数理解析研究所講究録
第522巻 1984年 323-337

Dynimic logic の first-order infinitary logic への還元

名工大 三浦 聰 (Satoshi Miura)

一般に，プログラム論理は多種多様であり，プログラムに関するいろいろの記号や概念を一階述語論理（ LPC）に付加して作られている．これらの付加により，論理として表現力が LPC より本質的に豊かになるのか，それとも付加した方が考えやすく便利であるというに留まるのかは，はっきりさせておく必要がある．本講では，D.Harel の First-order dynamic logic (DL) について，これを first-order infinitary logic (LPC^{∞} : 無限の論理和と論理積をもつ一階述語論理）へ還元することを試みる．すなわち，DL の論理式 A を，LPC^{∞} の論理式 $e(A)$ に変換するアルゴリズムを与え，かつこの変換が，セマンティック・モデルに関して恒真性を保存することを示す．

1. DL の言語とセマンティックス

1.1 DL 言語 $\mathcal{L}_{DL}$

DL 言語 $\mathcal{L}_{DL}$ は，次のものから成る．

$S=\{x, y, \cdots; x_1, x_2, \cdots\}$：可算個の（文字）変数の集合．

$C=\{k, l, \cdots\cdots\}$：可算個の（文字）定数の集合．

$F=\{f^n, g^n, \cdots\cdots\}$：可算個の n 変数関数記号の集合，$(n \geq 1)$，$f^n(x_1, \cdots, x_n)$ 等は関数である．

項は，次のように定義される：変数および定数は項である．$f^n(x_1, \cdots, x_n)$ が関数，$e_1, \cdots, e_n$ が項のとき，$e=f^n(e_1, \cdots, e_n)$ は項である．

$P=\{p^n, q^n, \cdots\cdots; =_{eq}\}$：可算個の n 変数述語記号の集合，$(n \geq 0)$，$p^n(x_1, \cdots, x_n)$ 等は述語である．

$AP=\{a, b, \cdots\cdots\}$：可算個の原子プログラムの集合．

原始論理記号：$\sim$，$\supset$，$\forall$，$[a]$，$[b]$，……

導論理記号：$\wedge$，$\vee$，$\equiv$，$\exists$，$\langle a\rangle$，$\langle b\rangle$，……

ここで，$\langle a\rangle$ は $\sim[a]\sim$ により定める．他は通常の通り．

プログラム結合子：$\cup$，；，$*$

プログラムは，次のように定義される：原子プログラムはプログラムである．α, β がプログラムならば，$\alpha\cup\beta$，$\alpha;\beta$，α^* もプログラムである．

DL 式は，次のように定義される：$p^n(x_1, \cdots, x_n)$ を述語，$e_1, \cdots, e_n$ を項とするとき，$p^n(e_1, \cdots, e_n)$ は DL 式で

である．A, B をDL式，α をプログラムとするとき，$\sim A$，$A \supset B$，$\forall x A$（$\forall x A(x)$ とも書く），$[\alpha]A$ はDL式である．

1.2　LPC^{∞} 言語 $\mathcal{L}_{LPC^{\infty}}$

LPC^{∞} 言語 $\mathcal{L}_{LPC^{\infty}}$ として，次のものを考える．

S'：（文字）変数の集合，$S' \supseteq S$．

C'：（文字）定数の集合，$C' \supseteq C$．

F'：関数記号の集合，$F' \supseteq F \cup \{\mathbf{x} \mid x \in S\}$，ただし，$\mathbf{x}$ は $x \in S$ に対応する1変数関数記号であり，F' のすべての関数の定義域は $S' \cup C'$ とする．

項 e' は，前と同様に定義される．

P'：述語記号の集合，$P' \supseteq P \cup \{\mathbf{W}, \mathbf{D}\} \cup \{\mathbf{R}_a \mid a \in AP\}$，ただし，$\mathbf{W}, \mathbf{D}$ は1変数述語記号で，$\mathbf{R}_a$ は原子プログラム a に対応する2変数述語記号であり，P' のすべての述語の定義域は $S' \cup C'$ とする．

