

# 計算機によるアフィンリー環の 指標公式の計算

数理解 神保 道夫  
" MICHIO JIMBO  
三輪 哲二  
TETSUJI MIWA

## 本稿の目的

筆者たちは、アフィンリー環の表現の分岐則におけるある種の双対法則を、計算機実験をきっかけとして発見した。リー環に関する予備知識を一切仮定せずに、实例に基づいてこれを説明し、そこで必要となる計算の内容を明らかにしたい。また、数学研究における計算機使用に関する独断と偏見も述べてみたい。

## 目次

- §1 有限次元半単純リー環の最高ウェイトの理論
- §2 アフィンリー環の vertex 表現
- §3 分岐則の双対性
- §4 数学研究における計算機使用について

## §1 有限次元半単純リー環の最高ウェイトの理論

半単純リー環の定義は、ここでは述べない。最も簡単かつ重要な例は

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{ X \in M(2): 2 \times 2 \text{ 行列環} \mid \text{tr } X = 0 \}$$

である。これはベクトル空間としては 3次元でその基底として

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

を取ると、次の関係式を満たす。

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f$$

$h$  の張る 1次元ベクトル空間を  $\mathfrak{f}$  , その双対空間を  $\mathfrak{f}^*$  と書く。  $\mathfrak{f}^*$  の各元をウェイトと呼ぶ。  $\lambda$  をウェイトとする時、  $\lambda$  の  $h$  における値を  $\lambda(h)$  と書く。半単純リー環の有限次元既約表現を最高ウェイトと呼ばれるウェイトによって分類するのが Cartan による最高ウェイトの理論である。

いま、  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の有限次元の既約な表現空間を  $V$  とする。  $V$  における  $h$  の固有ベクトルを  $v$  , 固有値を  $\lambda(h)$  ( $\lambda \in \mathfrak{f}^*$ ) とする。

$$h \cdot v = \lambda(h)v$$

この時、  $v$  をウェイト  $\lambda$  に関するウェイト・ベクトル

と呼ぶ。  $e, f$  の作用は ウェイト・ベクトルを別のウェイト・ベクトルに移す。すなわち

$$h \cdot e^n v = (\lambda(h) + 2n) e^n v$$

$$h \cdot f^n v = (\lambda(h) - 2n) f^n v$$

であるが、これでわかるように、 $e$  はウェイトを上げ、 $f$  はウェイトを下げる働きがある。ウェイトが異なる事より、 $\{e^n v\}_{n=0,1,2,\dots}$  たちは、0 にならなければ、それぞれ他から独立である。しかし  $V$  全体は有限次元だから  $\exists n_0$   $e^{n_0} v \neq 0$   $e^{n_0+1} v = 0$  となる。  $e^{n_0} v$  を  $v_0$  と書き  $\lambda + 2n_0$  を改めて  $\lambda$  と書く事にする。

$$h v_0 = \lambda(h) v_0$$

$$e v_0 = 0$$

この時、 $\lambda$  を最高ウェイト、 $v_0$  を最高ウェイトベクトルと呼ぶ。  $V$  の既約性により、 $V$  は  $\{f^n v_0\}_{n=0,1,2,\dots}$  なるベクトルたちで張られている。  $e, f, h$  の交換関係から

$$e f^{m+1} v_0 = (m+1)(\lambda(h) - m) f^m v_0$$

となるが,  $\exists m_0, f^{m_0}v_0 \neq 0, f^{m_0+1}v_0 = 0$   
 であるから

$$\lambda(\mathfrak{h}) = m_0 \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$$

である。すなわち, 最高ウェイトは,  $\mathfrak{h}$  における値が  
 $\mathbb{Z}_+$  に属する。この対応は逆にまたとれて

$$\left\{ \text{有限次元既約表現} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{最高ウェイト } \lambda \right\}$$

s.t.  $\lambda(\mathfrak{h}) \in \mathbb{Z}_+$

という対応が成立する。

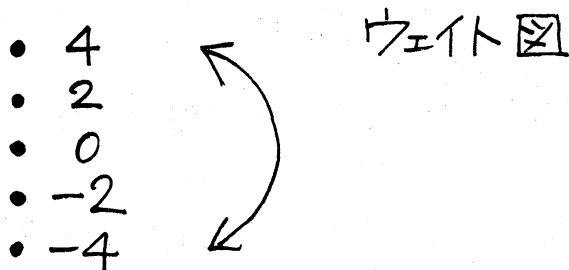
まとめると,  $V$  の構造は

$$\mathfrak{h}v_0 = \lambda(\mathfrak{h})v_0, \quad \lambda(\mathfrak{h}) = l \in \mathbb{Z}_+$$

$$e v_0 = 0$$

$$V = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}f v_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}f^l v_0$$

