tijms et al. (1981) の case A, Case B の場合と同じである。しかし、 $\rho \downarrow 0$ に対しては、ずれが生じる。これは、たとえば、Boximati et al. (1980) によって提案された normed cooperation coefficient N_{G_0} を計算するとわかる。Burman and Smith (1983) によると

$$(5.1) \quad \lim_{\rho \downarrow 0} N_{G_0}(\rho) = \frac{ES^2}{2ES \int_0^{\infty} (1 - G_R(u))^2 du}$$

が成り立つ (ただし、M/PH/1 の場合のみ証明されている)。

二二に、 G_E は、 ρ の残余寿命定率分布であり、そのラプラス変換は、 \tilde{G}_R である。(3.5) の場合、条件 (D), (E, θ_0) (θ_0 は任意) のもとで $N_{G_0}(\rho)$ を計算すると、

$$(5.2) \quad \lim_{\rho \downarrow 0} N_{G_0}(\rho) = \frac{ES^2}{2ES \cdot ES}$$

となる。したがって、M/M/1 に対しては (5.1), (5.2) は一致するが、一般には一致しない。実際、 $\rho \downarrow 0$ にして数値計算

結果を比較すると、Hokstad (Tijms et al. の Case B と同じ) よりはやいが、真の値との相対誤差は大きくなる。この点を除いては、一般に、Tijms et al. の Case A の近似式とたいへんよく似た数値を与える。一部の数値例と、相対誤差のグラフを、表1及び図1に与える。

(ii) $M/GI/k/k$ ($k < +\infty$) の場合.

この場合には、陽な近似式は、Nozaki and Ross (1978) を除いてほとんどない。彼らの結果は平均待ち人数であるが、数値例をみてわかるように余りよくない。これに対して、(4.5)の近似式は、これをずると改善している。前節の終りに述べたように、 $\rho = 1$ では、(4.5)の近似式は使えない。そこで $\rho = 1$ の付近を調べてみたが、数値的に案外安定している。なお、(4.5)の式は、Nozaki and Ross (1978) の仮定を完全にゆるめたものから導かれたもので、(4.5)が、彼らの近似式よりよいのは当然のことである。 P_0 や P_{n+k} についても定理4.1で近似式が得られたので、数値的な比較をおこなった。この場合には、 P_0 は全体的にやいが、 P_{n+k} (つまり呼損率) は、 ρ が小さい所で誤差が大きいうちである。逆に ρ が1以上では非常によい近似になっている。なおこれらの数値結果は表2及び表3に与えられている。

表1. M/GI/Δ の比較 (平均待ち人数)

サービス分布: $pM(\mu_1) + (1-p)M(\mu_2)$ (起指数分布)

ここに, v を変動係数とし, $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{v^2 - 1}{v^2 + 1} \right]^{\frac{1}{2}}$, $\mu_1 = 2p, \mu_2 = 2(1-p)$

とする。(appを除いて数値は, Tijms et al. (1981)より引用した。)

	(i) $v=2, p=0.8$			(ii) $v=5, p=0.8$			(iii) $v=5, p=0.9$	
	s=5	s=10	s=25	s=5	s=10	s=25	s=10	s=25
(exact)	3.170	2.267	1.093	5.923	4.036	1.767	16.53	11.67
(app)	3.144	2.309	1.175	5.921	4.319	2.188	16.96	12.83
(Tij)	3.140	2.304	1.173	5.870	4.283	2.180	16.90	12.81
(Hok)	3.325	2.455	1.255	6.649	4.910	2.509	18.06	13.71

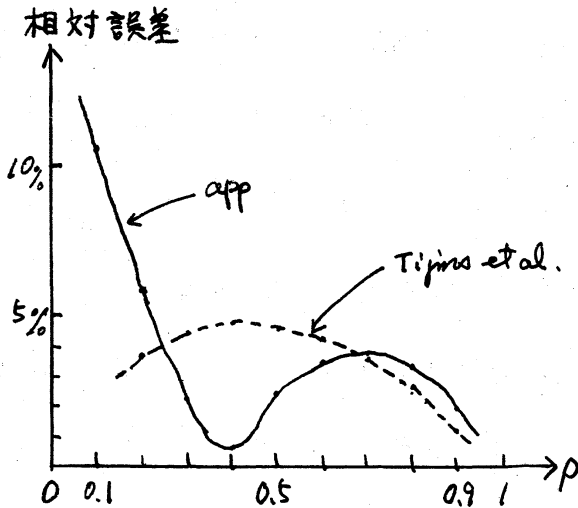
app = (3.7) of this report ($\theta_0 = \lambda$)

Hok = Hokstad's (= Case B of Tijms et al.'s)

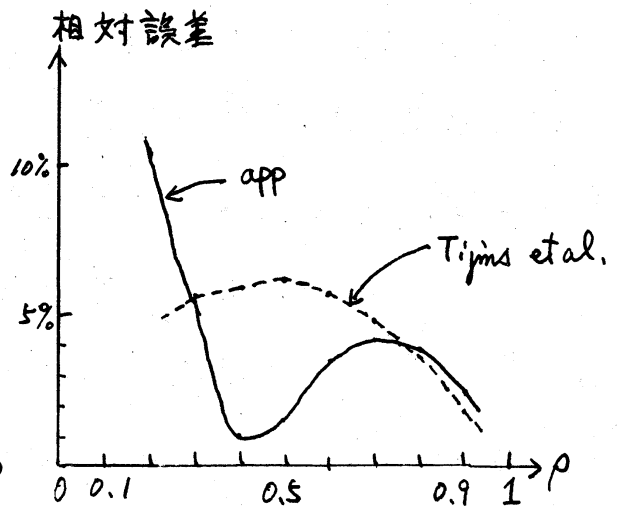
Tij = Case A of Tijms et al.'s

図1 M/GI/Δ の比較 (平均待ち人数の相対誤差)

