

## 待ち行列システムと電気回路との対応関係について

岩手大・I 吉岡良雄 (Yosio Yosioka)

### 1. まえがき

サービス窓口の設置と計算機システムの導入などにおいては、窓口数と処理能力などを決定する必要がある。この決定は、従来から費用、待ち時間と待ち行列長などによって行われている。しかし、統一された理論をもつ電気回路などに対応させて、これらを考えることにより、新しい物理的意味のある評価量が発見され、新しい設計法が生まれる。電気回路における設計法は、一般的には *maximum power transfer theorem* とマッチングであり、アンプ、伝送線路、アンテナなどに公理として利用されている。このような手法は、音響と振動の分野で利用されている。このような対応関係は、微分方程式などの数式が対応している場合、現象が対応している場合の2種類が考えられる。音響と振動においては、前者

の場合である。待ち行列システムにおいても、電気回路に対応して考えれば、電気回路での評価量（特にパワー）と設計法に対応する新しい評価量・設計法が得られるはずである。待ち行列システムにおけるパワー評価量<sup>[1]~[5]</sup>は、このような対応関係によって得られるが、文献[2]~[4]では、この対応関係や物理的意味を明確に述べていない。

本報告では、待ち行列システムの現象から得られる待ち行列システムと電気回路との対応関係について述べ、電気回路における設計法（特に *maximum power transfer theorem*）などを待ち行列システムに適用する。これによって、不変性のある待ち行列システムの設計法を確立する。

## 2. 対応関係

電気回路理論は、物理的にも理論的にも整然とした形となっていている。このため、音響など種々の解析に電気回路との対応を用い、その電気回路理論を導入している。待ち行列システムにおいても電気回路との対応ができれば、電気回路理論を用いて、設計と解析を行うことができる。そこで、電気回路における一般的な考え方や設計法について述べ、待ち行列システムとの対応関係について述べる。

## 2.1 電気回路における設計法

電気回路網は、図1に示されるように、電源  $v_s(t)$ 、内部インピーダンス  $Z_I (= R_I + jX_I)$  および負荷インピーダンス  $Z_L (= R_L + jX_L)$  でモデル化できる。ここで、外界に対して実際に仕事をする部分は、抵抗  $R_L$  である。これらの抵抗  $R_I$  と  $R_L$  およびリアクタンス  $X_I$  と  $X_L$  は、モー夕のように供給電圧と供給電力によって変る場合もあり得る。

このような電気回路において、次の関係式が成立する。

$$v_s(t) = v_I(t) + v_L(t) \quad (1)$$

$$v_I(t) = Z_I \cdot i(t) \quad (2)$$

$$v_L(t) = Z_L \cdot i(t) \quad (3)$$

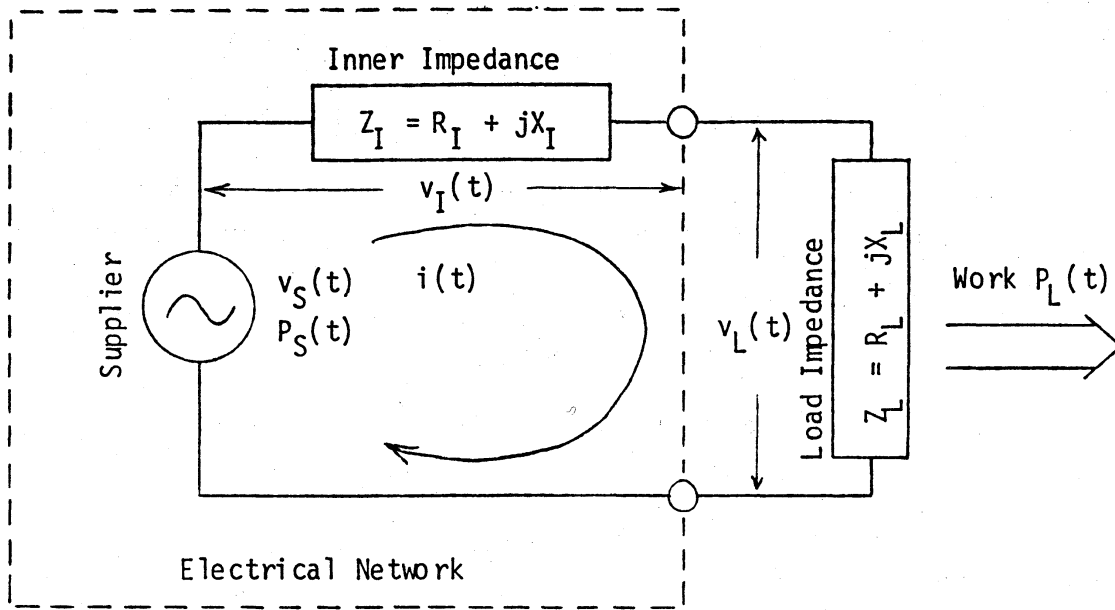
$$i(t) = v_s(t) / (Z_I + Z_L) \quad (4)$$