となる。これは, 次のようにウェイトを座標に  
 取って, 図示する事ができる。  $l = 4$  であれば



となる。黒点は、 $V$  のウェイト・ベクトルを表わし  
 数字は、対応するウェイト (の  $h$  での値) である。  
 この場合の ( $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の) 特殊事情により、各ウェイト  
 に対して、ウェイト・ベクトルは 1次元ずつで  
 ある。一般に、ウェイト図を数式で表現する  
 ために、次の指標を導入する。

$$\sum_{\lambda \in \mathfrak{f}^*} \dim V_{\lambda} \cdot e^{\lambda} \quad \left( \stackrel{\text{def}}{=} \text{ch } V \text{ と書く} \right)$$

ここで、 $V_{\lambda} = \{ v \in V \mid h v = \lambda(h) v, h \in \mathfrak{f} \}$   
 であり (ここでは後の都合上  $h$  で  $\mathfrak{f}$  の勝手な  
 元を表わした)、 $e^{\lambda}$  は  $\lambda, \mu \in \mathfrak{f}^*$  に対し  
 $e^{\lambda+\mu} = e^{\lambda} \cdot e^{\mu}$  を満たす形式記号とする。  
 さきほどの例では、 $\alpha \in \mathfrak{f}^*$ ,  $\alpha(h) = 2$ ,  $z = e^{-\alpha}$  とし

$$\text{ch } V = z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

となる。

一般の場合の指標を考える時、ウェイト図の持っ  
 ている対称性に着目する。例では、矢印で示し  
 た上下折り返しの対称性があった。これは  
 $\mathfrak{f}^*$  における一次変換  $\lambda \longmapsto -\lambda$  と

考える事ができる。一般に、この種の対称性  
(定義は与えない)の作る群を Weyl 群  
と呼ぶ。例では Weyl 群は  $\mathbb{O}_2$ : 2次  
の対称群に同型である。

Weyl は 指標を与える公式を与えた。その説明を  
するために例として  $sl(l+1, \mathbb{C})$  を取る。リー環  
としての生成元として

$$\{e_i, f_i, h_i\}_{i=1, \dots, l}$$

を用意する。  $l=1$  の時と違い、これらはベクトル  
空間としての  $sl(l+1, \mathbb{C})$  の基底ではない。次の  
交換関係を満たすものとする。

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_j, [h_i, e_j] = a_{ij} e_j, [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j$$

ここで、  $l \times l$  の行列を次のように与える。

$$(a_{ij})_{i,j=1, \dots, l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} : \text{Cartan 行列}$$

$[e_i, e_j]$  や  $[f_i, f_j]$  についても条件を課す必要が  
あるが、省略する。  $\mathfrak{g} = \mathbb{C} h_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C} h_l$ , その  
双対空間を  $\mathfrak{g}^*$  と書く。  $sl(l+1, \mathbb{C})$  の有限次元  
既約表現は  $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_+ \quad (i=1, \dots, l)$  である

ようなウェイトを最高ウェイトとし

$h_i v_0 = \lambda(h_i) v_0, e_i v_0 = 0 \quad (i=1, \dots, l)$   
なる最高ウェイトベクトル  $v_0$  により生成される。

Weyl 群  $W$  は  $S_{l+1}$ :  $(l+1)$  次対称群に同型であり, ウェイトの空間  $\mathfrak{f}^*$  に働く。  $\rho \in \mathfrak{f}^*$  を  $\rho(h_i) = 1 \quad (i=1, \dots, l)$  により定義する。

