数理解析研究所講究録
第 522 巻 1984 年 1-15

二部グラフの拡張性の評価について

東北大学工学部　神保　秀司
東北大学工学部　丸岡　章

1. まえがき　$G=(U,V,E)$ を $|U|=|V|$ なる二部グラフとし，$X\subset U$ に対し，$\Gamma(X)$ で X の要素と隣接する V の要素の集合を表わすとき，$0<\alpha<1$, $0<\beta$ が存在して，

$$(\forall X\subset U)(|X|\leq\alpha|U| \text{ ならば } |\Gamma(X)|\geq\beta|X|) \qquad (*)$$

が成立するならば，G を (α,β)-拡張グラフと呼ぶ。但し，有限集合 A に対して，$|A|$ で A の要素の個数を表わす。また，二部グラフのクラス（列）で，その要素の全てが (α,β)-拡張グラフとなるような定数 α,β が存在するものは，拡張グラフのクラス（列）と呼ばれる。この条件は，ある意味で U と V の間の結合の度合が大きいことを表わす。グラフ $G=(U,V,E)$ のサイズを枝の個数 $|E|$ で表わし，$|U|=|V|=n$ とおく。サイズが小さいグラフの列（例えば $O(n)$）で拡張的となるものを構成する問題はこれまで計算量の理論との関連で論じられてきた。すなわち，拡張グラフから構成されるスーパーコンセントレ

ータは計算量の下界を評価するのに用いられているし，また，最近拡張グラフはソーティングネットワークの構成にも利用され，Batcher[B]以来進展のなかったソーティングネットワークのサイズの上界が$O(n \log n)$であるという結果も得られている。

拡張グラフに関してGabberとGalil[GG]はサイズ$O(n)$の拡張グラフのクラスを具体的に構成し，その拡張グラフに関して(＊)式のα, βの値及びサイズの上界を評価している。この拡張グラフのクラスより構成されるサイズ$O(n)$のスーパーコンセントレータのサイズのnの係数は，数えあげの方法と呼ばれる議論により存在が示されるスーパーコンセントレータのサイズのnの係数より大きなものとなる。ここで，数えあげの方法とはあるクラスの中の条件を満足しないものの個数が全体の個数よりも小さいことを示すことにより，クラス全体の中に，必ず条件を満足するものが存在することを示す方法である。また，(α, β)-拡張グラフについても，現在数えあげの方法で存在が示されたグラフのサイズと比べて，具体的に構成されたもののサイズが極端に大きい場合があることが指摘されている[AKS]。

本報告では，これまでの拡張グラフの構成法を統一的な立場から再構成し，与えられた二部グラフのクラスが拡張的で

あることを示す問題が線形変換の固有値の上界を評価する問題に帰着できることを明らかにする。これにより，これまで知られている，具体的に構成可能なスーパーコンセントレータの中で最小のサイズのものよりもさらに小さい（サイズを入力数nで割った商，つまりdensity，を比べて）スーパーコンセントレータの列を構成することができた。

2. 拡張グラフと行列の固有値との関係　サイズ$O(n)$のスーパーコンセントレータを構成するには，サイズ$O(n)$の拡張グラフを構成すれば十分であるが，GabberとGalil[GG]はより強い条件を満足する二部グラフを構成している。

［定義1］　二部グラフ$G=(U,V,E)$，$|U|=|V|=n$の拡張係数dを，

$$d=\sup\{\delta\in\mathbb{R}\mid(\forall X\subset U)(|\Gamma(X)|\geq(1+\delta(1-(|X|/n)))|X|)\}$$

と定義する。」

［定義2］　$U=V=S$とするとき，有限集合S上の置換の集合$\Sigma=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_m\}$に対応する二部グラフ$G=(U,V,E)$を，

$$E=\{(u,v)\in S\times S\mid(\exists\sigma\in\Sigma)(v=\sigma(u))\}$$

により定義する。」

定義2におけるGの節点の最大次数は$|\Sigma|=m$以下である。

定義1のnを以下Gの入力数と呼ぶことにする。GabberとGalil[GG]は入力数n，サイズkn以下，拡張係数d以上で

あるグラフを(n,k,d)-拡張グラフ（expander）と呼んでいる。(n,k,d)-拡張グラフは入力数n，サイズkn以下の$(1/2, d/2)$-拡張グラフである。従って，（サイズ$O(n)$の）二部グラフの列で，それに属する二部グラフの拡張係数がある定数d以上であるものは，1の意味での拡張グラフの列となっている。以下では，置換の集合に対応する二部グラフの拡張係数の下界を評価する手段について述べる。

