数理解析研究所講究録
第 523 巻 1984 年 1-16

Helson－Szegö の定理の一般化と、lifting 定理.

北大応電研　山本隆範（Takanori Yamamoto）

§1　準備.

単位円周$\mathbb{T}=\{\zeta\ ;\ |\zeta|=1\}$上の正規化された Lebesgue 測度を m で表わす。i.e. $dm(\zeta)=\frac{d\theta}{2\pi}$, $\zeta=e^{i\theta}$.

$\mathbb{T}$ 上の恒等関数 χ を、$\chi(\zeta)\overset{\text{def}}{=}\zeta$ とする。整数全体を $\mathbb{Z}$ で表わす。$\forall k\in\mathbb{Z}$ について、$\chi_k(\zeta)=\chi(\zeta)^k=\zeta^k$ 等と表わす。三角多項式の全体 $\mathcal{P}$ は、$\mathcal{P}=span\{\chi_k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$ となり、その部分空間 $\mathcal{P}_+$ を、$\mathcal{P}_+\overset{\text{def}}{=}span\{\chi_k\ ;\ k\geqslant 0\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$ とする。$\mathcal{P}$ から $\mathcal{P}_+$ への射影作用素 P_+ を、$P_+f\overset{\text{def}}{=}\sum_{k\geqslant 0}\hat{f}(k)\chi_k$ $(f\in\mathcal{P})$ とする。ここで、$\hat{f}$ は f の Fourier 変換を表わす。

$$\text{i.e.}\quad \hat{f}(k)\overset{\text{def}}{=}\int_{\mathbb{T}}\chi_{-k}(\zeta)f(\zeta)\,dm(\zeta)\quad ,\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

I を恒等作用素とし、$P_-\overset{\text{def}}{=}I-P_+$ とする。自然数 n に対して、$\mathcal{P}_-^n\overset{\text{def}}{=}span\{\chi_k\ ;\ k\leqslant -n\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$ とする。$\mathcal{P}_-^1$ を単に $\mathcal{P}_-$ とも書く。$\mathcal{P}(n)$ を、$\mathcal{P}(n)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{P}_++\mathcal{P}_-^n$ とする。$\mathcal{P}(1)=\mathcal{P}$ となる。

Helson－Szegö－Sarason の定理と関連した次の問題を考察する。

問題　$\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ を、単位円周$\mathbb{T}$上の有界な複素数値Borel 関数とし、$\mu(\zeta)$を、$\mathbb{T}$上の有限正値正則Borel 測度とする。nを自然数とする。このとき

$$\int_{\mathbb{T}} |(\alpha P_+ + \beta P_-) f|^2 \, d\nu \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f|^2 \, d\mu$$

が、全ての$f \in \mathcal{P}(n)$ について成り立つような、$\mathbb{T}$上の有限正値正則Borel 測度 $\nu(\zeta)$ を、適当なパラメーターを使って描くこと。

§2　正定値測度行列と、弱正定値測度行列.

我々は、2行2列のエルミート測度行列を取り扱う。すなわち、$\underline{\underline{\mu}} = (\mu_{jk})_{j,k=1,2}$ が与えられたとき、$\mu_{jk} = \overline{\mu_{kj}}$ を仮定する。ここで、μ_{jk} は、複素数値正則Borel 測度とする。$\underline{\underline{\mu}}$が、正定値であるとは、

$$\sum_{j,k=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} f_j \overline{f_k} \, d\mu_{jk} \geqslant 0 \qquad \forall\, (f_1, f_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

が成り立つこととし、$\underline{\underline{\mu}} \geqslant 0$ と書く。$\underline{\underline{\mu}}$が、弱正定値であるとは、

$$\sum_{j,k=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} f_j \overline{f_k} \, d\mu_{jk} \geqslant 0 \qquad \forall\, (f_1, f_2) \in \mathcal{P}_+ \times \mathcal{P}_-$$