Weyl の公式は

$$\text{ch } V = \frac{\sum_{w \in W} \det w e^{w(\lambda + \rho)}}{\sum_{w \in W} \det w e^{w(\rho)}}$$

となる。この式に意味を持たせるには Weyl 群の作用を説明しなくてはならないが, そうする代りに, 行列式を用いて具体的に書き下した式を書くことにする。  $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$  で定義される  $\alpha_j \in \mathfrak{f}^*$  たち ( $j=1, \dots, l$ ) を基本ルートと呼ぶが,  $z_j = e^{-\alpha_j}$  という変数を導入すると指標は

$$\text{ch } V = e^\lambda \cdot (z_1, \dots, z_l \text{ の多項式})$$

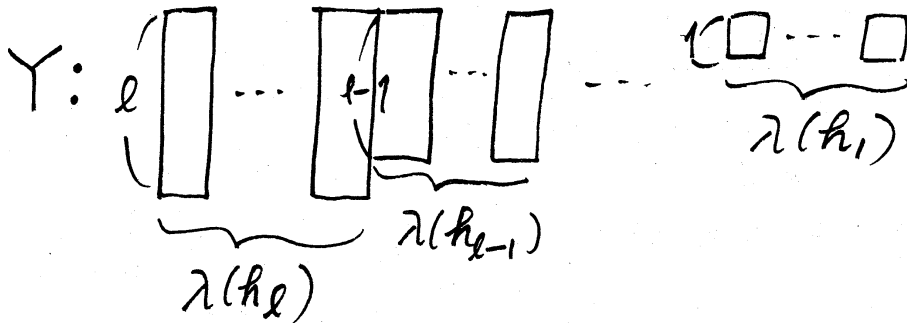
という形をしている。  $w_1, \dots, w_{l+1}$  を

$$z_j = w_{j+1} / w_j, \quad w_1 \cdots w_{l+1} = 1$$

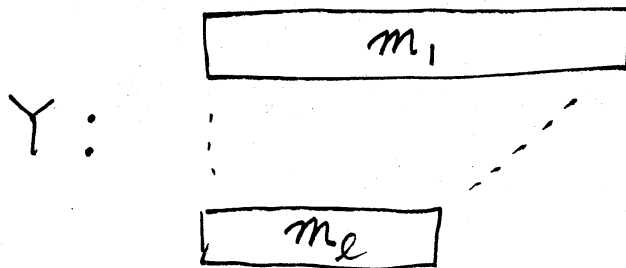
によって導入すると

$$\text{ch } V = \det \begin{pmatrix} w_1^{m_1+l} & \dots & w_{l+1}^{m_1+l} \\ \vdots & & \vdots \\ w_1^{m_l} & \dots & w_{l+1}^{m_l} \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} w_1^l & \dots & w_{l+1}^l \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

となる。但し,  $m_1, \dots, m_l$  は次のように決める。  
下図のように, Young 図形と呼ばれるものを作る。



これを, 横長の棒に読みかえて, その長さを上から順に  $m_1, \dots, m_l$  とする。



さて,  $\text{ch } V$  は  $w_1, \dots, w_{l+1}$  の対称式だから基本対称式を変数に取って書き直してみよう。  $x_1, x_2, x_3, \dots$  を



$$x_1 = w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

$$x_2 = \frac{1}{2} (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + \dots)$$

$$x_3 = \frac{1}{3} (w_1^3 + w_2^3 + w_3^3 + \dots)$$

によ、代入すると  $ch_Y$  は  $x_1, x_2, x_3, \dots$  の多項式になるが、これを  $\chi_Y(x_1, x_2, x_3, \dots)$  と書き、

Young 図形  $Y$  に対する Schur polynomial と呼ぶ。

Weyl の公式は次の形に書き直される。

$$\chi_Y = \det \begin{pmatrix} P_{m_1} & P_{m_1+1} & \dots & P_{m_1+l-1} \\ P_{m_2-1} & P_{m_2} & \dots & P_{m_2+l-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m_l-l+1} & P_{m_l-l+2} & \dots & P_{m_l} \end{pmatrix}$$

