

仕事のわりふりにおける区分法の比較

東京理科大(理工) 牧野都治 (Toji Makino)

1. まえがき

われわれはさきに、文献[1]において、仕事のわりふりについて考察した。その問題は、早くおわる仕事を窓口A、時間のかかる仕事を窓口Bでサービスする場合、どのように振りわけたらよいかを調べたものである。ただし、受注した仕事は何分のサービスを要するものであるかは、受注時において、すでにわかっている。つまり、仕事の本来のサービス分布が、図1-(1)のようであるとき、それを2つの窓口A、Bにわける問題である。

これを、[1]では次のように考えた。

はじめに、仕事の累積受注件数百分率を横軸、累積サービス時間百分率を縦軸にとり、100%を1と目盛ることにして、図2のようなパレート図を書く。つぎに、パレート図の縦軸 $1/2$ に対応する横軸の目盛り α_0 を読み、そ

の点で区別すればよい，とこのことを提議した。

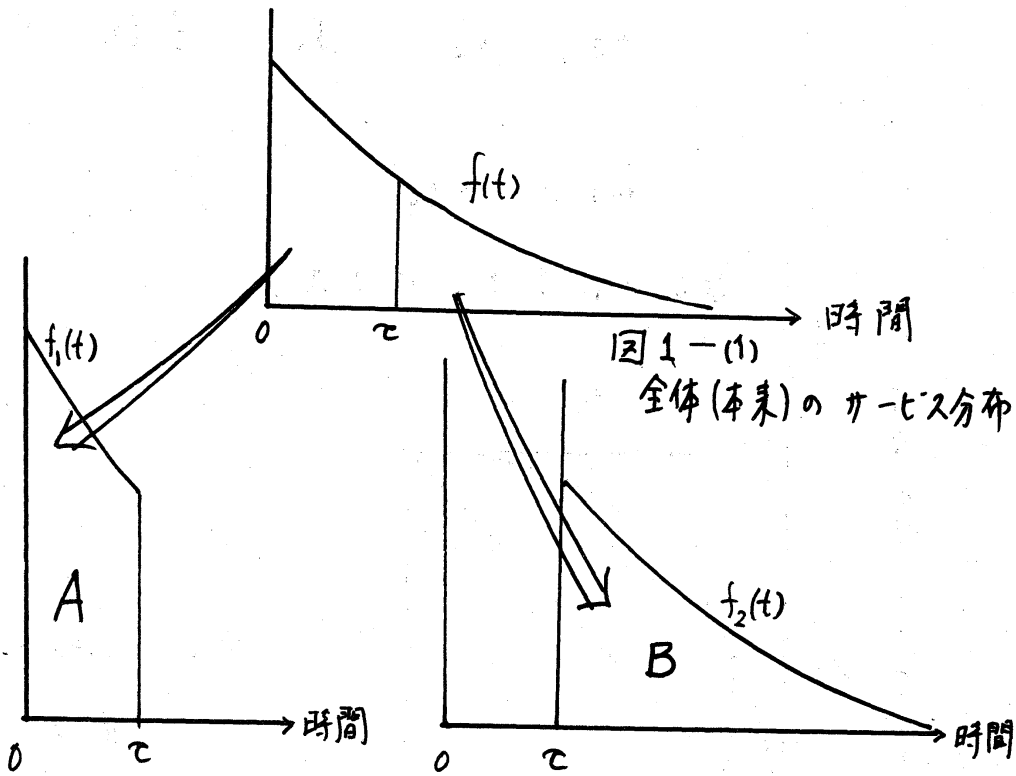


図 1-1
全体(本来)のサービス分布

図 1-2
窓口 A でのサービス分布

図 1-3
窓口 B でのサービス分布

記号

λ = 仕事の到着率， μ = 本来のサービス率

$f(t)$ = サービス分布の確率密度関数

窓口 A:

λ_1 = 窓口 A への到着率， μ_1 = 窓口 A でのサービス率

$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$ = 窓口 A での利用率，

L_1 = 窓口 A での系平均人数，

L_{q1} = 窓口 A での列平均人数

$f_1(t)$ = 窓口 A での
サービス時間の
確率密度関数

窓口 B :

