数理解析研究所講究録
第 523 巻 1984 年 17-34

Some properties of subalgebras of H^∞+C

上智大・理工　　西沢　清子 (Kiyoko NISHIZAWA)

§1　複素平面の単位円周 T (:= {|z| = 1}) 上での関数環として基本的なものは、L^∞、H^∞、C 及びディスク環 A (:= $H^\infty \cap$ C) である。ただし C は T 上で連続な関数の全体を表わす。$H^\infty \subset$ B $\subset L^\infty$ をみたす関数環 B は、Douglas algebra と呼ばれ，$H^\infty + C_B$ という，H^∞ と B によって決まる C^*−環 C_B との線型和の形に表現される。このうちでも特に基本的、又重要と思われるものは、H^∞+ C であろう。H^∞+ C の極大イデアル空間を以下 M(H^∞+ C) で表わし、f $\in H^\infty$+ C に対して、$\hat{f}$ は、M(H^∞+ C) 上の連続関数とする。Douglas algebra についての種々の研究に対して、ここでの我々の興味は、A $\subset$ B $\subset H^\infty$ をみたす関数環 B の特徴付けである。この B を"解析環"と呼ぶ。B に $\bar{z}$ を付加して得られる H^∞+ C の閉部分環を [B, $\bar{z}$] と書く。H^∞+ C と H^∞ との関係を、

$[B, \bar{z}]$ と B との関係へと一般化してみようというのは，B の特徴付けに対する第一段階の試みと考える。ここで $[\cdot]$ は $\cdot$ の元で生成される L^∞ の閉部分環を表わす。これに関しては，Stegenga [7] の考え方がよい導入となった。即ち，彼は，線型和 $H^\infty + C$ が L^∞ の閉部分環であるという事実を，H^∞ を，L^∞ の w^*−閉，である不変部分空間 M $(:= zM \subset M)$ におきかえ，$M + C$ が L^∞ の閉部分空間になる条件を調べた。我々は，H^∞ を解析環 B におきかえる。このとき，$B + C$ は環になるとは限らないが，常に閉部分空間になっていることは，Sarason [6] の結果；

$$\mathrm{dis}(f, A) = \mathrm{dis}(f, H^\infty) \ (:= \inf_{g \in H^\infty} \| f + g \|) \quad {}^\forall f \in C$$

より示される。従って，B がどんな条件をみたせば，環，即ち，$B + C = [B, \bar{z}]$ となるかが問題となる。これに関して次の事実が得られている。

定理A.（Nishizawa [5], Izuchi [1]）次の4条件は同値である；

(1)　B が $*$−不変である。即ち

$$^\forall f \in B \quad ^\exists f^* \in B \ ; \quad \bar{z}(f - f(0)) \in B.$$

(2)　$B + C = [B, \bar{z}]$

(3) $[B+C]\cap H^{\infty}=B$.

(4) 任意の有限ブラシュケ積 b に対して, $[bB+A]=B$.

又、H^{∞} の内部関数 φ に対して、必ずしも閉ではない環 $\varphi H^{\infty}+A$ については、次の事実がある。

定理 (Stegenga [7]). 内部関数 φ の support set を

$\operatorname{supp}\varphi := \{\lambda\in T : {}^{\exists}z_n\to\lambda,\ |z_n|<1,\ \varphi(z_n)\to 0\}$ と

するとき, 次は同値である。

(i) $\operatorname{supp}\varphi$ のルベーグ測度 $m(\operatorname{supp}\varphi)$ が 0 又は 1, $m := \frac{d\theta}{2\pi}$

(ii) $\varphi H^{\infty}+A$ は閉部分環 (即ち解析環).

これを精密にして, 次の事実がある。

定理 B. (Nishizawa [5], Izuchi [1])

$0\leq m(\operatorname{supp}\varphi)<1$ ならば, $[\varphi H^{\infty}+A]$ は $*$−不変で

$m(\operatorname{supp}\varphi)=1$ ならば, $\varphi H^{\infty}+A$ は $*$−不変ではない。

又. 定理 A の(4)に関連して, 次の事実がある。

定理 C (Nishizawa [5], Muto [3])

$[\varphi H^\infty + A] = H^\infty$ となる必要十分条件は，φ が有限ブラシュケ積（ supp $\varphi = \emptyset$ ）である。