が成り立つこととし、$\underline{\underline{\mu}} \succ 0$ と書く。

$\underline{\underline{\mu}}=(\mu_{jk})$ と、$\underline{\underline{\nu}}=(\nu_{jk})$ が、$\mu_{jj}=\nu_{jj}$ $(j=1,2)$ と、$(\mu_{12}-\nu_{12})^{\wedge}(n)=0$ $(n=-1,-2,\cdots)$ を充たすとき、$\underline{\underline{\mu}}\sim\underline{\underline{\nu}}$ と書く。Arocena－Cotlar－Sadosky は、次の定理を示した。

定理 A． 次の(i)と(ii)は、同値である。

(i) $\underline{\underline{\mu}}>0$ (ii) $\exists\,\underline{\underline{\nu}}\geqslant 0$ s.t. $\underline{\underline{\mu}}\sim\underline{\underline{\nu}}$

彼らは、定理Aを使って、上記の問題の作用素 $\alpha P_{+}+\beta P_{-}$ が、特に Hilbert 変換 $H=-iP_{+}+iP_{-}$ で、$n=1$ の場合を解決した。彼らは、Hardy 空間の理論を使わずに、Helson－Szegő の方法とは別の興味深い方法で定理Aを示した。次の§3では、Helson－Szegő の方法に類似した方法で定理Aの別証明を試みる。その次の§4では、定理Aを使って問題を解決する。

§3 定理Aの別証明

我々は、Hardy 空間の理論を使う。$p=1,2,\infty$ について、Hardy 空間 H^p を、

$$H^p \overset{\text{def}}{=} \{ f\in L^p(\mathbb{T},m)=L^p \ ;\ \hat{f}(k)=0 \quad k=-1,-2,\cdots \}$$

と定義する。また、円板環 A を、

$$A \overset{\text{def}}{=} \{ f \in C(\mathbb{T}) = C \ ; \ \hat{f}(k) = 0 \ , \ k = -1, -2, \cdots \}$$

と定義する。

定理において、(ii) が成り立つとする。$\underline{\underline{\nu}} \geqq 0$ より、特に $\underline{\underline{\nu}} \succ 0$ であり、更に、$\underline{\underline{\mu}} \sim \underline{\underline{\nu}}$ より、$\underline{\underline{\mu}} \succ 0$ が導かれる。ゆえに、(i) が成り立つ。従って、(i) から (ii) が、導かれることを示せばよい。(i) が成り立つとする。我々は、$\underline{\underline{\mu}} \succ 0$ が次と同値なことに注意する。

$$\mu_{11} \geqq 0 \ , \quad \mu_{22} \geqq 0 \ , \quad \mu_{21} = \overline{\mu_{12}}$$

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f_1 \overline{f_2} \, d\mu_{12} \right| \leqq \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_1|^2 d\mu_{11} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_2|^2 d\mu_{22} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall \, (f_1, f_2) \in \mathcal{P}_+ \times \mathcal{P}_-$$

これらの測度の Lebesgue 分解を、次のように書くことにする。

$d\mu_{jj} = w_j \, dm + d\mu_{jj}^{(s)} \quad (j = 1, 2) \ , \quad d\mu_{12} = \varphi \, dm + d\mu_{12}^{(s)}$.

K_1 を、$\mathcal{P}_+$ の $L^2(\mu_{11} + |\mu_{12}|)$ 閉包とし、K_2 を、$\mathcal{P}_-$ の $L^2(\mu_{22} + |\mu_{12}|)$ 閉包とする。このとき、上記の不等式は、$\forall \, (f_1, f_2) \in K_1 \times K_2$ に対して成り立つ。よく知られているように、$\mu_{11}^{(s)}, \mu_{22}^{(s)}, \mu_{12}^{(s)}$ が、そこに集中しているような Borel 集合 $E_0 \subseteq \mathbb{T}$ で、$m(E_0) = 0$ なものが存在する。更に、$E \subseteq E_0$ なる全ての Borel 集合 E について、その特性関数は、$K_1 \cap K_2$ に属する。従って、

$$\left| \mu_{12}^{(s)}(E) \right| \leqq \left(\mu_{11}^{(s)}(E) \, \mu_{22}^{(s)}(E) \right)^{\frac{1}{2}}$$

が、全ての Borel 集合 $E \subseteq \mathbb{T}$ について成り立つ。

一方、$\mathbb{T} \sim E_0$ の特性関数は、$K_1 \cap \chi K_2$ に属するので、

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f_1 \overline{f_2}\, \varphi\, dm \right| \leqslant \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_1|^2 W_1\, dm \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_2|^2 W_2\, dm \right\}^{\frac{1}{2}}$$