［表記法］　以下では，$\mathbb{R}$（$\mathbb{C}$）を実数（複素数）の集合とし，$\mathbb{R}^S$（$\mathbb{C}^S$）をSを添字とする実（複素）ベクトルの集合とする。S上の置換σに対応する置換行列を$M(\sigma)$と表わす。つまり，一般に行列Aの(i,j)成分を$A(i,j)$と表わすことにすれば，

$$M(\sigma)(i,j) = \delta(\sigma(i),j)$$

ただし，δはクロネッカーのデルタであり，$i=j$ならば，$\delta(i,j)=1$，$i\neq j$ならば，$\delta(i,j)=0$とする。また，環K上の$m\times n$行列の集合を$K(m,n)$と表わし，各成分の添字が$S\times T$の要素である行列の集合を$K(S,T)$と表わす。行列$A\in\mathbb{C}(n,n)$に対して，$A^*=\overline{{}^tA}$（Aを転置し，さらに各成分をその複素共役で置き換えたもの）と定義する。」

［定義3］　$x,y\in\mathbb{C}^S$，$x=(x_i)_{i\in S}$，$y=(y_i)_{i\in S}$とする。xとyの内積，$\langle x,y\rangle$とxのノルム$\|x\|$を，

$$\langle x,y\rangle=\textstyle\sum_{i\in S}\overline{x_i}y_i = x^*y,\qquad \|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

と定義する。また，$A^*=A$ である行列 A をエルミート行列，$A^*A=E$（単位行列）である行列 A をユニタリ行列と呼ぶ。」

［命題1］（Rayleigh の原理より）　A を n 次のエルミート行列とし，$\lambda_i \in \mathbb{R}$ を A の i 番目に大きい（重複度を考慮して並べた n 個の固有値のうちの）固有値，$y \in \mathbb{C}^n$ を λ_1 に対応する固有ベクトルとする。このとき，

$$\sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \lambda_1, \qquad \sup_{\|x\|=1, \langle x, y \rangle = 0} \langle Ax, x \rangle = \lambda_2$$
」

［定義4］　n 次行列 $A=(a_{ij})$ が，$a_{ij} \geq 0$，$\sum_k a_{ik} = \sum_k a_{kj} = 1$ $(\forall i, j)$ を満足するとき，A を確率行列と呼ぶ。」

確率行列は次の性質を持つ。

［命題2］　(i) 確率行列の積は確率行列である。　(ii) 確率行列は 1 を固有値として持ち，$\mathbb{1}=(1, \cdots, 1)$ は固有値 1 に属する固有ベクトルである。　(iii) 確率行列の固有値の絶対値は 1 を超えない。」

［定理1］　$\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_m\}$ は有限集合 S 上の置換の集合であり，σ_0 は S 上の恒等置換とする。任意の $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$，$a_1 > 0, \cdots, a_m > 0$，$\sum_i a_i = 1$ に対して，

$$A = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{1}{2} \left(M(\sigma_i) + M(\sigma_i^{-1}) \right) \right) \tag{1}$$

と定義する。α を A の，重複度を考慮して並べた $|S|$ 個の固有値のうちの2番目に大きな固有値とし，d を Σ に対応する二部グラフの拡張係数としたとき，

$$d \geq 1-\alpha \tag{2}$$

が成立する。(1)のAをΣの(重み$w:\sigma_i \mapsto a_i,\ i\in\{1,\cdots,m\}$に対する)平均と呼ぶことにする。」

(証明)　$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n\subset\mathbb{C}^n$とし,

$$z=x-(\langle x,\mathbb{1}\rangle/n)\mathbb{1}\ ,\ \mathbb{1}=(1,\cdots,1) \tag{3}$$

とする。

$$\|M(\sigma_i)z-z\|^2=2\|z\|^2\left(1-\left\langle\frac{1}{2}(M(\sigma_i)+M(\sigma_i^{-1}))z,z\right\rangle/\|z\|^2\right) \tag{4}$$

