

弱 D-Markov 過程を利用した直列型待ち行列モデルの近似解析

東北大・経済 高橋 幸雄 (Yukio Takahashi)

1. 弱 D-Markov 過程

$X_t, t=0,1,2,\dots$, を有限状態空間 $S=\{1,2,\dots,s\}$ 上の確率過程とし、 $D_i, i=1,2,\dots,s$, を確率ベクトルの予め与えられた閉凸集合とする。推移確率 $P\{X_t=j|X_{t-1}=i\}$ を第 j 要素にもつ確率ベクトルを p_{it} としたとき、すべての i と t に対して

$$(1) \quad p_{it} \in D_i$$

が成り立つならば、 X_t は弱 D-Markov 過程であるという。ここで D は D_i の直積を現しているものとする。応用上は、 D_i は有限個の確率ベクトルの凸包とするのが便利である。

2. 時刻 t における状態確率の上限

確率 $q_{ti}=P\{X_t=i\}$ を第 i 要素とする確率ベクトルを q_t とし、推移確率 $P\{X_t=j|X_{t-1}=i\}$ を第 i, j 要素にもつ確率行列、つまり p_{it} を第 i 行にもつ行列、を P_t とする。

$$(2) \quad P\{X_t=j\} = \sum_{i_0} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_{t-1}} P\{X_0=i_0\} P\{X_1=i_1|X_0=i_0\} \dots P\{X_t=j|X_{t-1}=i_{t-1}\}$$

であるから

$$(3) \quad q_{tj} = P\{X_t=j\} = q_0 P_1 \dots P_t e_j$$

となる。ここで、 e_j は、第 j 要素が 1 で他は 0 であるような列ベクトル

である。もし X_t が弱 D-Markov 過程ならば、各 P_n は確率行列の集合 D に入っているので、 q_{tj} の上限は、(3) の右辺で各 P_n を D の中で動かしたときの最大値で与えられる。

この最大値は、動的計画法の再帰式を用いて簡単に求められる。 ${}^0g_j^n$, $n=0,1,2,\dots$, をつぎのように再帰的に定義される列ベクトルとしよう。

$$(4) \quad \begin{aligned} {}^0g_j^0 &= e_j \\ {}^0g_j^n &= \max_{P \in D} P {}^0g_j^{n-1}, \quad n=1,2,\dots \end{aligned}$$

ここで \max は行ごとに独立にとられる。こうすると、 $q_0 {}^0g_j^t$ は (3) の右辺の最大値であり、それと同時に q_{tj} の上限になっている。明らかにこの上限は (非定常かもしれないが) Markov 連鎖によって達せられる。

3. 時刻 t までの平均訪問回数の上限

同様にして、時刻 t までに状態 j を訪問する回数の期待値の上限を求めることができる。時刻 0 から時刻 $t-1$ の間に状態 j を訪問する回数を v_{tj} とする。すると、

$$(5) \quad E\{v_{tj}\} = \sum_{n=0}^{t-1} P\{X_n=j\} = q_0 e_j + \sum_{n=1}^{t-1} q_0 P_1 \dots P_n e_j$$

となる。(5) の右辺の最大値を求める問題は、計画期間が有限の Markov 決定過程問題の特別な場合になっており、したがってこの最大値は動的計画法をもちいて求められる。 ${}^0h_j^n$, $n=0,1,2,\dots$, をつぎの再帰式によって定義される列ベクトルとする。

$$(6) \quad \begin{aligned} {}^0h_j^0 &= e_j \\ {}^0h_j^n &= e_j + \max_{P \in D} P {}^0h_j^{n-1}, \quad n=1,2,3,\dots \end{aligned}$$

明らかに $q_0 {}^0h_j^t$ は $E\{v_{tj}\}$ の上限であり、この上限は (非定常かもしれないが) Markov 連鎖によって達せられる。

4. 定常状態確率に相当するものの上限

簡単のため、 D に含まれるすべての確率行列は分解不能で非周期的であるものとしよう。すると列ベクトル $\frac{1}{t} {}^0 h_j^t$ は $t \rightarrow \infty$ のとき極限ベクトル ${}^0 h_j^\infty e$ に収束する。ここで、 ${}^0 h_j^\infty$ は正数で、 e はすべての要素が1の列ベクトルである。この ${}^0 h_j^\infty$ は、過程 X_t が長い時間の中に状態 j を訪問する相対頻度とみなすことができる。