但し  $e^{\sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n k^n$  である。

例  $Y \boxplus$  ( $l=2$ )

$$\det \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_2 + \frac{x_1^2}{2} & x_3 + x_2 x_1 + \frac{x_1^3}{6} \\ x_1 & x_2 + \frac{x_1^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$= w_1^2 w_2^2 (1 + z_2 + z_2^2 + z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2^2)$$

こゝで  $w_1^2 w_2^2$  は最高ウェイト  $\lambda$  が  $\lambda(h_1) = \lambda(h_2)$

$= 2$  である事を表わし, 以下,  $1, z_2, z_2^2, z_1 z_2$  は  $v_0, f_2 v_0, f_2^2 v_0, f_1 f_2 v_0$  ( $f_2 f_1 v_0 = 0$  である) を表わす。  $z_1 z_2^2$  は  $f_2 f_1 f_2 v_0$  と  $f_1 f_2^2 v_0$  の張る空間が 1次元である事を示すが, ひとつある線型関係の具体形についての情報は, 指標からだけでは得られない。

この例でも述べたように, 指標は表現空間  $V$  の構造について, 大まかな情報を与えるが, 完全な記述とは gap がある。節を改めて, Kac-Moody Lie 環の簡単な表現で, 完全な記述が可能な場合を紹介する。

## §2 アフィン・リー環の vertex 表現

生成元として  $e_i^{(\infty)}, f_i^{(\infty)}, h_i^{(\infty)}$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) を取り, Cartan 行列が

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

となるリー環を  $gl(\infty)$  と呼ぶ。  $\lambda_i(h_j) = \delta_{ij}$  であるような  $\lambda_i$  を最高ウェイトとする表現を構成する。簡単のため  $i=0$  とするが, 一般の  $i$  は添字をずらせば得られる。

表現空間  $V$  としては無限変数の多項式環  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$  を取る。  $V$  の基底として、通常は単項式を取るが、ここでは Schur polynomial を取る。前節で Schur polynomial を説明したが、ここでは、Schur polynomial 或いは対応する Young 図形を考える時、付随する  $sl$  の表現は考えない。

例

$$\text{次数 } 1 \quad \chi_{\square} = x_1$$

$$\text{次数 } 2 \quad \chi_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} = -x_2 + \frac{x_1^2}{2}, \quad \chi_{\square\square} = x_2 + \frac{x_1^2}{2}$$

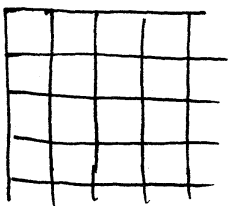
$$\text{次数 } 3 \quad \chi_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}} = x_3 - x_2x_1 + \frac{x_1^3}{6},$$

$$\chi_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} = -x_3 + \frac{x_1^3}{3},$$

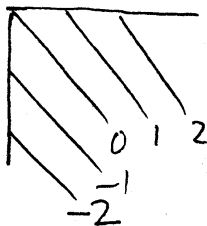
$$\chi_{\square\square\square} = x_3 + x_2x_1 + \frac{x_1^3}{6}$$

$gl(\infty)$  の  $V$  への作用を与えるために右下へ拡がった方眼を用意し、対角線方向に沿って同一になるように、頂点を番号づける。Young 図形を左上角に書く。

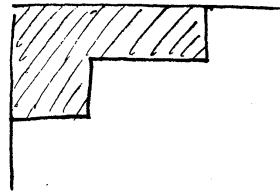
方眼

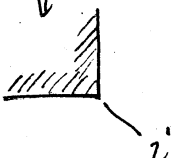
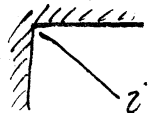


番号

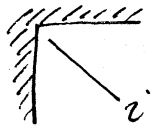



Y



$e_i^{(\infty)}$  の作用  
もし  $\gamma$  が  "これは  $\gamma$  の一部の拡大図" であらば  と

ひとつ角を引 込める。それ以外は、作用は 0 とする。

$f_i^{(\infty)}$  の作用  
もし  $\gamma$  が  "であらば"  と

ひとつ角を引 き出す。それ以外は、作用は 0 とする。

(問) この表現の計算機による実現を求め。  
Young 図形はたて線を 0, よこ線を 1 で表わせば, ビット・パターンで表現できる。これを利用するために, 機械語命令を用いて, 高速なものを作ってほしい。