$$P_s(t) = |P_e(t) + j P_w(t)| = |v_s(t) \cdot i(t)| \quad (5)$$

$$P_L(t) = R_L \cdot |i(t)|^2 = P_e(t) \cdot R_L / (R_I + R_L) \quad (6)$$

ここで、 $P_e(t)$  および  $P_w(t)$  は、電気回路をそれぞれ有効電力および無効電力とよばれている量である。また、 $P_L(t)$  は負荷抵抗  $R_L$  の消費電力（単位時間の仕事量）である。

電気回路において、その設計法は、供給電圧  $v_s(t)$ （又は供給電力  $P_s(t)$ ）または負荷抵抗  $R_L$  に対して、出力電圧  $v_L(t)$  を最大にする方法（a）、電流  $i(t)$  を最大にする方法（b）、



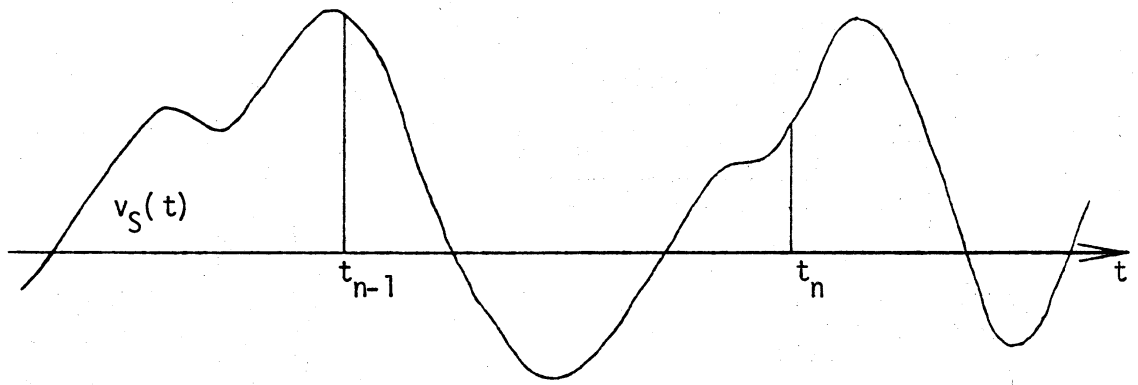
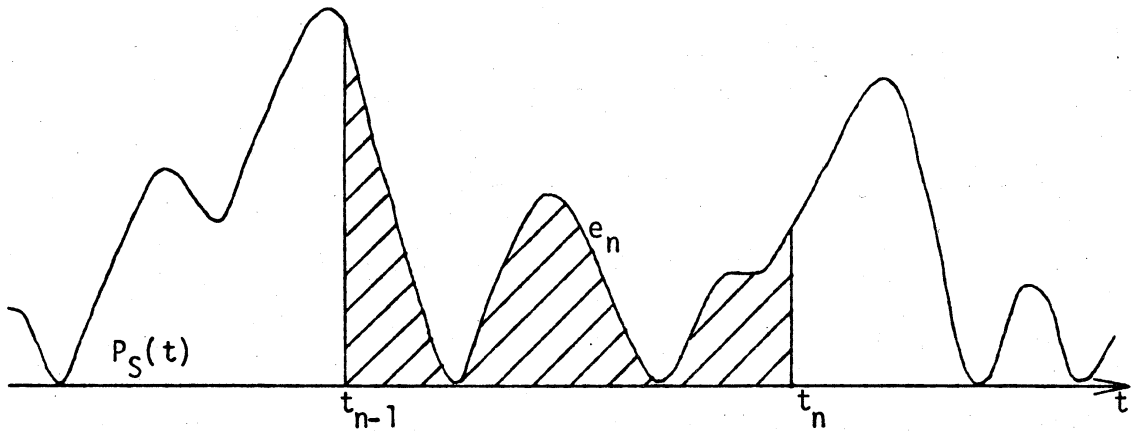
Equivalent circuit of electrical network