もしすべての D_i が有限個の確率ベクトルの凸包となっているならば、 ${}^0 h_j^\infty$ の値は Howard の政策反復アルゴリズムを用いて計算することができる。

Bather (Adv. Appl. Prob. (1973)) の結果を用いると、 ${}^0 h_j^\infty$ は、 D のある要素を推移確率行列として持つ定常な Markov 連鎖の状態 j にはいる定常確率と等しくなることを示すことができる。

列ベクトル ${}^0 g_j^\infty$ も $t \rightarrow \infty$ のとき極限ベクトル ${}^0 g_j^\infty e$ に収束する。しかし一般に ${}^0 g_j^\infty$ は ${}^0 h_j^\infty$ よりも大きく、 D の要素を推移確率行列としてもつ定常な Markov 連鎖によって達成されるというような性質もない。

5. 吸収確率の上限

D の要素を推移確率行列として持つ定常な Markov 連鎖はすべて吸収的で、共通の吸収状態 $r+1, \dots, s$ をもつものとする。すると、 $j=r+1, \dots, s$ に対して、列ベクトル ${}^0 g_j^t$ は $t \rightarrow \infty$ のとき極限ベクトル ${}^0 g_j^\infty$ に収束する。 $q_0 {}^0 g_j^\infty$ は過程が状態 j に吸収される確率の上限を与える。

極限ベクトル ${}^0 g_j^\infty$ はつぎの方程式を満たす。

$$(6) \quad {}^0 g_j^\infty = \max_{P \in D} P {}^0 g_j^\infty .$$

そして、 ${}^0 g_j^\infty$ は、 $k=r+1, \dots, s$ に対して ${}^0 g_{jk}^\infty = 1$ であるような (6) の唯一つの解である。このことから、上の吸収確率の上限は、推移確率行列が D の要素となるある定常な Markov 連鎖によって達せられることがわかる。もし各 D_i が有限個の確率ベクトルの凸包で与えられるならば、(6) は Markov 決定過程と同様の簡単なアルゴリズムで解くことができる。

6. 平均訪問回数の上限

再び、 D の要素を推移確率行列としてもつ定常な Markov 連鎖はすべて吸収的で、共通の吸収状態 $r+1, \dots, s$ をもつものとしよう。すると、 $j = 1, 2, \dots, r$ に対して、ベクトル ${}^0h_j^\infty$ は $t \rightarrow \infty$ のときある極限ベクトル ${}^0h_j^\infty$ に収束する。 $g_0 {}^0h_j^\infty$ は、過程が吸収されるまでに状態 j を訪問する回数の期待値の上限を与える。

このとき、 ${}^0h_j^\infty$ は、方程式

$$(7) \quad {}^0h_j^\infty = e_j + \max_{P \in D} P {}^0h_j^\infty$$

を満たし、 $k=r+1, \dots, s$ に対して ${}^0h_{jk}^\infty = 0$ であるような唯一つの解である。したがって、上の平均訪問回数の上限も定常な Markov 連鎖で達成される。(7) の式も、Markov 決定過程と同様のアルゴリズムを用いて解くことができる。

7. 弱 D-Markov 過程に関するいくつかのコメント

弱 D-Markov 過程という名から推察されるように、強 D-Markov 過程というものも存在する。条件付き確率 $P\{X_t=j | X_{t-1}=i_{t-1}, \dots, X_1=i_1, X_0=i_0\}$ を第 j 要素とする列ベクトルを $e_{i_0 i_1 \dots i_{t-1}}$ とし、すべての t および状態の組 i_0, i_1, \dots, i_{t-1} に対して

$$(8) \quad e_{i_0 i_1 \dots i_{t-1}} \in D_{i_{t-1}}$$

となるとき、確率過程 X_t は強 D-Markov 過程であるという。(8) は Markov 性の自然な一般化になっており、強 D-Markov 過程は Markov 連鎖が持つほとんどの性質を少し一般化した形でもつことを証明することができる。しかし、(8) の条件はそれほど緩くはなく、チェックするのも容易でない。そのため、応用も限られる。それに比べて、弱 D-Markov 過程の条件 (1) は 1 ステップの推移確率しか含んでおらず、チェックするのも易く、応用も広いと思われる。