アウインリ一環  $A_l^{(U)}$  は  $l+1$  組の  $(\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \tilde{h}_i)$  ( $i=0, \dots, l$ ) からなる生成元を持ち, それらは  $(\tilde{h}_i = [\tilde{e}_i, \tilde{f}_i])$

$$\tilde{e}_i = \sum_{j \equiv i \pmod{l+1}} e_j^{(\infty)}, \quad \tilde{f}_i = \sum_{j \equiv i \pmod{l+1}} f_j^{(\infty)}$$

で与えられる。すなわち  $A_l^{(U)}$  は  $o\mathfrak{gl}(\infty)$  の部分リ一環

である。

さっき作った  $gl(\infty)$  の表現空間  $V$  に,  $A_l^{(1)}$  も作用するが, 既約にはならない。  $V \ni 1$  を最高ウェイト・ベクトルとする既約な部分空間は,  $V$  の中の  $x_{l+1}, x_{2(l+1)}, \dots$  を含まない多項式の全体となり, これが,  $A_l^{(1)}$  の基本表現 ( $\lambda(h_i) = \delta_{i0}$  なる最高ウェイトを持つ) を与える。

### §3 分岐則の双対性

我々が計算機を使うキッカケとなった問題を説明する。アフィン・リー環  $C_l^{(1)}$  は,  $A_{2l-1}^{(1)}$  の部分リー環として, 次の  $\{e_i, f_i, h_i\}_{i=0, \dots, l}$  を生成元を持つ。  
( $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$  は  $A_{2l-1}^{(1)}$  の生成元)

$$e_0 = \tilde{e}_0$$

$$e_1 = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_{2l-1}$$

$$\vdots$$

$$e_{l-1} = \tilde{e}_{l-1} + \tilde{e}_{l+1}$$

$$e_l = \tilde{e}_l$$

( $f$  も同様)

$l=2$  としてまず  $A_3^{(1)}$  の基本表現を考え, Young 図形表示を使い, 最高ウェイト・ベクトル  $\phi$  (空図形, 多項式としては 1) から始めて,

順次,  $f_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) を作用させて, 表現空間のベクトルを作ってみよう。

i)  $\phi$  で「 $\wedge$ 」こんでいるのは 0 番だけなので

$$f_i \phi = \begin{cases} \square & i=0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

ii)  $\square_{-1}^1$  で「 $\wedge$ 」こんでいるのは, 番号で 1 と -1 の角で

$$f_i \square = \begin{cases} \square \square & i=1 \\ \square & i=3 \\ 0 & i=0,2 \end{cases}$$

(  $-1 \equiv 3 \pmod{4}$  である事に注意 )

以下同様に続けて, Young 図形の方眼数 4 (多項式としての次数 4) までの図は次のようになる。

		個数
0 次	$\phi$	1
1 次	$\square$	1
2 次	$\square \square, \square$	2
3 次	$\square \square, \square \square, \square$	3
4 次	$\square \square \square + \square \square, \square \square, \square \square + \square \square, \square \square + \square \square$	4

$gl(\infty)$  で同じ事をせると, すべての Young 図形がでてくるが,  $A_3^{(1)}$  では, 4次で 1次元少なくなる。この理由は, 既約表現では, すべての  $\tilde{e}_i$  に對して  $\tilde{e}_i v = 0$  となるベクトルは, 最高ウェイト・ベクトルの定数倍だけだったのが,  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4, \dots]$  は  $A_3^{(1)}$  の表現空間としては可約になっていて, 例えば,  $v = \square\square\square - \square\square + \square - \square = 4x_4$  も, これを満たす。という事は, このベクトルと, そこから生成される空間は,  $\phi$  を最高ウェイトとする  $A_3^{(1)}$  の表現空間と共通部分が (0以外に) ない。

以下  $\forall \tilde{e}_i v = 0$  を満たすベクトルも, (それから生成される既約部分空間での最高ウェイト・ベクトルになるという意味で) 最高ウェイト・ベクトルと呼ぶ。  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4, \dots]$  において,  $gl(\infty)$  の最高ウェイト・ベクトルは 1のみであり  $A_3^{(1)}$  の最高ウェイト・ベクトルの全体は  $\mathbb{C}[x_4, x_8, x_{12}, \dots]$  となる。