図1 電気回路網の等価回路。

負荷電力（仕事） $P_L(t)$ を最大にする方法（c）がある。（a）は、電圧増幅回路に用いられ $R_L = X_L = \infty$ である。（b）は、電流増幅回路に用いられ $R_L = X_L = 0$ である。（c）は、伝送線路、アンテナ、増幅器などにおけるインピーダンスマッチングであり、 $R_L$ および $X_L$ が $i(t)$ または $P_S(t)$ に無関係であるならば、

$$\frac{\partial}{\partial R_L} P_L(t) = 0 \quad \text{および} \quad \frac{\partial}{\partial X_L} P_L(t) = 0$$

から、 $R_L = R_I$  および  $X_L = -X_I$  が得られる。このとき、負荷電力 $P_L(t)$ は、負荷に対して最大となる。これは、増幅器などの電気回路網から、最大の電力を得る手法である。

Supplied voltage  $v_S(t)$ Supplied power  $P_S(t)$ 図2 電圧  $v_S(t)$  と供給電力  $P_S(t)$ 

また、待ち行列システムとの対応関係を容易にするため、図2に示すように、離散的な時系列  $\dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots$  を考える。電力は、単位時間に供給（または消費）されるエネルギーで定義されているから、時間区間  $(t_n - t_{n-1})$  に供給（消費）されるエネルギー  $e_n$  は、次式で与えられる。

$$e_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} P_S(t) dt \quad (7)$$

さらに,  $t_n - t_{n-1}$  の平均を  $\bar{t}$ , および  $\bar{t}$  内の平均エネルギー  $\bar{e}$  は, それぞれ次式で与えられる。

$$\bar{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (t_n - t_0) \quad (8)$$

$$\bar{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{t_0}^{t_n} P_S(t) dt \quad (9)$$

### 2.2 待ち行列システムと電気回路.

ここで取り扱う待ち行列システムを図3に示す。時点  $t_n$  に到着する客  $C_n$  の処理時間は, 客  $C_n$  の持っている処理される物 (例えば情報)  $q_n$  による。この処理される物は, 一般にエネルギーに対応していると考えられる。また, 客からシステムを眺めた場合, 1人の客が同時に各窓口で並列に処理されないから, 図4に示すように, 待ち時間に相当する抵

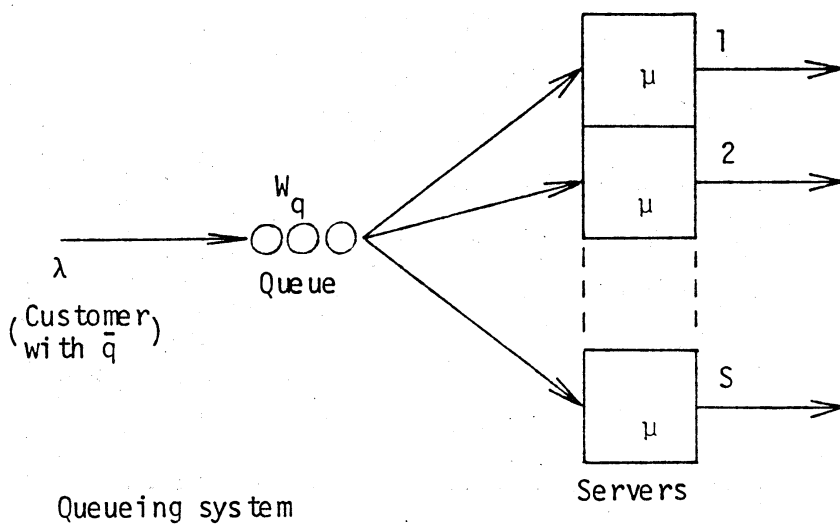


図3 待ち行列システム

抗  $R_w$  および処理時間に相当する抵抗  $R_e$  の直列回路とみる  
 ことができる。従って、次の3種類の対応関係が考えられる。

A). 対応関係 (A)