上の添字の 1 を 2 に変えて,

$\lambda_2, \mu_2, \rho_2, f_2(+),$

L_2, Lq_2

などと表すことにする。

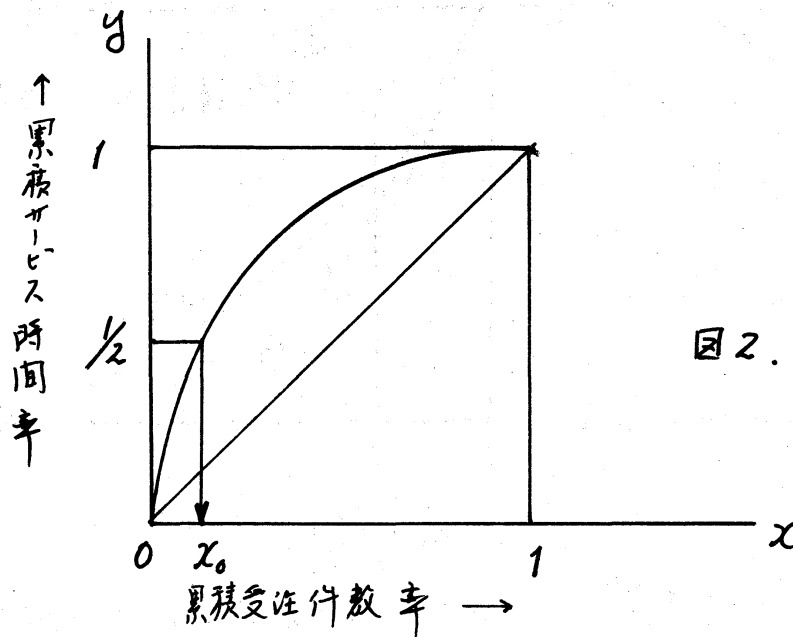


図2. ハレット図による
区分の仕方.

上のような x_0 で区分するということとは, 2つの窓口の利用率 ρ_1, ρ_2 を等しくすることに代わるもの ([1] 参照) ののであるが, それでは2つの窓口の系平均人数を等しくしたり, それらの和を最小にしたりするには, どのように区別したらよいか。このことについて, ポアソン到着・ガンマサービスの系ではどうなるかを調べたのが, 文献 [3] である。ただしこの場合, サービス時間 T の確率密度関数として, E_n

分布のそれぞれ

$$f(t) = \frac{(\lambda \mu)^k e^{-\lambda \mu t}}{\Gamma(k)} \cdot t^{k-1} \quad (t > 0) \quad \dots (1)$$

を用いては、 $k (> 0)$ を整数値に限定してゐないので、アーラン分布とよばずガンマ分布とよんでゐる。

今圖は、サービス分布がパレート分布；

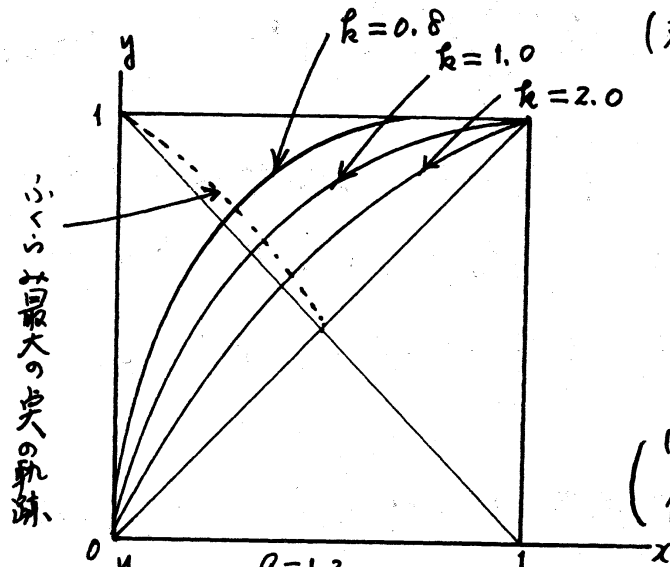
$$\text{確率密度関数 } f(t) = \left(\frac{a}{t}\right)^{a+1} \quad (a > 1, t > a) \quad \dots (2)$$