原始論理記号：$\sim$，$\supset$，$\forall$

導論理記号：$\wedge$，$\vee$，$\equiv$，$\exists$

LPC^{∞} 式は，次のように定義される：通常の意味での1階述語論理式に加えて，$A_0, A_1, A_2, \cdots\cdots$（可算無限個）が LPC^{∞} 式ならば，$A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots\cdots$ および $A_0 \vee A_1 \vee A_2 \vee \cdots\cdots$ も LPC^{∞} 式で，それぞれ $\bigwedge_{i=0}^{\infty} A_i$ および $\bigvee_{i=0}^{\infty} A_i$

と書く．

プログラム $\alpha, \beta \cdots$ に対応して，2変数述語 $R_\alpha, R_\beta, \cdots$ を次のように定義する：$z, z' \in S' \cup C'$ に対して，

$$R_{\alpha\cup\beta}(z, z') = R_\alpha(z, z') \vee R_\beta(z, z')$$

$$R_{\alpha;\beta}(z, z') = \exists z''(W(z'') \wedge R_\alpha(z, z'') \wedge R_\beta(z'', z'))$$

$$R_{\alpha *}(z, z') = \bigvee_{i=0}^{\infty}(\exists z_0 \cdots \exists z_i(W(z_0) \wedge \cdots \wedge W(z_i) \wedge (z_0 =_{eq} z)$$

$$\wedge (z_i =_{eq} z') \wedge R_\alpha(z_0, z_1) \wedge R_\alpha(z_1, z_2) \wedge \cdots \wedge R_\alpha(z_{i-1}, z_i)))$$

よって R_α, R_β は，すべて $R_a, R_b, \cdots, (a, b, \cdots \in AP)$，の論理式として表される．

1.3　DL モデルと LPC^∞ モデル

様相論理におけるK体系のクリプキ・モデルに対応して，DL モデルを定義する．

DL モデルとは，4重対 $M = \langle W, R, D, V \rangle$ であって，ここに W は，「状態」の空でない集合，D は「対象」の空でない領域で，$W \cap D = \phi$ とする．そして，写像 m を

$$m : AP \longrightarrow 2^{W \times W} \quad (W \text{ の直積の巾集合})$$

により定義する．すなわち，$a \in AP$ に対し，$m(a) \subseteq W \times W$ となり，$u, v \in W$ について2項関係 uav を

$$uav \iff (u, v) \in m(a)$$

により定める．そこで，

$$R = \{ m(\alpha) \mid \alpha \in AP \}$$

とする．この２項関係は，任意のプログラム $\alpha, \beta, \cdots$ に対して，次のように一般化される．

$u(\alpha \cup \beta) v \iff u\alpha v$ or $u\beta v$

$u(\alpha ; \beta) v \iff \exists w (w \in W \ \& \ u\alpha w \ \& \ w\beta v)$

$u(\alpha^{*}) v \iff \exists w_0 \cdots \exists w_i (w_0 \in W \ \& \cdots \& \ w_i \in W \ \& \ w_0 = u \ \& \ w_i = v \ \& \ w_0 \alpha w_1 \ \& \ w_1 \alpha w_2 \ \& \cdots \& \ w_{i-1} \alpha w_i)$ for some i

Vは，次のような付値である．$u \in W$ とする．

(1) 変数 x に対し，$V(x, u)$ は D のある要素 d_u を指定する（u 毎に定まる）．

(2) 定数 k に対し，$V(k, u)$ は D のある要素 d を指定する（u によって変らない）．

(3) 関数記号 f^n に対し，$V(f^n, u)$ は，D^n から D への写像 f_D^n を定める（u に依存しない全域関数）．そして関数 $f^n(x_1, \cdots, x_n)$ に対し，

$$V(f^n(x_1, \cdots, x_n), u) = f_D^n(V(x_1, u), \cdots, V(x_n, u))$$

とする．これを f_u^n と略記する．

(4) 項 $e = f^n(e_1, \cdots, e_n)$ に対し，

$$V(e, u) = f_D^n(V(e_1, u), \cdots, V(e_n, u))$$

とし，e_u と略記する.