が、$\forall\, (f_1, f_2) \in \mathcal{P}_+ \times \mathcal{P}_-$ について成り立つ。

$\varphi \in L^1$ より、$\log |\varphi - k_0| \in L^1$ を充たす $k_0 \in H^1$ が存在する。N を自然数とする。$j = 1, 2$ について、

$|h_j^{(N)}|^2 = W_j + \frac{1}{N} |\varphi - k_0|$ a.e. となるような outer 関数 $h_j^{(N)} \in H^2$ が存在する。従って、

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f_1 \overline{f_2} (\varphi - k_0)\, dm \right| \leqslant \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_1|^2 |h_1^{(N)}|^2 dm \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_2|^2 |h_2^{(N)}|^2 dm \right\}^{\frac{1}{2}}$$

が、$\forall f_1 \in$ ($\mathcal{P}_+$ の $L^2(|h_1^{(N)}|^2)$ 閉包) と、$\forall f_2 \in$ ($\mathcal{P}_-$ の $L^2(|h_2^{(N)}|^2)$ 閉包) について成り立つ。

inner − outer 分解定理より、$\forall\, G \in \chi H^1$, $\|G\|_1 \leqslant 1$ に対して、$G = G_1 G_2$ a.e., $\|G_j\|_2 \leqslant 1$ $(j = 1, 2)$ を充たすような関数 $G_1 \in H^2$, $G_2 \in \chi H^2$ が存在する。

Beurling の定理より、$G_1 (h_1^{(N)})^{-1} \in$ ($\mathcal{P}_+$ の $L^2(|h_1^{(N)}|^2)$ 閉包) $\overline{G_2 (h_2^{(N)})^{-1}} \in$ ($\mathcal{P}_-$ の $L^2(|h_2^{(N)}|^2)$ 閉包) ゆえ、これらを、上記の不等式に代入することにより、次を得る。

$$\left| \int_{\mathbb{T}} (h_1^{(N)} h_2^{(N)})^{-1} (\varphi - k_0)\, G\, dm \right| \leqslant 1 \quad .$$

一方、$\| (h_1^{(N)} h_2^{(N)})^{-1} (\varphi - k_0) \|_\infty \leqslant N < \infty$ で、$(\chi H^1)^* \cong L^\infty / H^\infty$ より、$\| (h_1^{(N)} h_2^{(N)})^{-1} (\varphi - k_0) + H^\infty \| \leqslant 1$ となる。

H^∞ の有界閉集合は、$\sigma(H^\infty, L^1/\chi H^1)$ 位相で $*$-弱閉ゆえ、

$$\| (h_1^{(N)} h_2^{(N)})^{-1} (\varphi - k_0) - g_N \|_\infty \leqslant 1$$

を充たす $g_N \in H^\infty$ が存在する。 $k_N \overset{\text{def}}{=} k_0 + h_1^{(N)} h_2^{(N)} g_N$ とおくと、$k_N \in H^1$ で、 $|\varphi - k_N| \leqq |h_1^{(N)} h_2^{(N)}|$ a.e. となる。 $|k_N| \leqq |\varphi| + |h_1^{(N)} h_2^{(N)}| \leqq |\varphi| + |\varphi - k_0| + W_1 + W_2$ a.e. より、$\{k_N\}_{N=1}^\infty$ は、L^1-ノルム有界列となる。H^1 の、L^1-ノルム有界列は、$\sigma(H^1, C/\chi A)$ 位相で $*$-弱コンパクトゆえ、ある $k \in H^1$ に この位相で収束する部分列 $\{k_{N_j}\}_{j=1}^\infty$ が存在する。 すなわち、

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{T}} F k_{N_j}\, dm = \int_{\mathbb{T}} F k\, dm$$

が、$\forall F \in C$ について成り立つ。 $|\varphi - k_N| \leqq |h_1^{(N)} h_2^{(N)}|$ a.e. より、

$$\left| \int_{\mathbb{T}} F(\varphi - k_{N_j})\, dm \right| \leqq \int_{\mathbb{T}} |F|\, |h_1^{(N_j)} h_2^{(N_j)}|\, dm$$