の場合と、対数正規分布；

$$\text{確率密度関数 } f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} e^{-\frac{(\log t - m)^2}{2\sigma^2}} \quad (t > 0) \quad \dots (3)$$

a 場合とを取りあげて、この分布がどうなるかを調べてみた。これらの分布に注目する理由は、パレート圖における最小の値にきかだつた特徴がみられるからである。すなわち、前圖とりあげたガンマ分布は、圖 3-1) のように、最小の値の軌跡が対角線 $x+y=1$ (今後、単に対角線といへば、こちらをさすものとする) の右上にくるのに対し、パレート分布では圖 3-2) のように、対角線の左下にくる。また、対数正規分布のパレート曲線は、対角線に関し

て対称な曲線であって、ふくらみ最大の点も対角線と一致する。



(文献[5],[6]参照)

図3-1)

ガンマ分布の
パレート図

(1)式に対応; μ の
値に等関係)

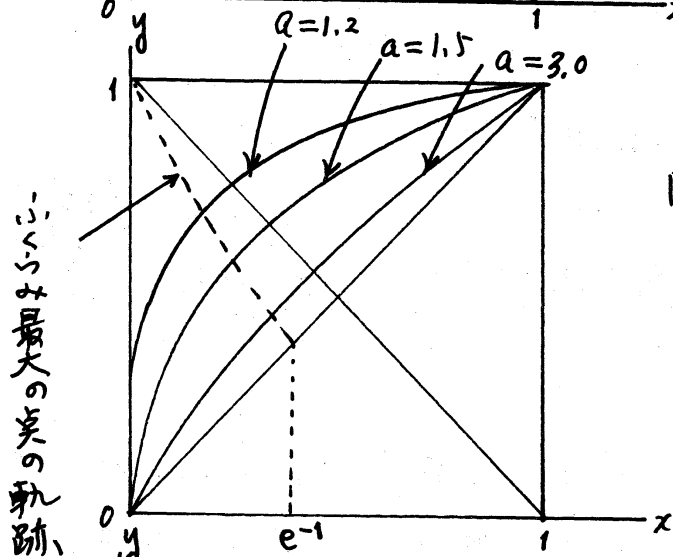


図3-2)

パレート分布の
パレート図

(2)式に対応)

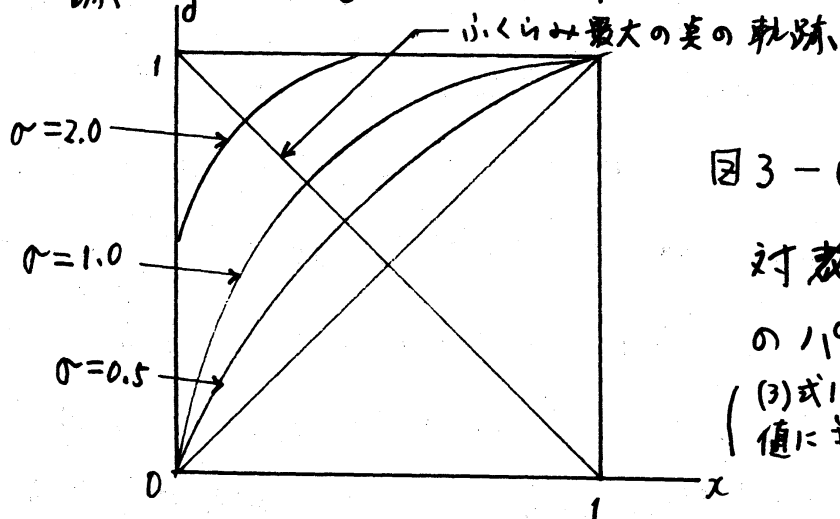


図3-3)

対称正規分布
のパレート図

(3)式に対応; m の
値に等関係)

2. ガンマサービスの場合

仕事の到着がポアソン分布，サービス時間が E_k 分布 (p.d.f. が (1) 式で表される；ただし， k は整数値に限定しない) にしたかうとき，区分率をどのように定めたらよいかについては，前回報告済み ([3] 参照) であるが，パレートサービス や対教正規サービス の場合との比較に便利なように，ここに再録しておく。すなわち，表 1 が，ガンマサービスに対するものであって，

表 1-(1)； 2つの窓口の列平均人数の和 L_q を最小にするような，分布での区分率 μ_c の値。

(注. μ_c は，分布での区分率 c を，平均サービス時間 $1/\mu$ を単位にしてほかった値.)