サービス分布: 次数 j のアーラン分布



$\Delta=2, j=5$ の場合



$\Delta=4, j=4$ の場合

表2 M/GI/s/k の比較 (平均待ち人数)

サービス分布 : 次数3のア-ラン分布 / Noz = Nozaki and Ross の近似

サーバー数 : $s=3$

	k=2	k=5	k=10	k=20	k=30	
$\rho=0.3$	0.01880	0.02196	0.02202	0.02202		(exact)
	0.01777	0.01998	0.02001	0.02001		(app)
	0.01452	0.01971	0.02001	0.02001		(Noz)
$\rho=0.6$	0.17720	0.32808	0.36752	0.36943	0.36943	(exact)
	0.18478	0.32072	0.35322	0.35474	0.35474	(app)
	0.08459	0.25134	0.34046	0.35485	0.35458	(Noz)
$\rho=0.9$	0.4833	1.429	2.744	4.19538	4.71849	(exact)
	0.52701	1.48026	2.76944	4.18212	4.68857	(app)
	-0.76830	-0.31598	0.87958	2.79606	3.89426	(Noz)
$\rho=1.1$	0.66878	2.23844	5.83879	14.1267	23.4519	(exact)
	0.76975	2.50339	5.98994	14.3170	23.6604	(app)
	3.01045	5.66563	9.58967	17.9966	27.4018	(Noz)
$\rho=1.5$	1.04995	3.61523	8.49902	18.4903	28.4903	(exact)
	1.15033	3.77609	8.67426	18.6666	28.6666	(app)
	2.40875	6.15710	13.1454	28.0047	43.0000	(Noz)

表3 M/GI/s/k の比較 (客の損失率($=P_{s+k}$))

条件は表2と同じ。

	k=2	k=5	k=10	k=20	k=30	
$\rho=0.3$	2.84E-3	2.48E-5	6.65E-9	4.23E-16		(exact)
	1.78E-3	1.24E-5	3.11E-9	1.98E-16		(app)
$\rho=0.6$	4.20E-2	4.60E-3	1.16E-4	7.34E-8	4.66E-11	(exact)
	3.42E-2	3.59E-3	9.00E-5	5.71E-8	3.62E-11	(app)
$\rho=0.9$	1.4 E-1	6.02E-2	2.12E-3	3.85E-3	7.83E-4	(exact)
	1.29E-1	5.62E-2	2.01E-3	3.68E-3	7.47E-4	(app)
$\rho=1.1$	2.22E-1	1.48E-1	1.12E-1	9.51E-2	9.18E-2	(exact)
	2.12E-1	1.44E-1	1.11E-1	9.50E-2	9.18E-2	(app)
$\rho=1.5$	3.74E-1	3.39E-1	3.33E-1	3.33E-1	3.33E-1	(exact)
	3.62E-1	3.38E-1	3.33E-1	3.33E-1	3.33E-1	(app)

注) 真の値は、高橋幸夫氏(東北大)による Lumping 法をもとりに計算した。解の収束誤差は $1.0E-7 (= 10^{-7})$ である。

参考文献

- [1] Burman, D.Y. and Smith, D.R. (1983) A light-traffic theorem for multi-server queues, *Math. Opns. Res.* 8, 15-25.
- [2] Hokstad, P. (1978) Approximations for the M/G/m queue. *Opns. Res.* 26, 510-523.
- [3] Kimura, T. (1983) M/G/1 待ち行列の近似について
(本講究録)
- [4] Miyazawa, M. (1979) A formal approach to queueing processes in the steady state and their applications. *J. Appl. Prob.* 16, 332-346.
- [5] Miyazawa, M. (1983) Intensity conservation law for queues with randomly changed service rate. (submitted to *J. Appl. Prob.*)
- [6] Miyazawa, M. (1984) Approximations of the queue-length distributions in M/GI/s and M/GI/s/k queues. (in preparation).
- [7] Nozaki, S.A. and Ross, S.M. (1978) Approximations in finite-capacity multi-server queues with Poisson arrivals. *J. Appl. Prob.* 15, 826-834.
- [8] Takahashi, Y. (1977) An approximation formula for the mean waiting time of an M/G/c queue. *JORSJ* 20, 150-163.
- [9] Tijms, H.C., Van Hoorn, M.H., and Federgruen, A. (1981) Approximations for the steady-state probabilities in the M/G/c queue. *Adv. Appl. Prob.* 13, 186-206.
- [10] Van Hoorn, M.H. (1983) Algorithms and approximations for queueing systems. *Vrije Universiteit te Amsterdam (Doctor Thesis)*.
- [11] Boxima, O.J., Cohen, J.W., and Huffels, N. (1980) Approximations of the mean waiting time in an M/G/s queueing systems. *Opns. Res.* 27, 1115-1127.