が、$\forall F \in C$ について成り立つ。 $\{h_1^{(N)} h_2^{(N)}\}_{N=1}^\infty$ は、L^1-ノルム有界列で、 $|h_1^{(N)} h_2^{(N)}| \xrightarrow[N\to\infty]{} (W_1 W_2)^{\frac{1}{2}}$ a.e. ゆえ、Lebesgue の有界収束定理より、$j \to \infty$ のとき、

$$\left| \int_{\mathbb{T}} F(\varphi - k)\, dm \right| \leqq \int_{\mathbb{T}} |F|\, (W_1 W_2)^{\frac{1}{2}} dm$$

が、$\forall F \in C$ について成り立つ。 これは、

$$|\varphi - k| \leqq (W_1 W_2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{a.e.}$$

を、意味している。 このことと、前に示したように、

$$|\mu_{12}^{(s)}(E)| \leqq (\mu_{11}^{(s)}(E)\, \mu_{22}^{(s)}(E))^{\frac{1}{2}}$$

が、全ての Borel 集合 $E \subseteq \mathbb{T}$ について成り立つことを、合わせると、

$$|\,\mu_{12}(E) - k(E)\,| \leqslant (\mu_{11}(E)\,\mu_{22}(E))^{\frac{1}{2}}$$

が、全ての Borel 集合 $E \subseteq \mathbb{T}$ について成り立つことが、導かれる。但し、$k(E) \overset{\text{def}}{=} \int_E k\,dm$ とする。 ここで、$\underline{\underline{\nu}} \overset{\text{def}}{=} \underline{\underline{\mu}} - \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、これは、(ii) を充たしている。 これで、証明が完成した。

以上の証明は、次の定理にも適用できる。

定理 A′ 次の (i) と (ii)′ は同値である。

(i) $\underline{\underline{\mu}} \succ 0$ (ii)′ $\exists\, k \in H^1$ s.t. $\underline{\underline{\mu}} - \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0$

この定理A′は、F. and M. Riesz の定理を使うならば、定理Aから直ちに導くこともできる。

§4 問題の解決

$\mathcal{R}^n_\mu(\alpha,\beta)$ を、§1で述べた問題の条件を充たす測度νの全体から成る集合とする。従って、$\nu \in \mathcal{R}^n_\mu(\alpha,\beta)$ なることは、$\underline{\underline{\mu}} = (\mu_{jk})$, $\mu_{11} = \mu - |\alpha|^2\nu$, $\mu_{22} = \mu - |\beta|^2\nu$, $\mu_{12} = \overline{\mu_{21}} = \chi_{n-1}(\mu - \alpha\bar{\beta}\nu)$ とおいたとき $\underline{\underline{\mu}} \succ 0$ なることと同値になる。 μとνの Lebesgue 分解を、$d\mu = W\,dm + d\mu_s$, $d\nu = V\,dm + d\nu_s$ とする。 n, μ, α, β は固定し、$|W - 2k| \leqslant W$ a.e. を充たすパラメーター $k \in \chi_{1-n}H^1$

に対して、次の記号を導入する。

$$\Phi(k) \overset{\text{def}}{=} W \operatorname{Re} k - |k|^2 \quad , \quad \Psi(k) \overset{\text{def}}{=} \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^2 W + \operatorname{Re} \bar{\alpha}\beta k .$$

以下の議論において、我々は、上のようにパラメーター k をとることができる事情を明らかにする。

補題 1.　　$k \in \chi_{1-n} H^1$ が $|W-2k| \leqq W$ a.e. を、充たすならば、次の (1) ～ (3) が成り立つ。(1) $\Phi(k) \geqq 0$ a.e. (2) $\Psi(k) W \geqq \max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\} \Phi(k)$ a.e. (3) $\Psi(k) \geqq 0$ a.e..