このように,  $gl(\infty) \supset A_\ell^{(1)}$  という pair については, 前者の基本表現を後者に制限した時の最高ウェイト・ベクトルの空間は簡単に決まってしまう。

同じ問題を  $A_{2\ell-1}^{(1)} \supset C_\ell^{(1)}$  の pair で考えたら

どうなるか、というのが我々の問題であった。

$A_3^{(1)}$  の例に戻って  $C_2^{(1)}$  についてのベクトルを vertex 表現を用いて作ってみると

0次	$\phi$	1		
1次	$\square$	1		
2次	$\square + \square$	1	$\square - \square$	1
3次	$\square, \square + \square$	2	$\square - \square$	1
4次	$\begin{array}{c} \square \\ + \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \\ + \\ \square \\ + \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \\ + \\ \square \\ + \\ \square \end{array}$	3	$\begin{array}{c} \square \\ + \\ \square \\ - \\ \square \\ - \\ \square \end{array}$	1

となり、最高ウェイト・ベクトル (i.e.  $\forall e_i v = 0$  となる  $v$ ) の全体を  $\Omega$  と書くと

$$\Omega = \mathbb{C} \phi \oplus \mathbb{C} (\square - \square) \oplus \dots$$

となる。すなわち

問題 1.  $\Omega$  を決定せよ。

この問題より、少し弱いのが

問題 2.  $\text{ch } \Omega$  を決定せよ。



問題 2 は、直接、計算機を使って、計算する事ができる。次に、アフィン・リー環の最高ウェイト表現についても、Weyl の指標公式が、同じ形で（但し Weyl 群は無限群になる）成立する事が Kac によりわかっている。  $A_3^{(U)}$  の指標は  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$  に対応して  $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$  の 4 変数の巾級数となる。最高ウェイトが  $\lambda$  の時、この指標を  $\tilde{\chi}_\lambda$  と書こう。一方  $C_2^{(U)}$  の指標も同じく  $f_0, f_1, f_2$  に対応して  $z_0, z_1, z_2$  の変数の函数となる。これを  $\chi_\lambda$  と書く。 $\lambda$  に対応した  $A_3^{(U)}$  の既約な表現空間は、 $C_2^{(U)}$  の表現空間として  $\lambda, \lambda', \dots$  と無限個の最高ウェイトに対応する既約な表現に分岐する。（上の例では  $\phi$  は  $\lambda(h_i) = \delta_{i0}$  であり、 $\theta - \theta$  は  $\lambda(h_i) = \delta_{i3}$  であるといったように。）この無限個は、null-root と呼ばれる特別な方向を法とすると、有限個に分類する事ができ、その分類の各類について最高ウェイト・ベクトルの次元の母函数を作るとそれは一変数  $g = z_0 z_1^2 z_2$  の巾級数となる。これを  $e_{\lambda\lambda}(g)$  と書く。

この時  $|$  で 制限  $\hat{z}_0 = z_0, \hat{z}_1 = \hat{z}_3 = z_1,$   
 $\hat{z}_2 = z_2$  を表わすと

$$\hat{\chi}_{\lambda} | = \sum_{\lambda} e_{\lambda\lambda}(\rho) \chi_{\lambda}$$

という等式が成立する。この式で、 $\hat{\chi}_{\lambda} |$  と  $\chi_{\lambda}$  は Kac の公式により計算可能であり、それぞれ、 $z_0, z_1, z_2$  の中級数となる。そこで、我々の求める  $e_{\lambda\lambda}(\rho)$  は、 $\hat{\chi}_{\lambda} |$  から  $\chi_{\lambda}$  を次々にさびいていく手続きにより  $\rho$  の中級数展開の係数が計算可能である。