従って,$\langle z,\mathbb{1}\rangle=0$であること,Aは確率行列であるから最大固有値1,それに属する固有ベクトル$\mathbb{1}$を持つこと,および命題1,2より,

$$\sum_i a_i\|M(\sigma_i)z-z\|^2=2\|z\|^2(1-\langle Az,z\rangle/\|z\|^2)\geq 2(1-\alpha)\|z\|^2 \tag{5}$$

また,$S=\{s_1,\cdots,s_n\}$, $X=\{s_i\mid x_i=1\}\subset S$とおけば,

$$\|M(\sigma_i)z-z\|^2=\sum_j|x_{\sigma_i(j)}-x_j|^2=2|\sigma_i(X)\setminus X| \tag{6}$$

従って,

$$\sum_i a_i\|M(\sigma_i)z-z\|^2=2\sum_i a_i|\sigma_i(X)\setminus X| \tag{7}$$

(5),(7)より

$$\max_i|\sigma_i(X)\setminus X|\geq\left(\sum_i a_i\right)\left(\max_i|\sigma_i(X)\setminus X|\right)\geq\sum_i a_i|\sigma_i(X)\setminus X|\geq(1-\alpha)\|z\|^2 \tag{8}$$

また,

$$\|z\|^2=\left(\sum_i x_i^2\right)-\frac{1}{n}\left(\sum_i x_i\right)^2=\left(\sum_i x_i\right)-\frac{1}{n}\left(\sum_i x_i\right)^2=\left(\sum_i x_i\right)\left(1-\frac{1}{n}\sum_i x_i\right)$$
$$=|X|\left(1-\frac{1}{n}|X|\right) \tag{9}$$

従って,(8),(9)より,

$$\left|\bigcup_{i=0}^{m}\sigma_i(X)\right| \geq |X| + \max_i |\sigma_i(X)\setminus X| \geq |X| + (1-\alpha)\|z\|^2$$
$$= (1+(1-\alpha))(1-\frac{1}{n}|X|))|X| \quad (10)$$

従って，X は x の選び方により S の任意の部分集合を選べたから，(2)が成立する。 □

定理1により，置換の集合に対応する二部グラフの拡張係数の下界は，対称な確率行列の2番目に大きい固有値の上界を求めることにより求まることがわかる。個々の対称な確率行列の固有値の近似値を計算することは容易だが，置換の集合の平均の列を構成して，それに属する行列の2番目に大きい固有値の上界で上限に近い値のものを評価することは困難である場合が多い。そのため，以下では，置換のクラスでそれに属する置換を要素とする有限集合の平均の2番目に大きい固有値の上界が評価しやすいものを選び，その中から拡張係数の大きな$O(n)$サイズの二部グラフの列が対応する置換の集合の列を見つけるという方針を取る。

一般に，行列の最大固有値を評価することは2番目に大きい固有値を評価することと比べて容易である。以下の議論により，対称な確率行列を，その最大固有値である1を除いてそれと同じ固有値を持つ（但し，次数は1小さい）エルミート行列に変形できることが示される。

［定義5］　Tを正則行列とする。$T^{-1}AT$をAのTによる共役

変換と呼ぶ。」

［命題3］　共役変換によって行列の固有値は変化しない。」

［定義6］　n次行列Aがl次行列Bとm次行列Cの直和であるとは，$n=l+m$であり，Aが，$\mathbf{0}=(0,\cdots 0)$として，

$$A=\left(\begin{array}{c|c} B & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array}\right)$$

の形をしていることであり，$A=B\oplus C$と記述する。」

［命題4］　$A=B\oplus C$のとき，Aの固有値λの重複度は，λのBの固有値としての重複度とCの固有値としての重複度の和である。但し，λがB(C)の固有値でない場合は，λのB(C)の固有値としての重複度は0とする。」

［命題5］　Uはユニタリ行列，Hはエルミート行列ならば，$U^*HU=U^{-1}HU$はエルミート行列である。」

［命題6］　n次のユニタリ行列Uが，

$$U=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \cdots & & 1 \\ \hline \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \end{array}\right)$$