証明　(1) は、$|W-2k| \leqq W$ a.e. と同値である。(2) は、$\Psi(k)W - |\alpha|^2 \Phi(k) = \left|\frac{\alpha-\beta}{2} W - \alpha \bar{k}\right|^2$, $\Psi(k)W - |\beta|^2 \Phi(k) = \left|\frac{\alpha-\beta}{2} W + \beta k\right|^2$ a.e. なる 2つの等式による。(3) は、$k=0$ ならば, $\Psi(0) \geqq 0$ a.e. であり、$k \neq 0$ ならば $|k| \leqq W$ a.e. より, $\log W \in L^1$ となり、(1), (2) から導かれる。

補題 2.　次の (i) と (ii) は同値である。

(i)　$\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$

(ii)　$|W-2k| \leqq W$ a.e. を充たす $k \in \chi_{1-n} H^1$ で、更に、次の (1) ～ (4) を充たすものが存在する。

(1)　$\Psi(k) U \leqq \Phi(k)$　a.e.

(2)　$\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\} U \leqq W$　a.e.

(3)　$|\alpha|^2 \nu_s \leqq \mu_s$　,　$|\beta|^2 \nu_s \leqq \mu_s$

(4)　$|(\mu_s - \alpha\bar{\beta}\nu_s)(E)| \leqq \{(\mu_s - |\alpha|^2\nu_s)(E)\}^{\frac{1}{2}} \{(\mu_s - |\beta|^2\nu_s)(E)\}^{\frac{1}{2}}$

が、全ての Borel 集合 $E \subseteq \mathbb{T}$ について成り立つ。

証明　この§の最初に示したように、$\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha,\beta)$ を、弱正定値測度行列に書き換えることができる。それに定理Aを適用することにより、(1)～(4) が導かれる。特に、(1)は、

$$|W - \alpha\bar{\beta}\, U - 2k| \leqq (W - |\alpha|^2 U)^{\frac{1}{2}} (W - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}} \quad a.e.$$

と同値であることに注意する。従って、

$$\begin{aligned} |W - 2k| &\leqq |W - \alpha\bar{\beta}\, U - 2k| + |\alpha\bar{\beta}\, U| \\ &\leqq (W - |\alpha|^2 U)^{\frac{1}{2}} (W - |\beta|^2 U)^{\frac{1}{2}} + |\alpha\bar{\beta}\, U| \\ &\leqq W \quad a.e. \end{aligned}$$

を得る。

補題 3.　$\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha,\beta)$ ならば $\mathbb{T}$ の部分集合 $\{\zeta\,;\,\alpha(\zeta) \neq \beta(\zeta)\}$ 上で $\nu_s = 0$ となる。

証明　作用素 $\alpha P_+ + \beta P_-$ は、Hilbert 変換 $H = -iP_+ + iP_-$ により $\alpha P_+ + \beta P_- = \frac{\alpha+\beta}{2} I + i\frac{\alpha-\beta}{2} H$ と書ける。従って、$\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha,\beta)$ より、$\left|\frac{\alpha-\beta}{4}\right|^2 \nu \in \mathcal{R}_\mu^n(-i,i)$ を得る。補題2より、$(\mu_s + \left|\frac{\alpha-\beta}{4}\right|^2 \nu_s)(E) \leqq (\mu_s - \left|\frac{\alpha-\beta}{4}\right|^2 \nu_s)(E)$ が、全ての Borel 集合 $E \subseteq \mathbb{T}$ について成り立つ。ゆえに、$\left|\frac{\alpha-\beta}{4}\right|^2 \nu_s = 0$ となり、$\{\alpha \neq \beta\}$ 上で、$\nu_s = 0$ となる。

定義　有界な複素数値 Borel 関数 $\alpha(\zeta)$，$\beta(\zeta)$ について $\bigcup_{j=1}^{3} I_j = \mathbb{T}$ なる I_j を次のようにする。

$I_1 \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \,;\, \alpha(\zeta) \neq \beta(\zeta)\}$, $I_2 \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \,;\, \alpha(\zeta) = \beta(\zeta) \neq 0\}$,
$I_3 \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \,;\, \alpha(\zeta) = \beta(\zeta) = 0\}$.