表 1-(2)； 2つの窓口の列平均人数 L_{q_1} ， L_{q_2} が等しくなるようにふりわけると，分布での区分率 μ_c の値。

表 1-(3)； 2つの窓口での系平均人数 L_1 ， L_2 が等しくなるようにふりわけると，分布での区分率 μ_c の値。

表 1-(4)； 分布での区分率 μ_c に対応する，パレート図での区分率 (横座標) α の値。

3. パレートサービスの場合

仕事の到着がポアソン分布、サービス時間がパレート分布にしたがうとき、区分点をどうしたらよいかを計算して、表2を得た。ただし、ガンマサービスのときのそれらと比較するため、パレート分布 (p. d. f. が (2) 式で表される) の1次モーメント、2次モーメントが、ガンマ分布のそれと同じになるように、パラメータを

$$a = 1 + \sqrt{k+1}$$

とあいた。

このようにして、表1に対応する表2が得られてゐる。すなわち、

表2-1) ; 2つの窓口の列平均人数の和 L_g を最小にするような、分布での区分点 μ_T の値。

表2-2) ; $L_{g_1} = L_{g_2}$ にする μ_T の値

表2-3) ; $L_1 = L_2$ にする μ_T の値

表2-4) ; 分布の区分点 μ_T に対応するパレート関数の区分点 α の値。

4. 対数正規サービスの場合

仕事の到着がポアソン分布，サービス時間が対数正規分布（p. d. f. が(3)式で表される）にしたがうとき，区分度をどうしたらよいかを計算して，表3を得た。ただし，パレートサービスの場合と同じように，これをガンマサービスのときの区分度と比較しやすくするために，1次モーメント，2次モーメントをそろえることにした。そのために，対数正規分布のパラメータ m, σ に関して

$$e^{\sigma^2} = 1 + \frac{1}{k^2}, \quad e^m = \left(\mu \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \right)^{-1}$$

が成り立つものとした。

このようにして，表1に対応する表3が得られた。すなわち，

表3-①) ; 2つの窓口の列平均人数の和 L_{g_1} を最小にするような，分布での区分度 $\mu\tau$ の値。

表3-②) ; $L_{g_1} = L_{g_2}$ にする $\mu\tau$ の値。

表3-③) ; 分布の区分度 $\mu\tau$ に対応するパレート図での区分度 λ の値。

対称正規サービスの場合、

$$L_{g_1} = L_{g_2}$$

にするような区分別は

$$L_1 = L_2$$

にするような区分別と一致する。とだけかりでなく、対称正規サービスの場合には、上のような区別のし方が、定は

$$S_1 = S_2$$

とするような区分別法とも一致していることを示すことができる。

5. 各種の区分別法の比較

表1～表3をくらべてみる。

ポアソン到着・ガンマサービスの場合における仕事のわりありに関しては、次の様相がうかがわれる。 L_g を最小にしたり、 $L_{g_1} = L_{g_2}$ になるように振りかける区分別法について、 S の値の増加とともに、 $\mu\tau$ の値が増加することかわかるが、 $L_1 = L_2$ になるような区別のし方においては、 S の値の増加とともに $\mu\tau$ の値は減少する。

(←表1-(1)～表1-(4))

これに対し、ポアソン到着・パレートサービスの場合については、上と全く逆の様相を呈する。すなわち、 L_g を最小

にしたり, $L_{g_1} = L_{g_2}$ にしたりする区分点については, ρ の増加とともに, μ の値が減少。しかし, $L_1 = L_2$ にする μ の値は, ρ の値の増加とともに増える。

(←表 2-11 ~ 表 2-14)。

一方, ポアソン到着・対称正規サービスの系においては, L_g を最小にする区分点について, ρ の増加とともに μ が増大する。しかし, $L_{g_1} = L_{g_2}$ にしたり $L_1 = L_2$ にする区分点は, ρ の値に無関係である。

以上, 客の到着がいずれもポアソン分布にしたがう場合だけをとりあげたが, より一般の到着分布に対してはどうか。また, もっと複雑な系についてはどうなるか。これらは, 今後の課題としたい。

なお, 本稿を算するにあたり, 計算 (とくに数表の作成) の大部分を, (元) 東京理科大学大学院生 中野勝博君に手伝っていただいた。ここに記して謝意を表したいと思う。

[文 献]

[1] 牧野都治 (1976),

待ち行列タイプの問題に対するパレート分析,
統計数理研究所彙報, 23, 129-134.