という形ならば，任意の対称な確率行列Aに対して，$n-1$次のエルミート行列Hが存在して，

$$U^*AU=[1]\oplus H$$

が成立する。但し，[1]は成分が1である1次の行列とする。」

<u>3. アファイン変換のクラスと離散フーリエ変換</u>　2.の命題

6により，対称な確率行列の2番目に大きい固有値を評価するためには，次数が1だけ小さいエルミート行列の最大固有値が評価できれば十分であることがわかる。置換のクラスとして離散トーラス上の2次元アファイン変換のクラス，ユニタリ行列として2次元離散フーリエ変換を選んだとき，命題6におけるエルミート行列Hの最大固有値の上界を評価できる置換の集合の列を構成できる。その具体例は4で述べ，この章では離散トーラス上のアファイン変換のクラスと離散フーリエ変換についての基本的な性質について述べる。

［定義7］　以下では，$T = \mathbb{Z}_m^k = \mathbb{Z}_m \times \overset{k}{\cdots} \times \mathbb{Z}_m$, $m \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \ldots\}$ とする。Tは離散トーラスと呼ばれる。T上の離散フーリエ変換$\Omega = (\omega_{ij})_{i,j \in T}$ は，一般に$\omega(x) = \exp((2\pi\sqrt{-1}/m)x)$として，

$$\omega_{ij} = \omega(\langle i, j \rangle)/\sqrt{|T|}$$

により定義される。但し，$i = (i_1, \ldots, i_k), j = (j_1, \ldots, j_k)$ に対して，

$$\langle i, j \rangle = \sum_{l=1}^{k} i_l j_l$$

とする。」

［命題7］　Ωはユニタリ行列であり，行，列の適当な順序付けのもとで，

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{|T|}} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \cdots 1 \\ \vdots & \\ 1 & \end{array} \right)$$

の形をしている。」

［定義８］　T上の写像のクラスP,Qを，

$$P=\{p:T\to T \mid (\exists A\in \mathbb{Z}(k,k))(|\det(A)|=1 \text{ かつ } (\forall x\in T)(p(x)=Ax))\},$$

$$Q=\{p:T\to T \mid (\exists a\in \mathbb{Z}^k)(\forall x\in T)(p(x)=x+a)\}$$

と定義する。一般に写像のクラスAから生成される写像のクラス，つまり，Aの要素の有限積全体を〈A〉と表わす。〈P∪Q〉をT上のアファイン変換のクラスと呼ぶことにする。」

［命題８］　P,Qを定義８で定義された写像のクラスとする。$x,y\in P$ ならば $xy\in P$ であり，$z\in P$ が存在して $xz=zx=I$（恒等写像（置換））。そして，$x,y\in Q$ ならば $xy\in Q$ であり，$z\in Q$ が存在して $xz=zx=I$。従ってP,Qの要素は置換であり，P,Qはそれぞれ群をなす。」

［命題９］　任意の $p\in\langle P\cup Q\rangle$ に対して，$p=\sigma\pi=\pi\sigma'$ となる $\pi\in P$，$\sigma,\sigma'\in Q$ が一意に存在する。」

［命題10］　任意の $p\in P$ に対して，

$$\Omega^* M(p)\Omega = M({}^t p^{-1})$$

但し，${}^t p$ は定義８で述べた，pを表現する行列Aの転置 ${}^t A$ が表現するPに属するT上の置換とする。」

［定義９］　(i,i) 成分が a_i である対角行列を $\Delta_i(a_i)$ と表わす。従って，$(\Delta_i(a_i))(i,j)=a_j\delta(i,j)=a_i\delta(i,j)$ である。」

［命題11］　$p\in Q$，$a\in T=\mathbb{Z}_m^k$，任意の $x\in T$ に対して $p(x)=x+a$ とする。このとき，

$\Omega^* M(P) \Omega = \Delta_i(\omega(\langle a, i\rangle))$ 」

〈PUQ〉に属する置換の集合の平均(ここで使われている「平均」は定理1で定義されたもので，行列を表わす)の2番目に大きい固有値を評価することは，命題3より，そのT上の離散フーリエ変換Ωによる共役変換(Cとする)の2番目に大きい固有値を評価することである。しかも，$C=[1]\oplus C'$という形をしているので，それはC'の最大固有値を評価することである。ここで注目すべきことは，T上のアファイン変換のクラスに属する置換のΩによる共役変換の各行，各列には0でない要素は丁度1個であるため，上で述べたC'の各行，各列には0でない要素は高々置換の集合の要素の個数しかないことである。以下では，置換の集合(求める二部グラフはこの置換の集合に対応する)の要素の個数は，置換の作用域の大きさに無関係にある定数以下とするから，C'の各行，各列には0でない要素は行列の次数に無関係にある定数以下となっている。