定理 1. n, μ, α, β が §1 のように与えられたとき、次の (i) と (ii) は同値である。

(i) $\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$

(ii) $|W - 2k| \leq W$ a.e. を充たす $k \in \chi_{1-n} H^1$ で、更に、次の (1) ~ (4) を充たすものが存在する。

(1) $$U \leq \begin{cases} \dfrac{\Phi(k)}{\Psi(k)} & \text{a.e. on } (I_1 \cup I_2) \cap \{\Psi(k) \neq 0\} \\ \dfrac{W}{\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}} & \text{a.e. on } (I_1 \cup I_2) \cap \{\Psi(k) = 0\} \end{cases}$$

(2) $\nu_s = 0$ on I_1 (3) $|\alpha|^2 \nu_s \,(= |\beta|^2 \nu_s) \leq \mu_s$ on I_2

(4) I_3 上では、ν に制限はない。

但し、$d\mu = W\,dm + d\mu_s$, $d\nu = U\,dm + d\nu_s$ とする。

証明 (i) が (ii) を導くことを示す。$\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ とする。補題 2 より、$|W - 2k| \leq W$ a.e. を充たす $k \in \chi_{1-n} H^1$ で、更に $\Psi(k)\,U \leq \Phi(k)$ a.e. を充たすものが存在する。従って補題 1 より、$U \leq \dfrac{\Phi(k)}{\Psi(k)} \leq \dfrac{W}{\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}}$ a.e. on $(I_1 \cup I_2) \cap \{\Psi(k) \neq 0\}$ となる。一方、補題 2 より、$U \leq \dfrac{W}{\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}}$ a.e. on $I_1 \cup I_2$ ゆえ、(1) を、k は充たす。(2) は、補題 3 による。(3) は補題 2 による。(4) は、集合 $\mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ の定義による。次に、

(ii)が(i)を導くことを示す。 νが(ii)の条件を充たしているならば、補題1より、$\dfrac{\Phi(k)}{\Psi(k)} \leqq \dfrac{W}{\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}}$ a.e. on $I_1 \cup I_2$ なることから、補題2の $\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha,\beta)$ なるための必要十分条件を得る。

この定理1より、$\mathcal{R}_\mu^n(\alpha,\beta)$ の元が、Lebesgue測度 m について絶対連続になるための必要十分条件は $\{\zeta\,;\,\alpha(\zeta) \neq \beta(\zeta)\} = \mathbb{T}$ となる。我々は、この条件の下で、$\mathcal{R}_\mu^n(\alpha,\beta)$ を描く。

定理2. n, μ, α, β が§1のように与えられたとき、次の(1)と(2)が、

$$\{\zeta\,;\,\alpha(\zeta) \neq \beta(\zeta)\} = \mathbb{T}, \quad \inf_{\zeta \in \mathbb{T}} \max\{|\alpha(\zeta)|, |\beta(\zeta)|\} \neq 0$$

なる条件の下で、成り立つ。

$$(1) \quad \mathcal{R}_\mu^n(\alpha,\beta) = \left\{ U(\rho, k)\,dm \;\middle|\; \begin{array}{l} \rho \in L^\infty, \; \|\rho\|_\infty \leqq 1 \\ k \in \chi_{1-n} H^1, \; |W - 2k| \leqq W \text{ a.e.} \end{array} \right\}$$

$$(2) \quad \mathcal{R}_\mu^n(\alpha,\beta) \cap \{U\,;\,\log U \in L^1\}$$

$$= \left\{ U(\rho, k)\,dm \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \neq \rho \in H^\infty, \; \|\rho\|_\infty \leqq 1 \\ 0 \neq k \in \chi_{1-n} H^1, \; |W - 2k| \leqq W \text{ a.e.} \\ \displaystyle\int_{\{\Psi(k) \neq 0\}} \log \frac{\Phi(k)}{\Psi(k)}\,dm > -\infty \end{array} \right\}$$

但し、
$$U(\rho, k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} |\rho| \dfrac{\Phi(k)}{\Psi(k)} & \text{a.e. on } \{\Psi(k) \neq 0\} \\[2ex] |\rho| \dfrac{W}{\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}} & \text{a.e. on } \{\Psi(k) = 0\} \end{cases}$$

この定理２の(1)は、定理１から導かれる。(2)も、証明は[11]にゆずるが、(1)から導くことができる。ここで、Adamyan－Arov－Kreinの定理([5] p160, p179 ex. 18)を、我々の目的に合うように書き換えると、次のようになる。