(5) 述語記号 p^n に対し，$V(p^n, u)$ は D^n のある部分集合を定める（u に依存しない）. とくに，$V(p^0, u) \in \{0, 1\}$ とする. また，等号述語に対しては，

$$V(=_{eq}, u) = \{(d, d) \mid d \in D\}$$

とする.

(6) DL 式に対しては，次のように 0 または 1 を指定する.

$$V(p^n(e_1, \cdots, e_n), u) = 1$$

$$\Leftrightarrow (V(e_1, u), \cdots, V(e_n, u)) \in V(p^n, u),$$

$$V(\sim A, u) = 1 \Leftrightarrow V(A, u) = 0,$$

$$V(A \supset B, u) = 1 \Leftrightarrow V(A, u) = 0 \text{ or } V(B, u) = 1,$$

$$V(\forall x A(x), u) = 1 \Leftrightarrow Ⓐ d \in D\, (V(A(\underline{d}), u) = 1),$$

ここで，$\underline{d}$ は d の名前と呼ばれるもので，$V(\underline{d}, u) = d$ である. 任意の $d \in D$ に対し，このような $\underline{d}$ の存在を仮定しておく（この仮定は本質的ではない）.

$$V([\alpha]A, u) = 1 \Leftrightarrow Ⓐ v \in W\, (u \alpha v \Rightarrow V(A, v) = 1)$$

次に，LPC^∞ モデルを定義する. LPC^∞ モデルとは，2重対 $\langle D, V \rangle$ であって，通常の一階述語論理のモデル（LPC モデル）に次の条件を付け加えたものである.

$$V(\bigwedge_{i=0}^{\infty} A_i) = 1 \Leftrightarrow Ⓐ i\, (V(A_i) = 1)$$

$$\mathcal{V}(\bigvee_{i=0}^{\infty} A_i)=1 \iff \text{Ⓔ}\, i\,(\mathcal{V}(A_i)=1)$$

1.4　恒真性

$M=\langle W, R, D, \mathcal{V}\rangle$ を DL モデルとする．DL式 A に対し，

A が M で恒真である $\iff$ Ⓐ $u\in W(\mathcal{V}(A,u)=1)$,

A が DL 恒真である（記号：$\models_{DL} A$）

$\iff$ A がすべての DL モデルで恒真である

と定める．

次に，$L=\langle D, \mathcal{V}\rangle$ を LPC^{∞} モデルとする．LPC^{∞} 式 A に対し，

A が L で検証される $\iff$ $\mathcal{V}(A)=1$,

A が LPC^{∞} 恒真である（記号：$\models_{LPC^{\infty}} A$）

$\iff$ A がすべての LPC^{∞} モデルで検証される

と定める．

なお，LPC 恒真性についても，通常のように定められる．

<u>注意 1</u>

(1) $\models_{LPC} A \Rightarrow \models_{DL} A$

(2) $\models_{DL} [\alpha](A\supset B)\supset([\alpha]A\supset[\alpha]B)$

(3) $\models_{DL} A \Rightarrow \models_{DL} [\alpha]A$

(4) $\models_{DL} \forall x[\alpha]A(x)\supset[\alpha]\forall x A(x)$

ここで，$[\alpha]$ を様相記号 □（必然性）と見なせば，(2)，

(3)はクリプキのK体系の様相公理と推論規則であり，(4)はバルカン式となる．この意味で，DLはプログラム α ごとに定まる多重様相をもったK体系であるということができる．

