

辺付加によるグラフの拡大構成問題

広島大学工学部

渡辺 敏正

広島大学工学部

中村 昭

広島大学大学院工学研究科

高橋 昌也

1. まえがき

拡大構成問題とは、(有向)グラフ $G = (V, E)$ について、 V の異なる点を両端点とし、 $e \in E$ である様なすべての辺 e にそれぞれ重み $w(e)$ (非負整数) が付いている時、 $G + A$ が性質を充たし、且つ、 A の辺の重みの総和が最小になる様な(有向)辺集合 A を求める問題である。

更ら、本稿では、拡大構成問題の定義を若干拡張した次の問題も考えることにする：

指定された部分集合 $V' \subset V$ に対する拡大構成問題とは、 $G + A$ が V' に関して性質 C を充たし、且つ、 A の辺の重みの総和が最小になる様な(有向)辺集合 A を求める問題である。但し、 $G + A$ が V' に関して性質 C を充たすとは、性質 C を充たし、且つ、 $V' \subset V_H$ なる $G + A$ の部分グラフ $H = (V_H, E_H)$

が存在することである。

この時、拡大構成問題は、次の条件の下で、いくつかの種類に分けることができる。例えば、

- (i) G が有向グラフの場合と、 G が無向グラフの場合。
- (ii) 各辺の重みが異なる場合と、各辺の重みが等しい場合。

後者の場合、重みをもたない拡大構成問題といい、本稿では後者の場合だけに触れないので、特にことわりのない場合は、重みをもたない場合とする。

- (iii) 指定された頂点部分集合 V' に関する拡大構成問題で、
 $V' = V$ の場合と、 $V' \subset V$ の場合。前者の場合は従来から考えられている（つまり、最初に定義した）拡大構成問題であり、後者の場合は、 $G + A$ が V' に関して性質 C を充たし、且つ、 A の辺の重みの総和が最小になる様な（有向）辺集合 A を求める問題となる。

である。本稿では主に、すべて重みをもたず、

- (1) 有向グラフについて、 $V' \subset V$ で、性質 C が強連結
- (2) 無向グラフについて、

(i) $V' = V$ で、 C が3-辺連結 (ii) $V' \subset V$ で、 C が、

① 2-辺連結, ② 3-辺連結

の場合を取り扱う。

2. 結果

得られた結果は次表の太枠の中に示されている。(その他は従来の結果)

		W	C	n=2	n=3	n≥4
無 向 グ ラ フ	V' V	有	VC	NPC ^[1] *	NPC ^[8]	
			EC	NPC ^[1] *		
	V' V	無	VC	$O(V + E)$ ^[2]	$O(V ^2)$ ^{[8][9]}	
			EC	$O(V + E)$ ^[1]	$O(V ^2(V + E))$	
	V' ∩ V	有	VC	△	△	
			EC	△		
V' ∩ V	無	VC	$O(V + E)$ ^[12]			
		EC	$O(V + E)$	$O(V ^2(V + E))$		
有 向 グ ラ フ	V' V	有	SC	NPC ^[1] *		
		無		$O(V + E)$ ^[1]		
	有	△				
	無	NPC				

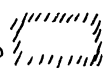
		W	C	結果
有向木	V'			P
空グラフ		無	EC	P
2重有向木	V		VC	$O(n V)$

W は重み, C は性質,
VC は n-連結, EC は
n-辺連結, SC は強連
結, NPC は NP-完全,
P は多項式である。

* は、 $O(|V|^2)$ の近似アル

ゴリズムが存在する。

又、△はそれぞれ、性質が同じ所の $V'=V$ の結果より、
NP-完全であることがわかる。

更ら、今回得られた4つの結果について、(2)-(ii)-①につ
いては、与えられたグラフの余分な部分を取り去ることにより、
その結果得られたグラフに対して、表の  の所の方法を用
いることができることが示された。また、同様に、(2)-(ii)-②
についても、与えられたグラフ G の余分な部分を取り去るこ

とにより、その結果得られたグラフに対して、(2)-(i)の方法を用いることができることが示された。

よって、以後の節では、(1)の結果と、(2)-(i)の方法についての概要を述べることにし、それ以外の方法は、ここでは省略する。(詳細は文献[14]に述べてある。)

3. 基礎的定義

頂点 v_1 から v_n へのパス(path)とは、辺の列 $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)$ である。但し、 v_2, \dots, v_{n-1} は互いに異なる頂点とする。 v_1 から v_n へのパスのことを v_1 - v_n パスということもある。

グラフ G から何個かの辺を除去して非連結又は自明なグラフにする時の除去すべき最小個数を辺-連結度(edge-connectivity)と言い、 $k_1(G)$ と表わす。更に、 $k_1(G) \geq n$ なるグラフ G のことを n -辺連結(n -edge-connected)という。