これらのいくつかの事実を用いて，以下解析環 B と，内部関数族との関係について述べる。即ち，§2では，$[\varphi H^\infty + A]$ の形で表わされる解析環 B に対して，φ と同値な内部関数族について述べる。§3では，解析環 B に対して $[\varphi H^\infty + B] = H^\infty$ をみたす内部関数族について考える。§4では，$[\varphi \cdot B + A] = [\psi \cdot B + A]$ をみたす B の内部関数 φ，ψ について述べる。

簡単のために以下，内部関数について次の記号を用いる。(H^∞の) 内部関数の全体を $\mathfrak{I}$ で，ブラシュケ積の全体を $\mathfrak{I}_b$ で，有限ブラシュケ積の全体を $\mathfrak{I}_\emptyset$ で表わす。又，sup-norm による位相により，$\varphi \in \mathfrak{I}$ に対して，φ の $\mathfrak{I}$ での連結成分を $[\![\varphi]\!]$ と書くことにする。又，$\lambda \in$ supp φ に対して $Z_\lambda(\varphi) = \{x \in M(H^\infty + C) : \hat{z}(x) = \lambda,\ \hat{\varphi}(x) = 0\}$ とする。

§2. ここでは，後に示されるいくつかの事実の基礎になる、環 $[\varphi H^\infty + A]$ と内部関数族との関係について述べる。

定理1. 2つの解析環 $[\varphi H^\infty + A]$, $[\psi H^\infty + A]$ に対して次の条件は同値である。ただし, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$; $\mathrm{supp}\,\varphi \subsetneqq T$ $\mathrm{supp}\,\psi \subsetneqq T$.

(i) $[\varphi H^\infty + A] = [\psi H^\infty + A]$

(ii) φ と ψ とは, $H^\infty + C$ で co-divisible である。

証明) (i)⇒(ii) については, Izuchi [1] による。§4 での一般化の基本になるので, 彼の証明のポイントを示す。まず仮定より, 次の2点が示される。

① $\mathrm{Supp}\,\varphi = \mathrm{Supp}\,\psi$

② $\lambda \in \mathrm{Supp}\,\varphi$ に対して, $\mathcal{Z}_\lambda(\varphi) \cap \mathcal{Z}_\lambda(\psi) \neq \phi$

さて, $\forall \lambda \in T$ に対して, $\varphi \cdot \bar{\psi}|_{X_\lambda}$, $\bar{\varphi} \cdot \psi|_{X_\lambda} \in H^\infty|_{X_\lambda}$ を示す。ここで $X_\lambda := \{x \in M(L^\infty) ; \hat{z}(x) = \lambda\}$ とする。

$\lambda \in \mathrm{Supp}\,\varphi$ のときには, ①及び②より

$$\exists g_n \in H^\infty ; \; g_n \longrightarrow \psi\bar{\varphi} \quad \text{on } X_\lambda$$

$\lambda \notin \mathrm{Supp}\,\varphi$ のときには, φ, ψ は λ の近傍で正則故, $\bar{\varphi}\psi|_{X_\lambda}$ は定数となり, $H^\infty|_{X_\lambda}$ に入る。従って, Sarason [6] により

$$\mathrm{distance}(\psi \cdot \bar{\varphi}, H^\infty + C) = \max_{\lambda \in T} \inf_{h \in H^\infty} \| \psi\bar{\varphi} - h \|_{X_\lambda} = 0$$

となって, $\varphi\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}\psi \in H^\infty + C$ が示される。

(ii)⇒(i) を示そう。 $\mathrm{supp}\,\varphi, \psi \subsetneqq T$ であることから

定理Bを用いて，解析環 $[\varphi H^\infty + A]$, $[\psi H^\infty + A]$ は共に，$*$-不変である。従って定理Aにより，$[\varphi H^\infty + A] + C$, $[\psi H^\infty + A] + C$ は，$H^\infty + C$ の閉部分環になり，この2つの環が等しいこと(i)とは同値である。又次の関係は明らかである：$\varphi H^\infty + C \subset \varphi(H^\infty + C) + C \subset [\varphi H^\infty + A] + C$

環 $\varphi(H^\infty + C) + C$ は $[\varphi H^\infty + A] + C$ の中で稠密であるから，(i)を示すには，$\varphi(H^\infty + C) + C = \psi(H^\infty + C) + C$ を示せばよい。今 $\varphi\bar{\psi} = w \ (\in (H^\infty + C)^{-1})$ とおけば，$w \in QC \ (:= (H^\infty + C) \cap \overline{(H^\infty + C)})$