2. 翻訳式と翻訳モデル

2.1 LPC^{∞} イメージ

定義 1（イメージ）

DL言語 $\mathcal{L}_{DL}$ から LPC^{∞} 言語 $\mathcal{L}_{LPC^{\infty}}$ への写像 $*$ を次のように定義し，その像を LPC^{∞} イメージという．$z' \in S' \cup C'$ とする．

変数 $x \in S$ に対し，$[x, z]^* = \boldsymbol{x}(z)$

定数 $k \in C$ に対し，$[k, z]^* = k$

項 $e = f(e_1, \cdots, e_n)$ に対し，

$$[e, z]^* = f([e_1, z]^*, \cdots, [e_n, z]^*)$$

DL式に対しては，

$$[p^n(e_1, \cdots, e_n), z]^* = p^n([e_1, z]^*, \cdots, [e_n, z]^*)$$

$$[\sim A, z]^* = \sim [A, z]^*$$

$$[A \supset B, z]^* = [A, z]^* \supset [B, z]^*$$

$$[\forall x A(x), z]^* = \forall x (D(x) \supset [A(x), z]^*)$$

$$[[\alpha]A, z]^* = \forall z' (W(z') \wedge R_{\alpha}(z, z') \supset [A, z']^*)$$

定義　2（翻訳式）

DL式Aに対し，その翻訳式$f(A)$を，

$$f(A) = \forall z\,(W(z) \supset [A, z]^*)$$

により定める．fを翻訳関数という．

2.2　翻訳モデル

定義　3（翻訳モデル）

$M = \langle W, R, D, V \rangle$を任意のDLモデルとする．$M$の翻訳モデルとは，次のようなLPC$^\infty$モデル$M^* = \langle D^*, V^* \rangle$をいう．$D^* = D \cup W$で，$V^*$は以下の条件を満たす付値である．

(1) 変数$x \in S'$に対し，$V^*(x)$はD^*を走る変数である．とくに，$x \in S \Rightarrow V^*(x) \in D$とする．

(2) 定数$k \in C'$に対し，$V^*(k)$はD^*のある要素を指定する．とくに，$k \in C \Rightarrow V^*(k) = V(k, u)$，$u \in W$，とする．

(3) 関数記号χに対し，$V^*(\chi)\colon D^* \longrightarrow D^*$とし，$\chi_{D^*}$と略記する．そして，$V^*(\chi(z)) = \chi_{D^*}(V^*(z))$，$z \in S' \cup C'$，とする．とくに，$V^*(z) \in W \Rightarrow \chi_{D^*}(V^*(z)) = V(x, V^*(z))$とする．すなわち，$\chi_{D^*}(u) = V(x, u) = d_u$　$(x \in S)$．

一般の関数$f^n \in F'$に対し，$V^*(f^n)\colon (D^*)^n \longrightarrow D^*$とし，$f^n_{D^*}$と略記する．そして，

$$V^*(f^n(z_1,\cdots,z_n)) = f^n_{D^*}(V^*(z_1),\cdots,V^*(z_n)),$$

$z_1,\cdots,z_n \in S' \cup C'$ とする．とくに，$f^n \in F$ でかつ $(V^*(z_1),\cdots,V^*(z_n)) \in D^n$ ならば，$f^n_{D^*} = V(f^n, u) = f^n_D$ とする．

(4) 項 $e = f^n(e_1,\cdots,e_n)$, $f^n \in F'$ に対し，

$$V^*(e) = f^n_{D^*}(V^*(e_1),\cdots,V^*(e_n))$$

とする．

(5) 一般の述語記号 $p^n \in P'$ に対し，$V^*(p^n)$ は $(D^*)^n$ のある部分集合を定める．とくに，$p^n \in P \Rightarrow V^*(p^n) = V(p^n, u) \subseteq D^n$, $u \in W$, とする．また $V^*(p^0) \in \{0, 1\}$, $V^*(=_{eq}) = \{(d, d) \mid d \in D^*\}$ とする．