次に、NP-完全(NP-complete)の定義を述べる。

非決定論的チューリング機械(nondeterministic Turing-machine)によって、問題の規模(size)に関する多項式時間(poly-nomial time)で解くことのできる決定問題(decision problem)

(答えが"yes"か"no"かであることを記述する問題)の集合をNPという。2つの決定問題 D_1, D_2 に対して、 D_1 が D_2 に多項式変換される(poly-nomially reducible)とは、 D_1 に属する勝手な

問題 P_1 が与えられた時、 P_1 の規模の多項式時間で P_1 から D_2 に属する問題 P_2 が構成でき、しかも、 P_1 に対する答えが "yes" である時及びその時のみ P_2 に対する答えが "yes" であることが成り立つことである。この時、決定問題 D について、次の (i)(ii) が成り立つ時、 D は NP-完全 であるという：(i) $D \in NP$
(ii) NP-完全であることが知られている決定問題 D' が D に多項式変換される。

4、有向グラフについて、 $V' \subset V$ の時の強連結化

次の様に定式化した決定問題 L は NP-完全である。

{

 入力(instance)：与えられた有限有向グラフ $G=(V,E)$, 指定された頂点部分集合 $V' \subset V$, 非負整数 k

 質問(Question)： $|A| \leq k$, 且つ, $G+A$ が V' に関して強連結となる様な有向辺集合 A があるか否か?

よって、与えられた有向グラフ $G=(V,E)$ の指定された頂点部分集合 V' に対して、 $G+A$ が V' に関して強連結となる様な最小有向辺集合 A を求める問題は NP-完全である。

5、無向グラフについて、 $V' = V$ の時の3-辺連結化

G のある頂点部分集合 V_1 について、 V_1 が以下の様なことが成り立つ極大な集合である時、 V_1 を n -辺-成分という：

勝手な2頂点 $u, v \in V_1$, 勝手な $n-1$ 本の辺 e_1, \dots, e_{n-1} について、 $G - \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ に $u-v$ パスが存在する。

又、勝手な $n-1$ 辺 - 成分 G_1 について、 G_1 の頂点と、 $G - G_1$ 以外の部分の頂点を結ぶ辺の本数を G_1 の次数という。

この時、まず、 G の3 - 辺 - 成分を求め、更に G の2 - 辺 - 成分を求める。

ここで、 G の次数 i ($i=0, 1, 2$) の3 - 辺 - 成分の集合を D_i とし、 D_i 以外の次数 i の2 - 辺 - 成分の集合を P_i とし、 D_i の元を $2-i$ 回しかもたない P_i の元の集合を \tilde{P}_i とする。この時、 G を3 - 辺連結化するための必要辺数の下界は、 D_i の元の数を d_i , \tilde{P}_i の元の回数を p_i とすると、

$$\Pi = \lceil (3d_0 + 2d_1 + d_2 + p_0 + p_1 + p_2) / 2 \rceil \text{ である。}$$

以下に、 Π 本の辺で G を3 - 辺連結化する方法を述べる。その概要は、まず、 G を最小辺数で2 - 辺連結化し^[1]、次に、その結果得られたグラフを最小辺数で3 - 辺連結化するというものである。

まず、 G を2 - 辺連結化する方法を述べるが、その前にいくつかのことに触れておく。

G の P_i の元の回数を a_i , P_0 の元の回数を b とする。又、次の様な3 - 辺 - 成分 $\nu(1), \nu(2), \nu(3)$ を定義する。

1、 G の各々の P_i の元について、次の様な3 - 辺 - 成分 $\nu(1)$,

$\psi(2)$ を定義する。

(i) D_1 の元の時、 $\psi(1)=\psi(2)$ はその D_1 の元

(ii) $P_1-\tilde{P}_1$ の元の時、 $\psi(1), \psi(2)$ はその元の異なる 2 つの D_2 の元

(iii) \tilde{P}_1 の元の時、 $\psi(1)=\psi(2)$ はその元の唯一の D_2 の元

2. G の各々の P_0 の元について、次の様な $\psi(1), \psi(2), \psi(3)$ を定義する。

(i) D_0 の元の時、 $\psi(1)=\psi(2)=\psi(3)$ はその D_0 の元

(ii) $P_0-\tilde{P}_0$ の元の時、 $\psi(1), \psi(2), \psi(3)$ は、その元の異なる 3 つの D_2 の元

(iii) \tilde{P}_0 の元の時、 $\psi(1), \psi(2)=\psi(3)$ は、その元の 2 つしかない異なる D_2 の元

方法は次の通りである。

G の n 個の連結成分を文献[1]の方法で、 $n-1$ 本の辺集合 A_1 で連結化し、次に $G+A_1$ の $a' (=a+2b-2(n-1))$ 個の次数 1 の 2-辺-成分を $\lceil a'/2 \rceil$ 本の辺集合 A_2 で結んで $G+A_1$ を 2-辺連結化する。この時、 A_1, A_2 の辺は、その辺の入る 2-辺-成分の次に結ぶ：