弱 D-Markov 過程に対して、上で述べたもの以外の特性量を考えることもできる。しかし、それらが $P\{X_t=i\}$ の簡単な関数になっていないかぎり、それらの上限や下限を計算するのは容易でない。たとえば、時刻 t までに状態 j を訪問する回数 v_{tj} の分散の上下限を求めるうまい方法はまだみつかっていない。

上で挙げた特性量の中のいくつかは、その上下限が D に含まれる推移確率行列をもつ定常な Markov 連鎖によって達せられた。このことは、Markov 連鎖モデルの誤差分析の観点からすると非常に興味深い。Markov 連鎖モデルの誤差の原因には 3 種ある。パラメータの推定誤差、推移確率の斉時性の仮定の誤差、Markov 性の仮定の誤差、である。条件 (1) や (8) の D_i は 3 番目の誤差の程度を表していると考えられる。同様な形で 1 番目と 2 番目の誤差の程度も表すことができる。一般に、推定誤差の影響は定常な Markov 連鎖のクラスの中で考えられる。これに対して、斉時性の仮定の誤差の影響は非定常的なものも含んだ Markov 連鎖のクラスの中で考えられ、Markov 性の仮定の誤差の影響はより広い強ないし弱 D-Markov 過程のクラスの中で考えられる。もしこれら 3 つの誤差の程度が同じ D_i で表されていて、強ないし弱 D-Markov 過程の特性量の上下限が定常な Markov 連鎖で達せられているとすれば、これら 3 つの誤差の影響の程度は等しいと考えることができる。このように、強ないし弱 D-Markov 過程という概念は、これら 3 種類の誤差の影響の程度を比較する手段を提供している。

8. 直列型待ち行列モデルへの応用

図 1 のような 3 段直列型待ち行列モデルを考える。客は到着率 λ のポアソン過程に従って到着し、3 つの待ち行列で順にサービスを受けて立ち去る。各段では 2 人のサーバーがサービス率 μ の指数サービスを行っている。各段にはそれぞれ 2 人分の待合室がある。2 段目 (3 段目) の待合室が一杯になると、1 段目 (2 段目) のサービスはブロックされ、先の待合室に空きができるまでサービスはストップされる。また、1 段目の待合室

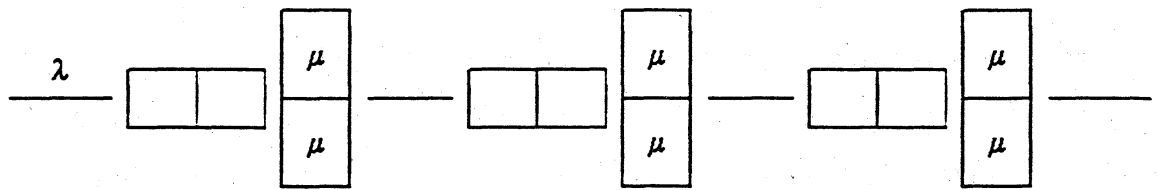


図1. $M/M/2 \rightarrow /M/2 \rightarrow /M/2$ 直列型待ち行列モデル

が一杯のときに到着した客は、サービスを拒否され、直ちに立ち去るものとする。

すべてのサービス時間と到着間隔は互いに独立な確率変数であるものとする。ここで我々に関心があるのは、サービスを受けずに立ち去らなければならない客の割合、つまり呼損率である。

第 k 段目にいる客の数を n_k とすると、システムの状態は3つ組 (n_1, n_2, n_3) , $n_1, n_2, n_3 = 0, 1, \dots, 4$, で表され、システムの動きは時間連続な Markov 連鎖となる。

このモデルは小さなもので、この Markov 連鎖の定常状態確率を数値的に求めることは難しくない。表1は、 $\lambda = 1$, $\mu = 0.5$ の場合の計算結果である。これは Iterative aggregation-disaggregation method (Lumping method とよばれる) によって計算されたもので、37 回の反復を要した。 $p(4)$ のところの値から、呼損率は .3245 であることがわかる。