4．拡張グラフの構成とサイズの評価　この章では，具体的な，2次元離散トーラス上のアファイン変換の列に属する置換の集合の平均(定理1で定義されたもの)のΩによる共役変換の固有値を評価することにより，その置換の集合の列に対応する二部グラフの列の拡張係数の下界を評価する。そし

て，その二部グラフの列から，Gabber と Galil [GG] の述べた方法により得られる線形サイズのスーパーコンセントレータの列は，彼らの構成したスーパーコンセントレータの列よりもサイズが小さいことを示す。以下では，T は２次元離散トーラス，$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ を表わすものとする。

［命題12］（Gabber and Galil [GG] より）　$A=(a_{ij})$ を n 次の対角成分以外は非負の実対称行列とし，α は A の最大固有値，$\lambda_{ij}>0$，$\lambda_{ij}=1/\lambda_{ji}$（$1\le i,j\le n$）とする。このとき，

$$\alpha \le \max_i \sum_j \lambda_{ij} a_{ij}$$
」

［命題13］　$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}(n,n)$，A の絶対値最大の固有値を α，$B=(b_{ij})$ は，$b_{ij}\ge|a_{ij}|$ である実対称行列とする。B の最大固有値 λ は，$|\alpha|\le\lambda$ を満足する。」

［定義10］　$z=(x,y)\in T$ とする。T 上の置換 $\rho_1,\rho_2,\varphi_1,\varphi_2$ を，

$$\rho_1(z)=(x+2y,\ y),\ \rho_2(z)=(x,\ y+2x),\ \varphi_1(z)=(x+1,\ y),\ \varphi_2(z)=(x,\ y+1)$$

と定義する。$\rho_1,\rho_2\in P$，$\varphi_1,\varphi_2\in Q$ であり，ρ_1 と φ_1，ρ_2 と φ_2 はそれぞれ可換である。$\Sigma,\Sigma_0\subset\langle P\cup Q\rangle$ を，

$$\Sigma=\{I,\rho_1,\rho_2,\varphi_1\rho_1,\varphi_2\rho_2\},\ \Sigma_0=\{I,\rho_1,\rho_2,\varphi_1\rho_1,\varphi_2\rho_2,\varphi_1^2\rho_1,\varphi_2^2\rho_2\}$$

と定義する。」

［定義11］　$i=(i_1,i_2)\in T$ とする。

$$\|i\| = R_e(\omega(i_1)+\omega(i_2)) = R_e(\omega(i_1))+R_e(\omega(i_2))$$

と定義する。以下では，$\|x\|$ は，$x\in T$ ならばこの定義の意味

で，そうでないならば今まで通りの定義3の意味で使われる。」

［補題1］　$z \in T, z \neq (0,0)$，$S = \{\rho_1(z), \rho_1^{-1}(z), \rho_2(z), \rho_2^{-1}(z)\}$ とし，s_d, s_u を，$s_d = |\{w \in S \mid \|w\| > \|z\|\}|$，$s_u = |\{w \in S \mid \|w\| < \|z\|\}|$ と定義する。このとき，

$$s_d \leq 2 \quad \text{あるいは} \quad s_u \geq 1$$

が成立する。」

［補題2］　z, s_d, s_u は補題1で述べられたものとする。$\|z\| > 0$ ならば，

$$s_d \leq 1 \quad \text{かつ} \quad s_u - s_d \geq 2$$

が成立する。」

［定理2］　Σ_0 の平均，

$$A_0 = \frac{1}{16} \sum_{i \in \{1,2\}, j \in \{1,-1\}} \left(M(\rho_i^{\,j}) + 2M(\varphi_i^{\,j} \rho_i^{\,j}) + M(\varphi_i^{\,2j} \rho_i^{\,j}) \right)$$
$$= \frac{1}{16} \sum_{i \in \{1,2\}, j \in \{1,-1\}} (E + M(\varphi_i^{\,j}))^2 M(\rho_i^{\,j}),$$

の2番目に大きい固有値を α_0 とする。このとき，

$$\alpha_0 < \sqrt{3}/2$$
」

［系］（Gabber and Galil[GG]）　Σ_0 に対応する二部グラフの拡張係数は $1 - \alpha_0 = (2 - \sqrt{3})/2$ 以上である。」