補題４．　もし、$|W-2k_0|\leqq W$ a.e. を充たすような、$0\neq k_0\in H^1$が存在するならば、$W^{-1}\in L^1$となり次が導かれる。

$$\{k\in H^1\,;\,|W-2k|\leqq W \text{ a.e.}\}=\left\{k\,;\,k=\frac{(1-G)(1-S)}{2(1-GS)},\ S\in H^\infty,\ \|S\|_\infty\leqq 1\right\}$$

但し、$\frac{1+G}{1-G}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{W}+i\left(\frac{1}{W}\right)^\sim$.　$\sim$は共役調和変換を表わす。

この補題４と定理２より、特に$n=1$, $\alpha\equiv 1$, $\beta\equiv 0$のとき、次のことが導かれる。　もし、$\mathcal{R}^1_\mu(1,0)\neq\{0\}$ならば、

$$\mathcal{R}^1_\mu(1,0)=\left\{|\rho|\frac{|1-G|^2(1-|S|^2)}{|1-GS|^2}dm\ \middle|\ \begin{array}{l}\rho\in L^\infty,\ \|\rho\|_\infty\leqq 1\\ S\in H^\infty,\ \|S\|_\infty\leqq 1\end{array}\right\}$$

一方、　$\mathcal{R}^1_\mu(1,0)\cap\{U\,dm\,;\log U\in L^1\}$

$$=\left\{|\rho|\frac{|1-G|^2(1-|S|^2)}{|1-GS|^2}dm\ \middle|\ \begin{array}{l}0\neq\rho\in H^\infty,\ \|\rho\|_\infty\leqq 1\\ 1\neq S\in H^\infty,\ \|S\|_\infty\leqq 1\\ \log\mathrm{Re}\frac{1+S}{1-S}\in L^1\end{array}\right\}$$

となる。

以上で我々は§１の問題を解決した。証明は[11]にゆずるが、得られた結果から、次の２つの系が導かれる。これらの系の本質的な所は、系１はKoosis([9], [10])で、系２はHelson－Szegö－Sarason([6], [7])で独立に証明された。

系1　n, μ, α, β が §1 のように与えられたとき、

$\{\zeta ; \alpha(\zeta) \neq \beta(\zeta)\} = \mathbb{T}$　,　$\inf_{\zeta \in \mathbb{T}} \max\{|\alpha(\zeta)|, |\beta(\zeta)|\} \neq 0$

なる条件の下で、次の(i)と(ii)は、同値である。

(i)　$\mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta) \neq \{0\}$

(ii)　$\dfrac{|F|^2}{W} \in L^1$ を充たす、$\deg F \leq n-1$ な $0 \neq F \in \mathcal{P}_+$

　　が、存在する。

更に、(i)または(ii)が成り立つとき、$\log U \in L^1$ な、

$U \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ が、存在する。

系2　n, μ, α, β が §1 のように与えられたとき、

$\alpha \in H^\infty$, $\|\alpha\|_\infty \leq 1$　,　$\beta \in \overline{H^\infty}$, $\|\beta\|_\infty \leq 1$　,　$\{\zeta ; \alpha(\zeta) \neq \beta(\zeta)\} = \mathbb{T}$

なる条件の下で、次の(i)と(ii)は、同値である。

(i)　$\int_{\mathbb{T}} |(\alpha P_+ + \beta P_-) f|^2 \, d\mu \leq \int_{\mathbb{T}} |f|^2 \, d\mu$

　　が、全ての $f \in \mathcal{P}(n)$ について成り立つ。

(ii)　μ は、m について絶対連続であり、更に、

$d\mu = W \, dm$　,　$\log W \in L^1$ となり、更に、

$$\left| \exp(-i(\log W)^\sim) - g \right| \leq \left\{ 1 - \left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha \bar{\beta}} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{a.e.}$$

を充たすような $g \in \chi_{1-n} H^\infty$ が存在する。但し ～ は、共役調和変換を表わす。

我々は、系2において、$\alpha P_+ + \beta P$ として、例えば、

Hilbert変換Hをとると、$0 \leqslant W \in \mathcal{P}_+$, $\deg W \leqslant n-1$ となることに注意する。$n=1$ の場合が、有名な Riesz の定理になる。 Helson-Szegö-Sarason の定理を導くには、定数 $\rho < 1$ について、ρH をとらなければならない。