電気回路	←→	待ち行列
$e_n$	←→	$\rho_n$
$\bar{e}$	←→	$\bar{\rho}$
$\bar{t}$	←→	$1/\lambda$
$R_w$	←→	$w_q$
$R_e$	←→	$1/\mu$
$P_s$	←→	$\lambda \bar{\rho}$

このとき、次の関係式が電気回路理論によって得られる。

$$\lambda \bar{\rho} (= P_s) = |v_s \cdot i| \tag{10}$$

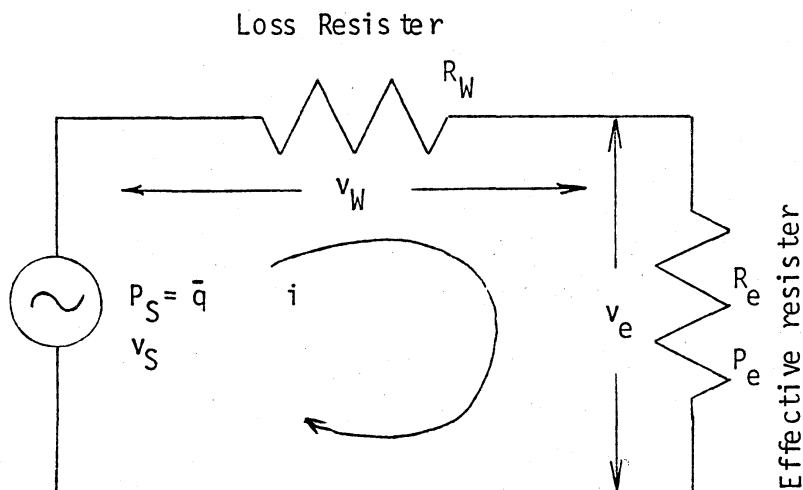


図4 客から見た等価回路

$$i = v_s / (\omega_g + 1/\mu) \quad (11)$$

$$v_\omega = i \cdot \omega_g \quad (12)$$

$$v_e = i \cdot 1/\mu \quad (13)$$

$$|v_s| = \sqrt{\lambda \bar{g} (\omega_g + 1/\mu)} \quad (14)$$

$$|i| = \sqrt{\lambda \bar{g} / (\omega_g + 1/\mu)} \quad (15)$$

$$P_e = \lambda \bar{g} / \mu (\omega_g + 1/\mu) \quad (16)$$

$$P_\omega = \lambda \bar{g} \cdot \omega_g / (\omega_g + 1/\mu) \quad (17)$$

B). 対応関係 (B)

電気回路	↔	待ち行列
$e_n$	↔	$g_n$
$\bar{e}$	↔	$\bar{g}$
$\bar{t}$	↔	$1/\lambda$
$v_\omega$	↔	$\omega_g$
$v_e$	↔	$1/\mu$
$P_s$	↔	$\lambda \bar{g}$

このとき、次の関係式を得る。

$$\lambda \bar{g} (= P_s) = |v_s \cdot i| \quad (18)$$

$$P_e = \frac{v_e \cdot P_s}{v_\omega + v_e} = \lambda \bar{g} / \mu (\omega_g + 1/\mu) \quad (19)$$

$$P_\omega = \frac{v_\omega \cdot P_s}{v_\omega + v_e} = \lambda \bar{g} \cdot \omega_g / (\omega_g + 1/\mu) \quad (20)$$



$$|i| = \lambda \bar{\xi} / (\omega_g + 1/\mu) \quad (21)$$

$$R_\omega = \omega_g \cdot (\omega_g + 1/\mu) / \lambda \bar{\xi} \quad (22)$$

$$R_e = (\omega_g + 1/\mu) / \lambda \mu \bar{\xi} \quad (23)$$

c). 対応関係 (c)