（証明）　$\Omega^* A_0 \Omega = [1] \oplus B$，$B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}(T', T')$，$T' = T \setminus \{(0,0)\}$，$C = (c_{ij}) \in \mathbb{C}(T, T')$ を，$i = (i_1, i_2)$，$j = (j_1, j_2)$ に対して，

$$c_{ij} = \frac{1}{16} \left\{ |1 + \omega(i_2)|^2 \left(\delta(\rho_1(i), j) + \delta(\rho_1^{-1}(i), j) \right) + |1 + \omega(i_1)|^2 \left(\delta(\rho_2(i), j) + \delta(\rho_2^{-1}(i), j) \right) \right\}$$

により定義すれば，$c_{ij} \geq |b_{ij}|$ である。λ_{ij}，$i, j \in T'$ を，

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_{ij} = 1/\sqrt{3} & (\|i\| > \|j\|) \\ \lambda_{ij} = 1 & (\|i\| = \|j\|) \\ \lambda_{ij} = \sqrt{3} & (\|i\| < \|j\|) \end{array}\right\}$$

と定義する。補題1より，$\|i\|>0$ ならば，

$$\sum_i \lambda_{ij} C_{ij} \leq \sqrt{3}/2 \qquad (2)$$

$\alpha = \max\{|1+\omega(i_1)|^2/4, |1+\omega(i_2)|^2/4\}$，$\beta = \min\{|1+\omega(i_1)|^2/4, |1+\omega(i_2)|^2/4\}$

とおく。補題1より，$\|i\|>0$ ならば，

$$\sum_j \lambda_{ij} C_{ij} \leq (3\alpha+2\beta)/(2\sqrt{3})$$

$$0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1, \quad \alpha^2+\beta^2 \leq 1$$

の条件が付いた，$(3\alpha+2\beta)$ の極値を考慮して，

$$\sum_i \lambda_{ij} C_{ij} \leq \sqrt{3}/2 \qquad (3)$$

(2)，(3) と命題12，13より定理2は示される。 □

更に Σ に対応する二部グラフの拡張係数も評価できる。

［定理3］ Σ の平均，$A = \frac{1}{8}\sum_{i\in\{1,2\}, j\in\{1,-1\}} (E+M(\varphi_i^j))M(\rho_i^j)$，の2番目に大きい固有値を α とする。このとき，$\alpha \leq 5\sqrt{2}/8$」

［系］ Σ に対応する二部グラフの拡張係数は $1-\alpha \geq 1-\frac{5}{8}\sqrt{2}$ 以上である。」

（証明略） □

定理3の系より，Σ に対応する二部グラフの拡張係数は入力のサイズ n（$T = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ であるから，$n = m^2$）に無関係に $1-\frac{5}{8}\sqrt{2}$ 以上であり，従って，Gabber と Galil [GG] の3節の方

法により，入力数をnとして，$O(n)$サイズのスーパーコンセントレータを構成できる。Gabber と Galil [GG] の定理3を適用することにより，このスーパーコンセントレータのサイズをnで割った商（density）が248以下であることが示される。これは，従来の260以上の値（Chung [C]）と比較して小さい。

［謝辞］ 日頃熱心に御指導頂く木村正行教授に感謝致します。」

References:

[AKS] M.Ajtai, J.Komlós and E.Szemerédi, An O(n log n) sorting network, Proc. 15th ACM STOC, 1983, 1-9.

[A] D.Angluin, A note on a construction of Margulis, Information Processing Letters 8(1), 1979, 17-19.

[B] K.Batcher, Sorting networks and their applications, AFIPS Spring Joint Computer Conference 32(1968), 307-314.

[C] F.R.K.Chung, On concentrators, superconcentrators, generalizers, and nonblocking networks, the Bell System Technical Journal 58(8), 1978, 1765-1777.

[F] 古屋 茂，新数学シリーズ5・行列と行列式，培風館，1959.

[GG] O.Gabber and Z.Galil, Explicit constructions of linear size superconcentrators, Journal of Computer and System Sciences 22, 1981, 407-420.

[M] G.Margulis, Explicit constructions of concentrators, Problemy Peredachi Informatsii 9(4), 1973, 71-80 (English translation in Problems of information transmission, Plenum, N.Y., 1975.)

[P] M.Pinsker, On the complexity of a concentrator, 7th International Teletraffic Conference, Stockholm, June 1973, 318/1-318/4.