G の P_1 の $\psi(1)$ に 1 本ずつ、 G の P_0 の $\psi(1), \psi(2)$ に 1 本ずつ。但し、 $a+2b$ が奇数の時、 $G+A_1$ の $\lceil a'/2 \rceil$ 番目の 2-辺-成分が、 G 上で P_1 の元なる $\psi(2)$ に、 P_0 の元なる $\psi(3)$ に $\lceil a'/2 \rceil$ 番目の辺を

結ぶ。

この時、 G は最小辺数 $\lceil a/2 \rceil + b$ で 2-辺連結化されてゐる。

この時、 $A' = A_1 + A_2$ とし、 $G' = G + A'$ とする時、 G' の次数 2 の 3-辺-成分の数は、

$$K = 3d_0 + 2d_1 + d_2 + p_0 + p_1 + p_2 - (a + 2b + j)$$

但し、 $j = 0$ ($a + 2b$ が偶数), $j = 1$ ($a + 2b$ が奇数)

この時、明らかに、 G' を 3-辺連結にするために必要な辺数の下界は $\lceil K/2 \rceil$ であり、 $\lceil K/2 \rceil + \lceil a/2 \rceil + b = \Pi$ である。よって、 $\lceil K/2 \rceil$ 本の G' を 3-辺連結にする様な辺集合を求めれば、 G を Π 本の辺で 3-辺連結にすることが出来る。

次に、 G' を $\lceil K/2 \rceil$ 本の辺で 3-辺連結にする方法を示す。

まず、Depth-first-search で、次数 2 の 3-辺-成分をすべて見つけ出し、見つけ出した順に番号 $x(1), x(2), \dots, x(K)$ を付ける。そして、辺集合 $A_3 = \{(x(i), x(i + \lceil K/2 \rceil)) \mid 1 \leq i \leq \lceil K/2 \rceil\}$ を各 $x(i)$ の勝手な頂点に付加する。この時、 $G' + A_3$ が 3-辺連結であることが示されたが、証明は略す。明らかに $|A_3| = \lceil K/2 \rceil$ である。

よって、 $A = A' + A_3$ とすれば、 A は G を 3-辺連結にする最小辺集合である。

6. あとがき

本稿では、指定された頂点部分集合 V' に対する強連結化、

n -辺連結化, $V' = V$ の時の n -辺連結化の拡大構成問題の中で、前者の場合の強連結化と、 $n=2, 3$ の場合の辺連結化、後者の場合の $n=3$ の場合の辺連結化を対称としたが、辺連結化の $n \geq 4$ の場合の拡大問題が今後の課題である。

また、辺が重みをもつ場合に対する近似アルゴリズムが実用面には重要であるので、そちらの研究も今後の課題である。

文献

- [1] K.Eswaran and R.Tarjan : Augmentation problem, SIAM J. Comput. 5,4 (1976) 653-665
- [2] A.Rosenthal and A.Goldner : Smallest augmentations to biconnect a graph, SIAM J. Comput. 6,1 (1977) 55-66
- [3] G.Frederickson and J.Ja'ja' : Approximation algorithms for several graph augmentation problems, SIAM J. Comput. 10,2 (1981) 270-283
- [4] R.Tarjan : A note on finding the bridge of a graph, Information Processing Lett. 2 (1974)
- [5] S.Baase : Computer Algorithms : Introduction to design and analysis, Addison-Wesley, New York (1973)
- [6] S.Even : Graph Algorithms : Computer Science Press (1979)

- [7] F. Harary : Graph Theory , Addison-Wesley (1969)
(池田貞雄訳 : 「グラフ理論」 , 共立(1971))
- [8] 渡辺 , 中村 : 辺の付加による点 - 連結度の増加問題 , 信
学技報 , AL81-26 (1981-07)
- [9] T. Watanabe and A. Nakamura : On a smallest augmentation
to triconnect a graph , Tech. Rep. C-18, Rep. of Appl. Math.,
Faculty of Engineering, Hiroshima University, Higashi-
Hiroshima, Japan (1983)
- [10] 梶谷 , 上野 : 有向木から拡大構成される最小 k - 枝連結
有向グラフ , 信学技報 , CAS83-3 (1983-05)
- [11] H. Frank and W. Chou : Connectivity considerations in the
design of survivable networks , IEEE Trans. Circuit Theory,
CT-17. (1970) , 486-490
- [12] 藤田 , 渡辺 , 翁長 : グラフの2重連結化問題 , 昭和58年
度 , 電気四学会中国支部連合大会予稿集52221 (1983-11)
- [13] 増澤 , 萩原 , 和田 , 都倉 : k - 頂点連結性に関する有向
2進木の拡大構成問題 , 電子通信学会論文誌 , J67-D, 1
(1984)77-84
- [14] 高橋 : ネットワークモデルの構成に関する基礎的研究 ,
昭和58年度広島大学大学院工学研究科修士論文(1984)