§5　付記

$\mathcal{R}_\mu^1(1,0) \neq \{0\}$ のとき、$\mathcal{R}_\mu^1(1,0)$ は どのくらい良い性質の測度（今の場合は m について絶対連続ゆえ L^1 関数と、同一視する.）を含むかという問題がある。Carleson-Jones ([3]) は $\forall \varepsilon > 0$ について $v \in A_{2+\varepsilon}$ (Muckenhoupt class) なる $v\,dm$ で $\mathcal{R}_\mu^1(1,0)$ に含まれるものが存在することを示した。 我々の結果が この種の問題に対して どのように役立つかは 今後の課題である。

最後に、定理Aの Arocena-Cotlar([1])による証明法について述べる。$\mathbb{Z}_+ \overset{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n \geqslant 0\}$, $\mathbb{Z}_- \overset{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ n \leqslant -1\}$ とする。$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 上の複素数値関数 $K(j,n)$, $(j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ が、或る3個の数列 $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、

$K(j,n) = a_{n-j}$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, b_{n-j} , $(j,n) \in \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_-$

$\overline{c_{j-n}}$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_-$, c_{n-j} , $(j,n) \in \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_+$ と書けるとき

$K(j,n)$ を generalized Toeplitz kernel と呼ぶ。特に、全ての有限次元ベクトル (x_j) , x_j は複素数, について

$\sum_{(j,n)} x_j \overline{x_n} K(j,n) \geqslant 0$ のとき、$K(j,n)$ は正定値であるという。この $K(j,n)$ を使って上手に Hilbert 空間を作り、『全ての等距離作用素はユニタリ拡張をもつ』という Nagy-Foias の定理と、Herglotz-Bochner の定理を使って、次を得る。

定理B.　次の(i)と(ii)は同値である。

(i) $K(j,n)$ は正定値の generalized Toeplitz kernel である。

(ii) $K(j,n) = \hat{r}_{11}(n-j)$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, $\hat{r}_{22}(n-j)$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_-$

$\hat{r}_{12}(n-j)$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_-$, $\hat{r}_{21}(n-j)$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_+$

なる $\underline{r} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \geqslant 0$ が存在する。

この定理Bと F. and M. Riesz の定理より、定理Aが導かれる。

この報告は、主として、Yamamoto ([11]) によった。

文献

[1] Arocena, R. and Cotlar, M. : A generalized Herglotz-Bochner theorem and L^2-weighted inequalities. Proc. Conference in honor of Prof. A. Zygmund, Chicago (1981) 258-269.

[2] Arocena, R., Cotlar, M. and Sadosky, C. : Weighted inequalities in L^2 and lifting properties. Adv. Math. supplementary studies V, 7A, special volume dedicated to L. Schwartz. (1981) 95-128.

[3] Carleson, L. and Jones, P. : Weighted norm inequalities and a theorem of Koosis. Institute Mittag-Leffler, report no. 2 (1981)

[4] Cotlar, M. and Sadosky, C. : On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels. Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 35 (1979) 383-407.

[5] Garnett, J. B. : Bounded analytic functions. Academic Press (1981)

[6] Helson, H. and Sarason, D. E. : Past and future. Math. Scand. 21 (1967) 5-16.

[7] Helson, H. and Szegö, G. : A problem in prediction theory. Annali di Mat. Pura et Applicata 4, 51 (1960) 107-138.

[8] Koosis, P. : Weighted quadratic means of Hilbert transforms. Duke Math. J. 38 (1971) 609-634.

[9] Koosis, P. : Moyennes quadratiques pondérées de transformées de Hilbert et fonctions de type exponentiel. C.R. Acad. Sci. Paris 276 (1973) 1201-1204.

[10] Koosis, P. : Moyennes quadratiques pondérées de fonctions periodiques et de leurs conjuguées harmoniques. C. R. Acad. Sci. Paris 291 (1980) 255-257.

[11] Yamamoto, T. : On the generalization of the theorem of Helson and Szegö (preprint).