このモデルは小さいので呼損率の値も精確に計算できてしまい、その上下界をもとめてもあまり意味はないが、ここでは弱 D-Markov 過程を用いて、各状態確率を求めることなしに、どのようにして呼損率の上下界が求められるかを示すことにしよう。

9. 状態が纏められた連鎖と弱 D-Markov 過程

上のシステムの動きを表す Markov 連鎖を X_t としよう。 X_t の無限小生成作用素を Q とすると、(後述の P の要素が非負であるような) 任意の正数 h に対して、 X_t の定常分布は推移確率行列 $P = I + Qh$ をもつ時間離散的な Markov 連鎖の定常分布と等しい。そこで、簡単のため、この

表1. 直列型待ち行列モデルの条件付き状態確率

$\lambda = 1, \mu = .5$

n	0	1	2	3	4
p(n)	.0604	.1536	.2017	.2598	.3245
p(n 0)	.0948	.2224	.2551	.2511	.1765
p(n 1)	.0819	.2013	.2448	.2586	.2133
p(n 2)	.0722	.1918	.2468	.2507	.2385
p(n 3)	.0794	.2344	.2414	.2212	.2236
p(n 4)	.1721	.2460	.1932	.1893	.1995
p(n 0,0)	.1356	.2712	.2577	.2106	.1250
p(n 1,0)	.1295	.2650	.2592	.2167	.1297
p(n 2,0)	.1207	.2591	.2659	.2223	.1321
p(n 3,0)	.1117	.2763	.2743	.2136	.1241
p(n 4,0)	.1960	.3094	.2367	.1684	.0895
p(n 0,1)	.1270	.2598	.2525	.2131	.1475
p(n 1,1)	.1199	.2555	.2574	.2176	.1496
p(n 2,1)	.1151	.2645	.2615	.1240	.1450
p(n 3,1)	.1583	.2858	.2439	.1891	.1228
p(n 4,1)	.1755	.2848	.2357	.1862	.1178
p(n 0,2)	.1249	.2588	.2474	.2043	.1646
p(n 1,2)	.1204	.2629	.2516	.2036	.1614
p(n 2,2)	.1401	.2714	.2456	.1936	.1494
p(n 3,2)	.1571	.2733	.2413	.1887	.1396
p(n 4,2)	.1476	.2761	.2591	.1805	.1368
p(n 0,3)	.1456	.2840	.2337	.1819	.1547
p(n 1,3)	.1505	.2903	.2343	.1769	.1480
p(n 2,3)	.1536	.2956	.2363	.1733	.1411
p(n 3,3)	.1500	.3074	.2453	.1640	.1333
p(n 4,3)	.1609	.3630	.2204	.1367	.1190
p(n 0,4)	.2140	.2952	.1973	.1558	.1378
p(n 1,4)	.2279	.2981	.1929	.1498	.1313
p(n 2,4)	.2431	.3035	.1884	.1408	.1243
p(n 3,4)	.2664	.3226	.1714	.1252	.1144
p(n 4,4)	.3791	.2801	.1307	.1075	.1026

推移確率行列 P をもつ時間離散的な Markov 連鎖を同じ X_t で表し、その定常分布を求めることにしよう。

X_t の状態空間 S を第1段にいる客の数で分割し、第1段に i 人の客がいる状態の集合を S_i とする。またさらに S_i を第2段にいる客の数で分割し、第2段に j 人の客がいる状態の集合を S_{ij} とする。

ここで X_t の定常確率について、いくつか記号を準備しておこう。 X_t は定常状態にあるものとする。

$$\begin{aligned}
 p(i) &= P\{X_t \in S_i\} \\
 p(i, j) &= P\{X_t \in S_{ij}\} \\
 p(i, j, k) &= P\{X_t = (i, j, k)\} \\
 p(j|i) &= P\{X_t \in S_{ij} | X_t \in S_i\} = p(i, j)/p(i) \\
 p(k|i, j) &= P\{X_t = (i, j, k) | X_t \in S_{ij}\} = p(i, j, k)/p(i, j) \\
 q(i'|i) &= P\{X_{t+1} \in S_{i'}, | X_t \in S_i\} \\
 q(i', j'|i, j) &= P\{X_{t+1} \in S_{i'j'}, | X_t \in S_{ij}\} \\
 q(i', j', k'|i, j, k) &= P\{X_{t+1} = (i', j', k') | X_t = (i, j, k)\}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