電気回路	←————→	待ち行列
$e_n$	←————→	$z_m$
$\bar{e}$	←————→	$\bar{z}$
$\bar{\tau}$	←————→	$1/\mu$
$v_\omega$	←————→	$\lambda \omega_g$
$v_e$	←————→	$\lambda/\mu$
$P_s$	←————→	$\lambda \bar{\xi}$

このとき、次の関係式を得る。

$$\lambda \bar{\xi} (= P_s) = |v_s \cdot i| \quad (24)$$

$$P_e = \frac{v_e \cdot P_s}{v_\omega + v_e} = \lambda \bar{\xi} / \mu (\omega_g + 1/\mu) \quad (25)$$

$$P_\omega = \frac{v_\omega \cdot P_s}{v_\omega + v_e} = \lambda \bar{\xi} \cdot \omega_g / (\omega_g + 1/\mu) \quad (26)$$

$$|i| = \bar{\xi} / (\omega_g + 1/\mu) \quad (27)$$

$$R_\omega = \lambda (\omega_g + 1/\mu) / \mu \bar{\xi} \quad (28)$$

$$R_e = \lambda \omega_g (\omega_g + 1/\mu) / \bar{\xi} \quad (29)$$

### 2.3 物理的意味

2.2 から明らかかなように、各対応関係とも  $P_s = P_w + P_e$  となる。これは、供給された電力  $P_s$  が待ち時間によって無駄となる電力  $P_w$  (損失電力とよぶ) と処理による電力  $P_e$  (有効電力とよぶ) に分けられることを示している。また、有効電力  $P_e$  は、 $\lambda/\mu s$  と  $\bar{x}/(\omega_s + 1/\mu)$  との積の  $s$  倍となっている。 $\lambda/\mu s$  は、窓口の利用率であり、 $\bar{x}/(\omega_s + 1/\mu)$  は1人の客がシステム内を流れる平均速度と考えられる。従来のシステム設計では、利用率をできるだけ大きく、または待ち時間をできるだけ小さくする方法であるから、有効電力  $P_e$  はこれらの評価量が共に含まれた評価量であることがわかる。さらに、有効電力  $P_e$  は、客の流れ(平均速度)を窓口の利用率で制限することを意味しており、これを最大にすることは、客の流れを最適にすることを意味している。

一方、電気回路において、一般的に用いられる設計法は、有効電力を最大にすることである。待ち時間と処理時間は、供給電力  $\lambda \bar{x}$  の関数であるから、 $\lambda \bar{x}$  に対してこの有効電力が最大になるような設計法を考えることができる。このようなシステム状態を待ち行列システムの最適状態とよぶことにする。

### 3. 待ち行列システムの最適状態.

本章では,  $M/E_k/1$  待ち行列システムにおいて, 各対応関係における各値および最適状態を導出する。ここで, 客  $C_n$  の処理時間  $\alpha_n$  は, 客  $C_n$  の処理される物  $\delta_n$  の関数  $\alpha_n = f(\delta_n)$  として表わされるが,  $\alpha_n = a\delta_n$  とおく。このとき,  $\bar{X} = 1/\mu = a\bar{\delta}$  となる。従って, 有効電力および損失電力は, いずれの対応関係においても, 次のようになる。

$$P_e = \frac{\lambda \bar{\delta} / \mu}{w_s + 1/\mu} = \frac{2k(1-p)\lambda \bar{\delta}}{(k+1)p + 2k(1-p)} = \frac{2kP_s - 2kaP_s^2}{(k+1)aP_s + 2k(1-aP_s)} \quad (30)$$

$$P_w = \frac{\lambda \bar{\delta} w_s}{w_s + 1/\mu} = \frac{\lambda \bar{\delta} (k+1)p}{(k+1)p + 2k(1-p)} = \frac{(k+1)aP_s^2}{(k+1)aP_s + 2k(1-aP_s)} \quad (31)$$

