数理解析研究所講究録
第520巻 1984年 36-46

REDUCEによるLegendre陪関数 $P_\ell^m(\cos\theta)$ の差分化

広大 工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

§1 序　微分方程式の理論とくらべて差分方程式の理論は未発達である。その理由は色々と考えられるが、最大の原因は差分演算では極限操作 $\delta \to 0$ がないので、演算結果が非常に繁雑になることである。ある程度は、演算形式の整備や、新しい関数の導入によって差分演算を簡素化できるが、微分と比較して差分は本質的に面倒なのである。この差分計算の面倒さをある程度救ってくれるのが、計算機による数式処理である。数式処理の出現によって差分学の発達が促進される事を期待している。

以下で、差分演算子のREDUCE2による表現ついて記述 1. Legendre陪関数 $P_\ell^m(\cos\theta)$, もっと一般にJacobiの多項式 $J_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta)$ の差分化(θを離散化する)について結果を示す。

§2　中心差分演算子 Δ_x と平均化演算子 Π_x

差分計算では，前進差分，後退差分，中心差分などと色々な差分を使うが、理論形式の美しさからここでは中心差分 Δ_x を採用する．中心差分 Δ_x と平均化演算 Π_x を次のように定義する．x の関数 $f(x)$ に対して

$$\Delta_x f(x) \equiv \delta^{-1}\left[f\left(x+\frac{\delta}{2}\right) - f\left(x-\frac{\delta}{2}\right)\right], \tag{1}$$

$$\Pi_x f(x) \equiv 2^{-1}\left[f\left(x+\frac{\delta}{2}\right) + f\left(x-\frac{\delta}{2}\right)\right], \tag{2}$$

とする。δ は差分間隔で定数とする。このとき二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積に対する演算規則は

$$\Delta_x[f(x)g(x)] = [\Delta_x f(x)][\Pi_x g(x)] + [\Pi_x f(x)][\Delta_x g(x)], \tag{3}$$

$$\Pi_x[f(x)g(x)] = [\Pi_x f(x)][\Pi_x g(x)] + q^2[\Delta_x f(x)][\Delta_x g(x)], \tag{4}$$

$$q \equiv (\delta/2),$$

となる，

(3), (4) 式をREDUCE２で表現すると（REDUCE２とREDUCE３ではマニュアルが異っているので，以下の表現はREDUCE３ではエラーになる可能性がある）

```
OPERATOR DL, PI;
LINEAR DL, PI;
FORALL F, G, X LET
DL(F*G, X) = DL(F,X)*PI(G,X) + PI(F,X)*DL(G,X),
PI(F*G, X) = PI(F,X)*PI(G,X) + Q**2*DL(F,X)*DL(G,X);
```

となる。演算子の対応は次の通りである。

$\Delta_x F(x) \Leftrightarrow$ DL(F, X), (DL は delta の略)

$\Pi_x F(x) \Leftrightarrow$ PI(F, X). (PI は pi)

§2. 階乗関数 $f(x)^{((n))}$

微分では x の指数関数の微分は簡単で

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \tag{5}$$

となる。この形式を差分でも保存するように階乗関数 $x^{((n))}$ を導入する:

$$\Delta_x x^{((n))} = n x^{((n-1))}. \tag{6}$$

中心差分 Δ_x に対する階乗関数は、n を自然数として、

$n=0$:　$x^{((0))}=1$,

$n=1$:　$x^{((1))}=x$,

$n>1$:　$x^{((n))}=(x+(n-1)\delta/2)\,x^{((n-2))}\,(x-(n-1)\delta/2)$,

$n>0$:　$x^{((-n))}=1/x^{((n))}$.

と定義する。　注：n が実数のときはガンマ Γ 関数によって表現される。

Legendre 陪関数 $P_l^m(\cos\theta)$ や Jacobi の多項式 $J_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta)$ のように $\cos\theta$ や $\sin\theta$ の多項式の差分を計算するのに必要なので、上記の階乗関数を一般化する。$f^{((n))}(x)$ を次式で定義する。　自然数 n に対して

$n=0$:　$f^{((0))}(x)=1$,　(7)

$n=1$;　$f^{((1))}(x)=f(x)$,　(8)

$n>1$;　$f^{((n))}(x)=f(x+(n-1)\delta/2)\,f^{((n-2))}(x)\,f(x-(n-1)\delta/2)$,　(9)