[2] 牧野都治 (1979),

分布の特性の表現に対するパレート図の利用について, 統計数理研究所彙報, 26, 1-9.

[3] 同上 (1982),

待ち行列とパレート分析, 京都大学教理解析研究所講究録, 452, 107-124.

[4] 同上 (1982),

待ち行列論におけるアーラン分布とマイブル分布, 応用統計学, Vol. 11, No. 3, 153-158.

[5] 同上 (1984),

格差・パレート図・ABC分析,
日本評論社, 140-154.

[6] 牧野都治, 中野勝博 (1982),

仕事のわりふり問題における分布の影響について, 日本OR学会1982年秋季研究発表会予稿集.

表1. ガンマカーブスの場合

表1-① 2つの窓口の列平均人数

L_{g_1} , L_{g_2} の和 L_g を最小
にする μ の値.

ρ \ g	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	3.59492	3.86201	4.18734	4.57842	5.03556
0.3	2.25820	2.34826	2.44762	2.55553	2.67038
0.5	1.86940	1.91894	1.97114	2.02601	2.08250
0.8	1.60586	1.63261	1.66018	1.68824	1.71638
1.0	1.50674	1.52635	1.54630	1.56637	1.58627
1.5	1.36206	1.37285	1.38361	1.39422	1.40456
2.0	1.28278	1.28966	1.29307	1.30306	1.30943
2.5	1.23238	1.23718	1.24186	1.24639	1.25072

注. ① g は サービス分布 (E_g 分布) の パラ
メータ.

② μ は, 分布での区間点 μ , 平均
サービス時間 $1/\mu$ を単位として与った値.

表 1-(2) $L_{g_1} = L_{g_2}$ にあつる $\mu\tau$ の値

h \ ρ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	4.06715	4.73688	4.88965	5.07221	5.29390
0.3	2.56726	2.60080	2.63922	2.68366	2.73564
0.5	2.03415	2.05051	2.06910	2.09039	2.11502
0.8	1.69365	1.70167	1.71073	1.72103	1.73286
1.0	1.57070	1.57631	1.58264	1.58982	1.59805
1.5	1.39693	1.39919	1.40200	1.40664	1.41078
2.0	1.30492	1.30666	1.30816	1.31081	1.31331
2.5	1.24775	1.24892	1.25022	1.25170	1.25338

表 1-(3) $L_1 = L_2$ にあつる $\mu\tau$ の値

h \ ρ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	7.26501	6.49188	6.06845	5.84718	5.78000
0.3	3.20562	3.07630	2.98380	2.92320	2.89216
0.5	2.33571	2.28372	2.44315	2.21424	2.19749
0.8	1.83769	1.81587	1.79781	1.78413	1.77553
1.0	1.67050	1.65616	1.64403	1.63463	1.62853
1.5	1.44695	1.44032	1.43454	1.42991	1.42677
2.0	1.33502	1.33122	1.32784	1.32508	1.32401
2.5	1.26787	1.26540	1.26319	1.26137	1.26008