しかし、現実には、 $A_{2\ell-1}^{(1)} \supset C_{\ell}^{(1)}$  で  $\ell$  が大きな値になると、計算効率の点で、この方法は実効的でない。そこで、手段として適当な 1 変数特殊化をしてやると、 $\ell = 20$  ぐらいまで、例えば  $\rho$  の係数が整数桁ある程度の範囲で、容易に計算できる。(実際、我々は、ポケット・コンピュータの BASIC から始めて、2, 3 週間で DEC2020 の BASIC で結果を得た。)

驚いた事に結果は、

$l$  に無関係な  $f_{\lambda\lambda}^{(j)}(g)$  によって

$$e_{\lambda\lambda}^{(l)}(g) = f_{\lambda\lambda}^{(0)}(g) + g^l f_{\lambda\lambda}^{(1)}(g) + g^{2l} f_{\lambda\lambda}^{(2)}(g) + \dots$$

と書ける事がわかった。この結果を吟味する事によって、最終的に、我々は次のような分岐法則の双対性にたどりついた。すなわち (細かい点は別にして)  $A_{2l-1}^{(l)} \supset C_l^{(l)}$  という pair に対する level  $m$  の表現の分岐法則は  $A_{m-1}^{(l)} \subset C_m^{(l)}$  という pair に対する level  $l$  の表現の分岐法則に、本質的に一致する。この詳細については、他の文献にゆずる。

#### §4 数学研究における計算機使用について (個人的感想)

碁や将棋の専門家にとっては、手が読めるという事は大きな武器であり、それなくして専門家とは言えないのだけれど、高段者・名人となるにはむしろ、手を読まないという能力が要求される、という話を、あてはめてみる。計算機は我々がキチンとした指示を与えさえすれば、時間の許す範囲でいくらでも結果を出してくれる。

しかし、我々の目指す方向に宝があるか無いかは答えてくれない。間違った方向で"あれば"計算結果は、無意味な数字の列となるだろうからそれを判断して撤退する事は比較的容易である。危険なのは、おおむね正しい方向をつかんでいる時には、計算結果も意味ありげになってくるので、更に先へと"手を読む"事に熱中してしまう事である。この場合、CPU timeだけでなく、我々のLIFE timeを浪費してしまうかもしれない。

数学の教育(但し計算機がある程度使いこなせるレベルでの数学の教育)という点からは、上に述べた危険性は考える必要はないので、もっと(というより現在は0に近い)活用されるべきであろう。というのは、何かを学ぶ方法のひとつに他人に教えるというのがあるが、これは例えば、大勢いっぺんに先生の講義を聞くよりも、友達と教人でセミナーを開く事が役に立つ事があるというの、ひとつの例である。しかし、セミナーでしゃべるといっても、

人間相手だと、本に書いてあった証明を繰り返すだけで終わりという事では、通常身につかない。そこで、計算機に教えるのである。計算機は、本の証明をTYPEしても解ったとは言ってくれない。そこで、こちらが考えざるを得なくなる。…… クラークソン工科大学では、マイコンを買う事を、全ての学生に必須とする事が論議されていると聞いたが、……

最後に、もうひと言。ある時、プログラムの作成上、大きな素数が必要になって、図書室へ素数表を探し~~ま~~に行き目的を果たさなかった事があった。その時、ある人に、「そんなの、計算させりゃいいじゃないの。」と言われて、成程と思った。確かに、数表、公式集のたぐいの多くは、計算機に取って代わられる運命にあると言える。そこで、ひとつの提案。日本数学会では、数学辞典のオ3版を数年前から計画中で、不思議とまだできてこないようですが、オ3版はいずれであるとして、オ4版は是非、データ・ベースとして端末から on line で利用ができる形にしたい。その際、望ましいのは、次の点である。例えば超函数を知らない人が、何かの必要にせまられた場合、勉強

する、最良の方法は、教科書(例えば K社の本)を  
読む事ではなく、教科書の著者(例えば K氏)  
に直接会って、教えてもらう事である。そうすれば、  
その人の必要と知識に応じて、1時間位で、当面  
必要な事項は修得できるだろう。さて、ブルバキ  
に較べて、数学辞典の長所は、こういった理想に  
近い形で情報が得られるという点である。そこで、  
(遠くない)

この方向を押し進めるためにも、データ・ベース化を  
して欲しいわけですが、夢物語でしょうか？