$n>0$;　$f^{((-n))}(x)=1/f^{((n))}(x)$.　(10)

このf$^{((n))}(x)$ に対して、次の差分規則が成立する。

$$\Delta_x f^{((n))}(x) = n f^{((n-1))}(x)\ \Delta_{x,n} f(x), \tag{11}$$

$$\Pi_x f^{((n))}(x) = f^{((n-1))}(x)\ \Pi_{x,n} f(x). \tag{12}$$

ここで

$$\Delta_{x,n} f(x) \equiv (n\delta)^{-1}\{f(x+n\delta/2) - f(x-n\delta/2)\}, \tag{13}$$

$$\Pi_{x,n} f(x) \equiv 2^{-1}\{f(x+n\delta/2) + f(x-n\delta/2)\}. \tag{14}$$

である。

例.
$$\Delta_{x,n} \sin x = \frac{1}{n\delta}(\sin(x+n\delta/2) - \sin(x-n\delta/2))$$
$$= \left(\frac{2}{n\delta}\right)\sin\left(\frac{n\delta}{2}\right)\cos x,$$

$$\Pi_{x,n} \sin x = \frac{1}{2}(\sin(x+n\delta/2) + \sin(x-n\delta/2))$$
$$= \cos(n\delta/2)\sin x,$$

となるので、定数 p_n, q_n を導入する。

$$p_n \equiv (\delta/2)^{-1} \sin(n\delta/2), \tag{15}$$

$$q_n \equiv \cos(n\delta/2). \tag{16}$$

$\lim \delta \to 0$ では $p_n \to n$, $q_n \to 1$ となる。

以上の演算規則により、次の公式を得る。

$$\Delta_x \sin^{((n))} x = p_n \sin^{((n-1))} x \cdot \cos x, \tag{17}$$

$$\Delta_x \cos^{((n))} x = -p_n \cos^{((n-1))} x \cdot \sin x, \tag{18}$$

$$\Pi_x \sin^{((n))} x = q_n \sin^{((n-1))} x \cdot \sin x, \tag{19}$$

$$\Pi_x \cos^{((n))} x = q_n \cos^{((n-1))} x \cdot \cos x. \tag{20}$$

式(17), (18), (19), (20) をREDUCE 2で表現する.

```
OPERATOR  FS, FC, P, Q;
FORALL N,X  LET
DL(FS(N,X),X)=P(N)*FS(N-1,X)*FC(1,X),
DL(FC(N,X),X)=-P(N)*FC(N-1,X)*FS(1,X),
```

```
PI(FS(N,X),X)=Q(N)*FS(N-1,X)*FS(1,X),

PI(FC(N,X),X)=Q(N)*FC(N-1,X)*FC(1,X),

DL(P(N),X)=0, DL(Q(N),X)=0,
PI(P(N),X)=P(N), PI(Q(N),X)=Q(N);
P(0):=0$  Q(0):=1$

FORALL X LET

FS(0,X)=0, FC(0,X)=1,
FS(-1,X)=1/FS(1,X), FC(-1,X)=1/FC(1,X);
```

最初の4行が式(17),(18),(19),(20)に対応している:

$$FS(N,X) \Leftrightarrow \sin^{((n))} x,$$

$$FC(N,X) \Leftrightarrow \cos^{((n))} x.$$

FSは factorial sine, FCは factorial cosine の略である。

5,6行は $P(N) \Leftrightarrow p_n$, $Q(N) \Leftrightarrow q_n$ が定数であることを示している。

7行目に $p_n=(\delta/2)^{-1}\sin(n\delta/2)$, $q_n=\cos(n\delta/2)$ の性質を加法定理を使って示したいが、演算の早い段階で加法

定理を使うと，式の爆発が起り易いので，$p_0=0$，$q_0=1$ だけを使った。

8，9，10行も同じで，式が複雑にならない限り，FS や FC の性質を使うようにしている。

式(15)，(16) は加法定理により

```
IF NUMBERP N AND ARB N>1 LET
  P(N) = P(N-1) * Q(1) + Q(N-1) * P(1),
  Q(N) = Q(N-1) * Q(1) - Q**2 * P(N-1) * P(1);
 (Q := (δ/2)$)
```