上の p や q を要素とするベクトルを、下にアンダーラインを付け、対応する要素の位置にアスタリスクを書いて表す。例えば、 $\underline{p}(\ast)$ は $p(i)$ を第 i 要素にもつ確率ベクトルであり、 $\underline{q}(\ast|i)$ は $q(i'|i)$ を第 i' 要素にもつ確率ベクトルである。

各 S_i に入っている状態をひとつの状態に纏めて X_t から作られた確率過程 Y_t を考えよう。 X_t は定常状態にあるので、 Y_t は D_i を $\underline{q}(\ast|i)$ ただひとつから成る集合 $D_i = \{\underline{q}(\ast|i)\}$ とする弱 D-Markov 連鎖である。もし D_i を含むある凸閉集合 D_i' がみつければ、弱 D'-Markov 連鎖の考えを用いて、 Y_t の定常確率（これは X_t の対応する定常状態確率の和に等しい）の上下界を求めることができる。呼損率は $p(4) = P\{Y_t=4\}$ であるから、これは呼損率の上下界を求めることにもなる。

10. ブロッキング確率 $p(4|i)$ と集合 D_i'

まず次のことに注意しよう。

$$(10) \quad q(i'|i) = \sum_{k,j,k',j'} p(j,k|i) q(i',j',k'|i,j,k)$$

今の場合、 $q(i',j',k'|i,j,k)$ は

$$(11) \quad \begin{aligned} q(i+1,j,k|i,j,k) &= \lambda h && i \neq 4 \\ q(i-1,j+1,k|i,j,k) &= \begin{cases} 2\mu h & i \geq 2, j \neq 4 \\ \mu h & i=1, j \neq 4 \end{cases} \\ q(i,j-1,k+1|i,j,k) &= \begin{cases} 2\mu h & j \geq 2, k \neq 4 \\ \mu h & j=1, k \neq 4 \end{cases} \\ q(i,j,k-1|i,j,k) &= \begin{cases} 2\mu h & k \geq 2 \\ \mu h & k=1 \end{cases} \\ q(i,j,k|i,j,k) &= 1 - (\text{上の確率の和}) \\ q(i',j',k'|i,j,k) &= 0 && \text{その他} \end{aligned}$$

であるから、(10) は

$$(12) \quad \begin{aligned} q(i+1|i) &= \lambda h && i \neq 4 \\ q(i-1|i) &= \begin{cases} 2\mu h (1 - p(4|i)) & i \geq 2 \\ \mu h (1 - p(4|i)) & i=1 \end{cases} \\ q(i|i) &= 1 - q(i+1|i) - q(i-1|i) \end{aligned}$$

となる。従って、ブロッキングの確率 $p(4|i)$ の上下界をもとめれば、 Y_t に対するひとつの D_i' を得ることができる。

何か経験的なデータから $p(4|i)$ の上下界を求めることができる場合もあるかもしれないが、ここではモデルをもう少し詳しく見ることによって、そのような事前情報なしに上下限を求めることを考えよう。

11. S_i の上へ制限された連鎖

$p(4|i)$ の上下界を求めるには、各 j について S_{ij} の中の状態をひとつの状態 j に纏め、 S_i の外の状態を第5の状態にまとめて X_t から作った Z_{it} という過程を考えるのが便利である。この過程の1ステップの推移確

率は次のように与えられる。

状態 j , $j=0,1,\dots,4$, から

$$\begin{aligned}
 q(i, j-1|i, j) &= \begin{cases} 2\mu h & (1 - p(4|i, j)) \\ \mu h & (1 - p(4|i, j)) \end{cases} & \begin{matrix} j \geq 2 \\ j=1 \end{matrix} \\
 (13) \quad q(i, 5|i, j) &= \begin{cases} \lambda h & i \neq 4 \\ 0 & i = 4 \end{cases} + \begin{cases} 2\mu h & i \geq 2, j \neq 4 \\ \mu h & i = 1, j \neq 4 \\ 0 & i = 0 \text{ or } j = 4 \end{cases} \\
 q(i, j|i, j) &= 1 - q(i, j-1|i, j) - q(i, 5|i, j)
 \end{aligned}$$