ここで,  $p$  はトラフィック密度であり,  $\lambda/\mu$  である。さらに, 各対応関係における各値は, 次のようになる。

a). 対応関係 (A)

$$|v_s| = P_s \cdot \sqrt{\frac{2ka - (k-1)a^2P_s}{2k(1-aP_s)\lambda}} \quad (32)$$

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{2k(1-aP_s)\lambda}{2ka - (k-1)a^2P_s}} \quad (33)$$

b). 対応関係 (B)

$$|i| = \frac{2k(1-aP_S)\lambda}{2ka - (k-1)a^2P_S} \quad (34)$$

$$R_w = \frac{\{2ka - (k-1)a^2P_S\}(k+1)a^2P_S^2}{4k^2\lambda^2(1-aP_S)^2} \quad (35)$$

$$R_L = \frac{\{2ka - (k-1)a^2P_S\}P_S}{2k\lambda^2(1-aP_S)} \quad (36)$$

c). 対応関係 (C)

$$|i| = \frac{2k(1-aP_S)}{2ka - (k-1)^2P_S} \quad (37)$$

$$R_w = \frac{\{2ka - (k-1)a^2P_S\}(k+1)a^2P_S^2}{4k^2(1-aP_S)^2} \quad (38)$$

$$R_L = \frac{\{2ka - (k-1)a^2P_S\}P_S}{2k(1-aP_S)} \quad (39)$$

一方, 待ち行列システムの最適状態を求める条件は, 次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial P_S} P_e = 0 \quad (40)$$

従, 2, 次式を得る。

$$a^2(k-1)P_S^2 - 4kaP_S + 2k = 0 \quad (41)$$

この解で  $P_e$  を最大にする  $P_S$  の値は、次式となる。

$$P_S^{(m)} = \begin{cases} \frac{2k - \sqrt{2k(k+1)}}{(k-1)a} & (k > 1) \\ \frac{1}{2a} & (k = 1) \end{cases} \quad (42)$$

また、このときのトウヒック密度は、次式となる。

$$\rho^{(m)} = aP_S^{(m)} = \begin{cases} \frac{2k - \sqrt{2k(k+1)}}{k-1} & (k > 1) \\ \frac{1}{2} & (k = 1) \end{cases} \quad (43)$$

さらに、 $aP_e^{(m)}$  および  $aP_w^{(m)}$  は、次式となる。

$$aP_e^{(m)} = \begin{cases} \frac{2k \{3k+1 - \sqrt{2k(k+1)}\}}{(k-1)^2} & (k > 1) \\ \frac{1}{4} & (k = 1) \end{cases} \quad (44)$$

$$aP_w^{(m)} = \begin{cases} \frac{(k+1) \{ \sqrt{2k(k+1)} - 4k \}}{(k-1)^2} & (k > 1) \\ \frac{1}{4} & (k = 1) \end{cases} \quad (45)$$

以上を確認するため、トウヒック密度  $\rho = aP_S$  に対する各電力  $aP_e$ 、 $aP_w$  をグラフに示すならば、図5のようになる。図から  $a$  は単なる定数であるから、供給電力  $P_S$  に対して、有効電力  $aP_e$  は最大値をとる関数となり、損失電力  $aP_w$  は、単