と表現される。

以下実際に REDUCE 2 を使って計算させてみると，思いがけない所で，人間と REDUCE 2 の数式の表現に対する理解の差を見せつけられる。例えば

DL(F**2，X) の計算は人間なら演算の定義より正しく行うが，REDUCE 2 では F*F と F**2 の内部表現が異っているのか，DL(F**2，X) の計算は教えないとやってくれない。

§3. 離散化されたLegendreの陪関数 $P_l^m(\cos x)$

以下で述べる結果は、現在では手計算で証明できる結果であって、REDUCE 2 を使う必要は全くない。REDUCE 2 を使って示せるのはせいぜい $l=3$ 位までである。しかし $P_l^m(\cos x)$ の一般形や差分方程式の形を決定するためには、色々と試行錯誤的に予想を立て、$l=0,1,2,\cdots$ について、それが正しい事を示すために大量の計算を行う必要がある。その計算量は普通の人間の能力をはるかにオーバーしている。予想が正しくても計算ミスのため間違った結論を下す場合がある（これが一番恐ろしい）。このとき数式処理は最大の偉力を発揮する。

離散化されたLegendreの陪関数 $P_l^m(\cos x)$ は次の差分方程式を満す。

$$\left\{\frac{1}{\sin x}\Delta_x \sin x\,\Delta_x + p_l p_{l+1} - p_m^2 \frac{1}{\sin x}\Pi_x \frac{1}{\sin x}\Pi_x\right\} P_l^m(\cos x) = 0,$$

ここで $P_l^m(\cos x)$ は $P_l^0(\cos x)$ からRodriguesの公式

$$P_l^m(\cos x) = \sin^{((m))}x\left[-\frac{1}{\sin x}\Delta_x\right]^m P_l^0(\cos x)$$

によって生成される。そして

$$P_\ell^\ell(\cos x) = \frac{1}{2^\ell p_\ell!}\left(\frac{1}{\sin x}\Delta_x\right)^\ell (\sin^{((\ell))}x)^2,$$

ただし $p_\ell! = p_\ell p_{\ell-1} \cdots p_2 p_1$。

$P_\ell^m(\cos x)$ は次の漸化式を満す。

$$P_\ell^{m+1}(\cos x) = \left[-q_m \Delta_x + p_m \frac{\cos x}{\sin x}\Pi_x\right] P_\ell^m(\cos x),$$

$$C_\ell^m P_\ell^{m-1}(\cos x) = \left[q_m \Delta_x + p_m \frac{\cos x}{\sin x}\Pi_x\right] P_\ell^m(\cos x),$$

ただし $C_\ell^m = p_{\ell+m}\, p_{\ell-m+1}$。

§4. 離散化されたJacobiの多項式 $P_n^{\alpha,\beta}(\cos x)$

離散化されたJacobi多項式 $P_n^{\alpha,\beta}(\cos x)$ は次の差分方程式をみたす。

$$\left\{q_{\alpha+\beta+1}\Delta_x^2 + (p_{\alpha-\beta} + p_{\alpha+\beta+1}\cos x)\frac{1}{\sin x}\Delta_x \Pi_x + p_n\, p_{n+\alpha+\beta+1}\right\} P_n^{\alpha,\beta}(\cos x) = 0.$$

$P_n^{\alpha,\beta}(\cos x)$ は Rodrigues の公式をみたす

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos x) = \frac{1}{p_n!\, W(\alpha,\beta,0,x)} \left(\frac{1}{\sin x}\Delta_x\right)^n W(\alpha,\beta,n,x),$$

ただし

$$W(\alpha,\beta,n,x) = \sin^{((2\alpha+n))}(x/2)\cos^{((2\beta+n))}(x/2)\sin^{((n))}x.$$

漸化式は

$$2\, p_{n+1}\, p_{\alpha+\beta+n+1}\, p_{\alpha+\beta+2n}\, P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(\cos x)$$

$$= p_{\alpha+\beta+2n+1}\left(p_{\alpha+\beta+2n+2}\, p_{\alpha+\beta+2n}\cos x + q_1\, p_{\alpha-\beta} P_{\alpha+\beta}\right) P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos x)$$

$$- 2\, q_n\, q_{\alpha+n}\, q_{\beta+n}\, q_{\alpha+\beta+n}\, p_{\alpha+n}\, p_{\beta+n}\, p_{\alpha+\beta+2n+2}\, P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(\cos x).$$