さらに，$V^*(\mathbf{W}) = W$, $V^*(\mathbf{D}) = D$ とし，かつ $V^*(\mathbf{R}_a) = m(a) = \{(u, v) \mid uav\}$, $a \in AP$ と定める．

(6) LPC^∞ 式 A に対しては，$V^*(A)$ は 0 または 1 を指定する．その方法は，一般の LPC^∞ モデルと同じである．

任意の LPC^∞ 式 A に対し，$V^*(A) = 1$ のとき，A は翻訳モデル M^* で検証されるといい，かつ A がすべての翻訳モデルで検証されるとき，A は <u>DL^* 恒真</u> であるといい，記号で $\vDash_{DL^*} A$ と書く．

2.3 翻訳定理

注意 2

(1) $u \in W \iff \mathrm{V}^*(W(\underline{u})) = 1$,

(2) $d \in D \iff \mathrm{V}^*(D(\underline{d})) = 1$,

(3) $u\,a\,v \iff \mathrm{V}^*(R_a(\underline{u}, \underline{v})) = 1$,

(4) $\mathrm{V}^*(e_1 =_{eq} e_2) = 1 \iff \mathrm{V}^*(e_1) = \mathrm{V}^*(e_2)$,

ただし，e_1, e_2 は項である．

$M = \langle W, R, D, \mathrm{V} \rangle$ を任意の DL モデル，$M^* = \langle D^*, \mathrm{V}^* \rangle$ をその翻訳モデルとする．A を任意の DL 式，$u \in W$ かつ f を翻訳関数とすれば，次の補題および定理が成り立つ．

補題 1

$$\mathrm{V}(A, u) = 1 \iff \mathrm{V}^*([A, \underline{u}]^*) = 1$$

補題 2

A が M で恒真である $\iff$ f(A) が M^* で検証される

定理 1 (翻訳定理)

$$\vdash_{DL} A \iff \vdash_{DL^*} f(A)$$

3. DL の LPC^{∞} への還元

3.1 定義

定義 4 (前置式)

任意のDL式 A を与えて固定する．$X(A)$ を次の条件のすべての論理積とし，これを A の前置式という．LPC^{∞}式で書いても良いが，ここではLPC式で書くことにする．以下のC5'sーC9'sは，それぞれ複数個（有限個）の式である．

C1　$\exists z\, W(z)$

C2　$\exists z\, D(z)$

C3　$\sim \exists z\, (W(z) \wedge D(z))$

C4　$\forall z\, (W(z) \vee D(z))$

C5's　A に現れるすべての R_a に対して，

$$\forall z_1 \forall z_2 (R_a(z_1, z_2) \supset W(z_1) \wedge W(z_2))$$

C6's　A に現れるすべての自由変数 $x \in S$ に対応する関数 χ に対して，

$$\forall z (\chi(z) \supset W(z) \wedge D(\chi(z)))$$

C7's　A に現れるすべての定数 $k \in C$ に対して，$D(k)$

C8's　A に現れるすべての関数記号 $f^n \in F$ に対して，

$$\forall z_1 \cdots \forall z_n (f^n(z_1, \cdots, z_n) \supset D(z_1) \wedge \cdots \wedge D(z_n) \wedge D(f^n(z_1, \cdots, z_n))$$

C9's　A に現れるすべての述語記号 $p^n \in P$ に対して，

$$\forall z_1 \cdots \forall z_n (p^n(z_1, \cdots z_n) \supset D(z_1) \wedge \cdots \wedge D(z_n))$$

定義 5（還元式）

A を任意のDL式，f を翻訳関数とする．

$$e(A) = X(A) \supset f(A)$$

と置いて，$\ell(A)$ を A の還元式，ℓ を還元関数という．

定義　6（復元モデル）

$M=\langle D,V\rangle$ を，$X(A)$ を検証する任意の LPC^{∞} モデルとする．M から次のようにして構成されるモデルを $M^{\#}=\langle W,R,D^{\#},V^{\#}\rangle$ とおき，M の復元モデルという．$u\in W$ とする．