表1-(4) 分布の区分度 $\mu\tau$ に

対応する パレート図での区分度

 α の値

k	L_3 最小			$L_{g_1} = L_{g_2}$			$L_1 = L_2$		
	ρ	0.1	0.9	ρ	0.1	0.9	ρ	0.1	0.9
0.1	$\mu\tau$	3.59	5.04	$\mu\tau$	4.07	5.29	$\mu\tau$	7.27	5.78
	α	0.079	0.058	α	0.064	0.055	α	0.038	0.050
0.3	$\mu\tau$	2.26	2.67	$\mu\tau$	2.57	2.74	$\mu\tau$	3.21	2.89
	α	0.138	0.114	α	0.119	0.111	α	0.089	0.103
0.5	$\mu\tau$	1.87	2.08	$\mu\tau$	2.03	2.12	$\mu\tau$	2.34	2.20
	α	0.171	0.149	α	0.154	0.145	α	0.126	0.138
0.8	$\mu\tau$	1.61	1.72	$\mu\tau$	1.69	1.73	$\mu\tau$	1.84	1.78
	α	0.204	0.187	α	0.190	0.183	α	0.167	0.178
1.0	$\mu\tau$	1.51	1.59	$\mu\tau$	1.57	1.60	$\mu\tau$	1.67	1.63
	α	0.221	0.206	α	0.208	0.202	α	0.188	0.198
1.5	$\mu\tau$	1.36	1.40	$\mu\tau$	1.40	1.41	$\mu\tau$	1.45	1.43
	α	0.253	0.241	α	0.241	0.238	α	0.226	0.235
2.0	$\mu\tau$	1.28	1.31	$\mu\tau$	1.30	1.31	$\mu\tau$	1.34	1.32
	α	0.275	0.264	α	0.264	0.264	α	0.252	0.260
2.5	$\mu\tau$	1.23	1.25	$\mu\tau$	1.25	1.25	$\mu\tau$	1.27	1.26
	α	0.292	0.283	α	0.283	0.283	α	0.274	0.278

表2. パレートサービスの場合

表2-11) 2つの窓口の列平均人数
 L_{g_1} , L_{g_2} の和 L_g を最小
 にする μ の値

$k \backslash g$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	2.95885	2.65216	2.32874	2.00722	1.71712
0.3	1.78589	1.65647	1.52743	1.41045	1.30450
0.5	1.46594	1.38649	1.31056	1.24043	1.17995
0.8	1.26348	1.21544	1.17029	1.12881	1.09152
1.0	1.19233	1.15515	1.12037	1.08846	1.05968
1.5	1.09599	1.07322	1.05204	1.03260	1.01499
2.0	1.04849	1.03268	1.01800	1.00451	0.99224
2.5	1.02104	1.00923	0.99826	0.98817	0.97897

(注) パレート分布の1次モーメント, 2次モーメントが, E_k 分布(表1)のそれと等しくなるように調整してある。

表 2-(2) $L_{g_1} = L_{g_2}$ に する $\mu\tau$ の 値

$h \setminus \rho$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	1.93033	1.85589	1.77414	1.68405	1.58471
0.3	1.38583	1.35704	1.32546	1.29072	1.25329
0.5	1.22619	1.20899	1.19009	1.16924	1.14616
0.8	1.12036	1.11011	1.09882	1.08632	1.07243
1.0	1.08192	1.07402	1.06529	1.05563	1.04486
1.5	1.02856	1.02373	1.01839	1.01245	1.00582
2.0	1.00168	0.99833	0.99461	0.99048	0.98585
2.5	0.98604	0.98353	0.98075	0.97765	0.97417

表 2-(3) $L_1 = L_2$ に する $\mu\tau$ の 値

$h \setminus \rho$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	1.09595	1.24948	1.35088	1.40877	1.42461
0.3	1.01226	1.07012	1.11477	1.14536	1.16063
0.5	0.98845	1.02237	1.05008	1.07034	1.08188
0.8	0.97125	0.99110	1.00799	1.02096	1.02900
1.0	0.96445	0.97964	0.99276	1.00303	1.00960
1.5	0.95444	0.96357	0.97165	0.97816	0.98253
2.0	0.94925	0.95553	0.96115	0.96573	0.96893
2.5	0.94635	0.95101	0.95523	0.95871	0.96115