状態 5 から

$$\begin{aligned}
 (14) \quad q(i, j|i, 5) &= (1 - p(i))^{-1} \left[\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \lambda h p(i-1, j) & i \neq 0 \\ 0 & i = 0 \end{matrix} \right\} \\ + \left\{ \begin{matrix} 2\mu h p(i+1, j-1) & i \neq 0, 4, j \neq 0 \\ \mu h p(i+1, j-1) & i = 0, j \neq 0 \\ 0 & i = 4 \text{ or } j = 0 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right] \\
 q(i, 5|i, 5) &= 1 - \sum_{j=1}^4 q(i, j|i, 5)
 \end{aligned}$$

これらの推移確率から定常確率 $p(i, j)$, $j=0,1,\dots,4$, と $1 - p(i)$ が定められる。ただし、我々が求めたいものは定常確率 $p(i, 4)$ ではなく、条件付き確率 $p(4|i)$ であった。一般に弱 D-Markov 過程では条件付き確率の上下界を求めるのは難しいが、この場合は状態 5 の定常確率が無視しうるほどに小さくなるように推移確率を変えてやれば、実質的に $p(4|i)$ の上下限を求めることができる。このためには h を十分小さくとり、一方 $q(i, j|i, 5)$, $j=0,1,\dots,4$, には十分大きな数を掛けてやればよい。

この Z_{it} に D-Markov 過程を適用するためには $p(4|i, j)$ や $p(i-1, j)$, $p(i+1, j-1)$ などの上下界が必要であるが、それには S_{ij} の上に制限された過程 W_{ijt} を考えなければならない。

1.2. S_{ij} の上に制限された連鎖

S_{ij} の外の状態をひとつの状態 5 に纏めて X_t から作った過程を W_{ijt} とする。この過程の 1 ステップの推移確率は次のようになる。

状態 k , $k=0,1,\dots,4$, から

$$\begin{aligned}
 q(i,j,k-1|i,j,k) &= \begin{cases} 2\mu h & k \geq 2 \\ \mu h & k=1 \end{cases} \\
 q(i,j,5|i,j,k) &= \begin{cases} \lambda h & i \neq 4 \\ 0 & i=4 \end{cases} + \begin{cases} 2\mu h & i \geq 2, j \neq 4 \\ \mu h & i=1, j \neq 4 \\ 0 & i=0 \text{ or } j=4 \end{cases} \\
 &+ \begin{cases} 2\mu h & j \geq 2, k \neq 4 \\ \mu h & j=1, k \neq 4 \\ 0 & j=0 \text{ or } k=4 \end{cases} \\
 q(i,j,k|i,j,k) &= 1 - q(i,j,k-1|i,j,k) - q(i,j,5|i,j,k)
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

状態 5 から

$$\begin{aligned}
 q(i,j,k|\beta,j,5) &= (1 - p(i,j))^{-1} \left[\begin{cases} \lambda h p(i-1,j,k) & i \neq 0 \\ 0 & i=0 \end{cases} \right. \\
 &+ \begin{cases} 2\mu h p(i+1,j-1,k) & i \neq 0,4, j \neq 0 \\ \mu h p(i+1,j-1,k) & i=0, j \neq 0 \\ 0 & i=4 \text{ or } j=0 \end{cases} \\
 &+ \left. \begin{cases} 2\mu h p(i,j+1,k-1) & j \neq 0,4, k \neq 0 \\ \mu h p(i,j+1,k-1) & j=0, k \neq 0 \\ 0 & j=4 \text{ or } k=0 \end{cases} \right] \\
 q(i,j,5|i,j,5) &= 1 - \sum_{k=1}^4 q(i,j,k|i,j,5)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

$q(i,j,k'|i,j,k)$ を第 (k,k') 要素, $k,k'=0,1,\dots,4$, としてもつ正方形行列を A_{ij} とし、第 $(k,k+1)$ 要素, $k=0,1,2,3$, が 1 で他は 0 の正方形行列を R とする。すると (15) と (16) から

$$\begin{aligned}
 p(*|i,j) A_{ij} &= c_1 p(*|i-1,j) + c_2 p(*|i+1,j-1) \\
 &+ c_3 p(*|i,j+1) R
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