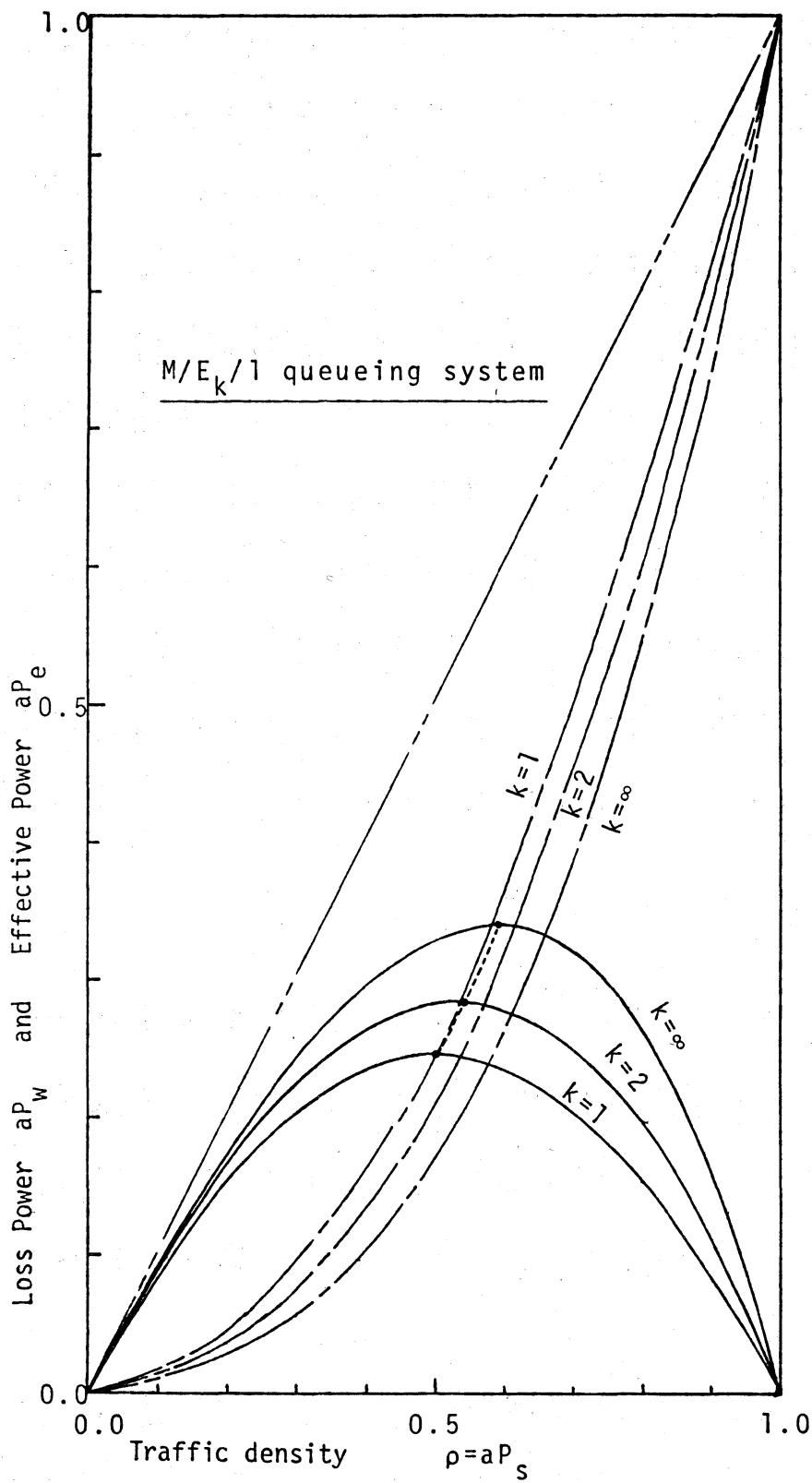


図5 トラフィック密度に対する各電力

調増加関数となる。そして、 $\alpha P_e$ が最大となるとき、トラフィック密度は、式(43)で示される値をとる。

以上、有効電力  $P_e$  を最大にする  $M/E_k/1$  待ち行列システムの最適状態について述べてきた。ここで、 $k=1$  ( $M/M/1$  待ち行列システム)における最適状態は、 $P_e^{(M)} = P_0^{(M)}$  (または  $W_q = 1/\mu$ )となる。これは、到着分布と処理分布が同じであれば、電気回路でインピーダンスマッチングと同じ現象となることが興味深い。さらに、平均待ち時間が具体的な形で求められている  $M/G/1$  待ち行列システム、 $M/M/1$  待ち行列システムにおいても同様の考え方で最適状態を求めることができる。(M/G/1については付録参照)。

#### 4. まとめ

定常状態での待ち行列システムの現象を電気回路に対応させて、電気回路の整然な理論から、種々の関係式を導出した。なかでも、待ち行列システムの有効電力は、窓口の利用率と客の平均速度の積で与えられ、これを最大にすることは、電気回路で *maximum power transfer theorem* やインピーダンスマッチングの手法に相当しており、十分意味がある。このときのシステムの状態を待ち行列システムの最適状態とよび、 $M/E_k/1$  待ち行列システムを例にとり、その状態を述べた。