表2-(4) 分布の区分臭 $\mu\tau$ に対応する 10° L-ト図での区分臭 χ の値

k	L_3 最小			$L_{g_1} = L_{g_2}$			$L_1 = L_2$		
	ρ	0.1	0.9	ρ	0.1	0.9	ρ	0.1	0.9
0.1	$\mu\tau$	2.96	1.72	$\mu\tau$	1.93	1.58	$\mu\tau$	1.10	1.42
	χ	0.027	0.083	χ	0.066	0.099	χ	0.223	0.124
0.3	$\mu\tau$	1.79	1.30	$\mu\tau$	1.39	1.25	$\mu\tau$	1.01	1.16
	χ	0.075	0.148	χ	0.129	0.161	χ	0.253	0.189
0.5	$\mu\tau$	1.47	1.18	$\mu\tau$	1.23	1.15	$\mu\tau$	0.99	1.08
	χ	0.113	0.183	χ	0.168	0.194	χ	0.273	0.223
0.8	$\mu\tau$	1.26	1.09	$\mu\tau$	1.12	1.07	$\mu\tau$	0.97	1.03
	χ	0.157	0.221	χ	0.208	0.232	χ	0.291	0.253
1.0	$\mu\tau$	1.19	1.06	$\mu\tau$	1.08	1.04	$\mu\tau$	0.96	1.01
	χ	0.180	0.239	χ	0.227	0.244	χ	0.300	0.268
1.5	$\mu\tau$	1.10	1.01	$\mu\tau$	1.03	1.01	$\mu\tau$	0.95	0.98
	χ	0.223	0.275	χ	0.263	0.275	χ	0.319	0.297
2.0	$\mu\tau$	1.05	0.99	$\mu\tau$	1.00	0.99	$\mu\tau$	0.95	0.97
	χ	0.253	0.296	χ	0.286	0.296	χ	0.332	0.313
2.5	$\mu\tau$	1.02	0.98	$\mu\tau$	0.99	0.97	$\mu\tau$	0.95	0.96
	χ	0.275	0.310	χ	0.305	0.319	χ	0.342	0.329

表3. 対数正規サービスの場合

表3-① 2つの窓口の列平均人数 L_{g_1} , L_{g_2} の和 L_g を最小にする $\mu\tau$ の値

ρ h	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	3.38882	3.54465	3.71903	3.91972	4.16720
0.3	2.11897	2.19569	2.27521	2.35804	2.44649
0.5	1.75877	1.81223	1.86532	1.91760	1.96908
0.8	1.51925	1.55677	1.59247	1.62576	1.65602
1.0	1.43056	1.46201	1.49135	1.51799	1.54127
1.5	1.30299	1.32550	1.34578	1.36335	1.37769
2.0	1.23425	1.25185	1.26732	1.28031	1.29036
2.5	1.19111	1.20557	1.21806	1.22830	1.23594

注. 対数正規分布の1次モーメント, 2次モーメントが, E_h 分布 (表1) のそれと等しくなるように調整してある。

表3-② L_{g_1} , L_{g_2} に対する $\mu\tau$ の値

h	0.1	0.3	0.5	0.8
$\mu\tau$	3.31662	2.08167	1.73205	1.50000
h	1.0	1.5	2.0	2.5
$\mu\tau$	1.41421	1.29099	1.22474	1.18322

表3-(3) 分布の区分度 $\mu\tau$ に
 対応するハート図での区分度
 χ の値

k	L_g 最小			$L_{g_1} = L_{g_2}$		$L_1 = L_2$
	ρ	0.1	0.9	ρ の値に無関係		
0.1	$\mu\tau$	3.39	4.17	$\mu\tau$	3.32	左の L_{g_1} L_{g_2} における値 と同じ
	χ	0.059	0.044	χ	0.061	
0.3	$\mu\tau$	2.12	2.45	$\mu\tau$	2.08	
	χ	0.110	0.089	χ	0.113	
0.5	$\mu\tau$	1.76	1.97	$\mu\tau$	1.73	
	χ	0.144	0.121	χ	0.148	
0.8	$\mu\tau$	1.52	1.66	$\mu\tau$	1.50	
	χ	0.180	0.156	χ	0.184	
1.0	$\mu\tau$	1.43	1.54	$\mu\tau$	1.41	
	χ	0.199	0.175	χ	0.204	
1.5	$\mu\tau$	1.30	1.38	$\mu\tau$	1.29	
	χ	0.234	0.210	χ	0.238	
2.0	$\mu\tau$	1.23	1.29	$\mu\tau$	1.22	
	χ	0.260	0.236	χ	0.264	
2.5	$\mu\tau$	1.19	1.24	$\mu\tau$	1.18	
	χ	0.278	0.254	χ	0.283	