となる。ここで、 c_1, c_2, c_3 はある正数である。 $A=A_{22}$ とすると、(15) から、ある正数 c_4 を用いて

$$A - A_{ij} = c_4 I
 \tag{18}$$

と書ける。従って (17) は

$$(19) \quad p(*|i,j) A_{ij} = c_1 p(*|i-1,j) + c_2 p(*|i+1,j-1) \\ + c_3 p(*|i,j+1) R + c_4 p(*|i,j)$$

となる。つまり、 $p(*|i,j)$ は $\underline{x}A^{-1}$ および $\underline{y}RA^{-1}$ という形の2つのベクトルの線形結合となっている。

このことを用いて、 $p(*|i,j)$ と成りうる確率ベクトルの集合を求めてみよう。 \underline{x} を確率ベクトル、 F_1, F_2 をつぎのような演算子とする。

$$(20) \quad F_1 \underline{x} = (\underline{x}A^{-1}\underline{e})^{-1} \underline{x}A^{-1} \\ F_2 \underline{x} = (\underline{x}RA^{-1}\underline{e})^{-1} \underline{x}RA^{-1}$$

すべての確率ベクトルの集合を G_0 としよう。もちろんどの $p(*|i,j)$ も G_0 の中に含まれている。そこで次のように確率ベクトルの集合の列 $\{G_n\}$ を定義する。

$$(21) \quad G_n = H(F_1 G_{n-1} \cup F_2 G_{n-1}), \quad n=1,2,3,\dots$$

ここで H は凸包をとる演算子である。明らかに $\{G_n\}$ は単調減少列であり、したがってある極限集合 G に収束する。 G は方程式

$$(22) \quad G = H(F_1 G \cup F_2 G)$$

を満たす。すべての $p(*|i,j)$ は G_0 に含まれていたのだから、 G にも含まれる。

つぎに、 G に含まれるベクトルの最後の要素、第4要素、の上下限を求めよう。ベクトル $(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ が G に含まれていることはすぐにわかる。したがって、下限は0である。最後の要素が最大値を取るベクトルを \underline{g} としよう。すこし議論が厄介なので詳しい証明は省略するが、行列 A と R の形を利用すると、 \underline{g} は次の方程式を満たすことがわかる。

$$(23) \quad \underline{g} = F_2 \underline{g}$$

これは \underline{g} が行列 RA^{-1} の最大固有値に随伴する固有ベクトルであること

を示している。このことから g はすぐに計算できて、表1の場合では

$$(24) \quad g = (.00878 \quad .05268 \quad .14060 \quad .29978 \quad .49817)$$

となる。したがって、ブロッキングの確率 $p(4|i, j)$ は

$$(25) \quad 0 \leq p(4|i, j) \leq .49817$$

であることがわかる。

13. ブロッキング確率 $p(4|i)$ の上下界

(25) の上下界を用いると、 $p(4|i)$ の上下界も同様にして求めることができる。ただし、この場合、 A に相当する行列の要素が $p(4|i, j)$ を含むため問題は少し複雑になる。

A' を、第 (j, j') 要素が (13) の $q(2, j' | 2, j)$ で各 $p(4|2, j)$ のところに上で求めた $p(4|i, j)$ の最大値をいれた行列、とする。すると第4要素が最大の確率ベクトル g' は行列 RA'^{-1} の最大固有値に随伴する固有ベクトルとなっていることが証明できる。表1の場合には

$$(26) \quad g' = (.00309 \quad .02460 \quad .08762 \quad .25562 \quad .62907)$$

となり、 $p(4|i)$ の上下界は

$$(27) \quad 0 \leq p(4|i) \leq .62907$$

となる。

14. 呼損率の上下界

この $p(4|i)$ の上下界を用いれば、定常確率 $p(i)$ の上下界を計算することができる。この計算は簡単である。 $p(i)$ はある定数 c を用いて

$$(28) \quad \begin{aligned} p(0) &= c \\ p(1) &= c\lambda/\mu (1-p(4|1)) \\ p(2) &= c\lambda/\mu (1-p(4|2)) \\ p(3) &= c\lambda/\mu (1-p(4|3)) \\ p(4) &= c\lambda/\mu (1-p(4|4)) \end{aligned}$$