以上，現象面から待ち行列システムと電気回路との対応関係を述べてきた。微分方程式など数式面での対応関係を明らかにすることによって，リアクタンスやコンダクタンスなどに対応する待ち行列システムの現象が明らかになるであろう。今後，この方面の対応関係を明らかにし，新しい考え方や解法を行う方針である。

### [文 献]

- [1] 吉岡，中村，佐藤：“待ち行列の最適化について”，信学論(B)，60-B，No. 8，P. 590，Aug. 1977.
- [2] A. Giessler, J. Hämler, A. König, E. Pade: "Free buffer allocation - an investigation by simulation," *Computer Networks*, vol. 1, No. 3, p. 191, July 1978.
- [3] L. Kleinrock: "On flow control in computer networks," *Proc. ICC*, vol. 2, p. 27.2.1, June 1978.
- [4] L. Kleinrock: "Powers and deterministic rules of thumb for probabilistic problems in computer communications," *Proc. ICC*, p. 43.1.1, June 1979.
- [5] 吉岡，中村，重井：“計算機網におけるノワ-の物理的意味について”，信学論(D)，J65-D，No. 11，Nov. 1982.



## [付 録]

A1.  $M/G/1$  待ち行列システムの最適状態

$M/G/1$  待ち行列システムにおいて、客  $C_n$  のサービス時間  $\delta_n$  の分布を  $G(\delta)$  とおき、客  $C_n$  の処理時間  $x_n = a\delta_n$  と考える。このとき、平均待ち時間は次式となる。

$$W_q = \frac{\lambda a^2 \bar{\delta}^2}{2(1 - \lambda a \bar{\delta})} \quad (A1)$$

ここで

$$\bar{\delta} = \int_0^{\infty} \delta dG(\delta) \quad (A2)$$

$$\bar{\delta}^2 = \int_0^{\infty} \delta^2 dG(\delta) \quad (A3)$$

このとき、 $P_e$ 、 $P_w$  はそれぞれ次式となる。

$$P_e = \frac{\lambda a \bar{\delta}^2}{W_q + a \bar{\delta}} = \frac{2\lambda \bar{\delta}^2 (1 - \lambda a \bar{\delta})}{2a(\bar{\delta}^2 - \bar{\delta}^2) + 2\bar{\delta}} \quad (A4)$$

$$P_w = \frac{W_q \cdot \lambda \bar{\delta}}{W_q + a \bar{\delta}} = \frac{\lambda^2 a \bar{\delta} \cdot \bar{\delta}^2}{2a(\bar{\delta}^2 - \bar{\delta}^2) + 2\bar{\delta}} \quad (A5)$$

$P_e$  の最大値を得るため、 $\frac{\partial}{\partial \lambda} P_e = 0$  から次式を得る。

$$a^2 (\bar{\delta}^2 - 2\bar{\delta}^2) \lambda^2 + 4a\bar{\delta}\lambda - 2 = 0 \quad (A6)$$

$P_e$  を最大にする  $\lambda$  の値は、次式で与えられる。

$$\lambda^{(m)} = \frac{\alpha^2}{2\bar{g} + \sqrt{2\bar{g}^2}} \cdot \frac{1}{a} \quad (\text{A7})$$

さらに、トコヒ→フ密度  $\rho^{(m)}$ 、各電力  $P_e^{(m)}$ 、 $P_\omega^{(m)}$  は、それぞれ  
次式で与えられる。

$$\rho^{(m)} = a\bar{g}\lambda^{(m)} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\bar{g}^2}{\bar{g}^2}}} \quad (\text{A8})$$

$$P_e^{(m)} = \{\rho^{(m)}\}^2 \cdot \frac{1}{a} \quad (\text{A9})$$

$$P_\omega^{(m)} = \rho^{(m)}(1 - \rho^{(m)}) \cdot \frac{1}{a} \quad (\text{A10})$$

この状態での容の平均速度  $v^{(m)}$  は、次式となる。

$$v^{(m)} = \frac{\bar{g}}{W_g + a\bar{g}} = \rho^{(m)} \cdot \frac{1}{a} \quad (\text{A11})$$