(1) $W=V(w)$ とおく．C1 により空でない．

(2) $D^{\#}=V(D)$ とおく．C2 により空でない．

(3) $W\cap D=\phi$ となる，C3 による．

(4) $D=W\cup D^{\#}$ となる．C4 による．

(5) $m(a)=V(R_a)$，$R=\{m(a)\mid a\in AP\}$ とおく．C5 から，A に現れる R_a については $m(a)\subseteq W\times W$ となる．

(6) A に自由変数として現れる $x\in S$ に対し，$V^{\#}(x,u)=V(x(\underline{u}))$ とおく．C6's から $V^{\#}(x,u)\in D^{\#}$ となる．その他の変数 $y\in S$ に対し，$V^{\#}(y,u)$ は $D^{\#}$ のある要素 d_u を指定する（u 毎に定まる）．

(7) A に現れる定数 $k\in C$ に対し，$V^{\#}(k,u)=V(k)$ とおく．C7's から，$V^{\#}(k,u)\in D^{\#}$．その他の定数 $l\in C$ に対し，$V^{\#}(k,u)$ は $D^{\#}$ のある要素 d を指定する（u によって変らない）．

(8) A に現れる関数記号 $f^n\in F$ に対し，$V^{\#}(f^n,u)=V(f^n)$ とおく．C8's から，$V^{\#}(f^n,u):(D^{\#})^n\longrightarrow D^{\#}$ と

なる．その他の関数記号 $g^n \in F$ に対し，$V^{\#}(g, u)$ は $(D^{\#})^n$ から $D^{\#}$ へのある写像を定める（u に依存しない全域関数）．

(9) A に現れる述語記号 $p^n \in P$ に対し，$V^{\#}(p^n, u) = V(p)$ とおく．$C9'_A$ から，$V^{\#}(p^n, u) \subseteq (D^{\#})^n$．その他の述語記号 $g^n \in P$ に対し，$V^{\#}(g, u)$ は $(D^{\#})^n$ のある部分集合を定める（u に依存しない）．

(10) その他の事項については，一般の DL モデルに同じ．

3.2 還元定理

A を任意の DL 式，$X(A)$ を A の前置式，$M = \langle D, V \rangle$ を $X(A)$ を検証する LPC^{∞} モデル，$M^{\#} = \langle W, R, D^{\#}, V^{\#} \rangle$ を M の復元モデルとする．B は，次の条件を満たす DL 式とする．

(a) B に現れる自由変数は，A にも自由変数として現れる．

(b) B に現れる述語記号は，A にも現れる．

このとき，次の補題および定理が成り立つ．$u \in W$ とする．

<u>補題 3</u>

$$V^{\#}(B, u) = 1 \iff V([B, \underline{u}]^*) = 1$$

<u>補題 4</u>

B が $M^{\#}$ で恒真である $\iff$ $f(B)$ が M で検証される．

<u>注意 3</u>

補題3と4は，A 自身に対しても成り立つ．

補題 5

$\models_{DL} A \iff f(A)$ が $X(A)$ を検証するすべての LPC^{∞} モデルで検証される.

注意 4

$f(A)$ が $X(A)$ を検証するすべての LPC^{∞} モデルで検証される $\iff \models_{LPC^{\infty}} \ell(A)$

定理 2 (還元定理)

$$\models_{DL} A \iff \models_{LPC^{\infty}} \ell(A)$$

参考文献

[1] D,Harel: First-order dynamic logic, Lecture Notes in Computer Science 68, Springer, 1979.

[2] S.Miura: Embedding of madal predicate systems into lower predicate calculus, Annals of the Japan Association for Philosophy of Science Vol.6, No.3, 147-160, 1983.

[3] G.E.Hughes, M.J.Cresswell; 三浦聰, 大浜茂生, 春藤修二訳: 様相論理入門, 恒星社厚生閣, 1981.