故，

$$\varphi(H^\infty + C) + C = \psi w (H^\infty + C) + C \subset \psi(H^\infty + C) + C,$$

$$\psi(H^\infty + C) + C = \varphi \bar{w} (H^\infty + C) + C \subset \varphi(H^\infty + C) + C.$$

従って $[\varphi H^\infty + A] = [\psi H^\infty + A]$ となる。

系1-1．任意の内部関数 φ：$\operatorname{supp} \varphi \neq T$ に対して，$[\varphi H^\infty + A] = [b H^\infty + A]$ をみたすブラシュケ積 $b \ (\in \mathfrak{F}_b)$ が存在する。

証明）Guillory - Sarason [2] により，系1-1の条件をみたす φ に対して，$H^\infty + C$ で co-divisible となる $b \in \mathfrak{F}_b$ が存在する。

系1-2．次の3条件は同値である。

(i) $\varphi \in \mathfrak{F}_\phi$ (ii) $[\varphi H^\infty + A] = H^\infty$

(iii) $[\varphi H^\infty + A] = [\tilde{\varphi} H^\infty + A] \quad \forall \tilde{\varphi} \in [\![\varphi]\!]$

証明） (i)と(ii)の同値性は，定理Cである。(i)⇒(iii)については，ルシェの定理により，$\varphi \in \mathfrak{F}_\phi$ ならば，$[\![\varphi]\!] \subset \mathfrak{F}_\phi$ となる。従って再び定理Cより，次を得る。

$$[\varphi H^\infty + A] = H^\infty = [\tilde{\varphi} H^\infty + A] \quad \forall \tilde{\varphi} \in [\![\varphi]\!]$$

(iii)⇒(i)については，もし $\varphi \notin \mathfrak{F}_\phi$ とすれば，$\forall \alpha \in \{|z|<1\}$ に対して，$\varphi_\alpha := (\varphi - \alpha)/(1 - \bar{\alpha}\varphi)$ とおく。$\varphi_\alpha \in [\![\varphi]\!]$ となり，$\mathrm{supp}\,\varphi = \mathrm{supp}\,\varphi_\alpha \ (\neq \phi)$ である。$\forall \lambda \in \mathrm{supp}\,\varphi$ に対して，$Z_\lambda(\varphi) \cap Z_\lambda(\varphi_\alpha) = \phi$ 故，$[\varphi H^\infty + A] \neq [\varphi_\alpha H^\infty + A]$ となり矛盾を得る。

§3 ここでは，解析環B；内部関数φに対して，$[\varphi H^\infty + B]$ を考える。このとき，$\varphi H^\infty + B$ は環 故，$[\varphi H^\infty + B]$ はその閉包である。

定理2. Bは＊－不変な解析環とする。$\varphi, \psi \in \mathfrak{F}$；$\mathrm{supp}\,\varphi, \psi \subsetneq T$ とする。このとき φ, ψ が $H^\infty + C$ で co-divisible ならば，$[\varphi H^\infty + B] = [\psi H^\infty + B]$ が成立し

逆は，一般に成立しない。

証明） Bが*-不変故，$\mathcal{B}:=[\varphi H^\infty+B]$ とすると，$^\forall b\in\mathcal{F}_\varphi$ に対して $b\cdot\mathcal{B}+A=\mathcal{B}$ が成立する。何故ならば，

$$\varphi H^\infty+B\subset[\varphi H^\infty+A]+B\subset b[\varphi H^\infty+A]+A+bB+A$$
$$=b\{[\varphi H^\infty+A]+B\}+A\subset b[\varphi H^\infty+B]+A.$$

従って定理Aより，$[\varphi H^\infty+B]$，$[\psi H^\infty+B]$ は*-不変となり，$[\varphi H^\infty+B]+C$，$[\psi H^\infty+B]+C$ は $H^\infty+C$ の閉部分環となる。又定理1の(ii)⇒(i)の所と同様に，

$$\varphi H^\infty+B+C\subset\varphi(H^\infty+C)+B+C\subset[\varphi H^\infty+B]+C$$

が成立するから，$\varphi(H^\infty+C)+B+C=\psi(H^\infty+C)+B+C$ を示せばよい。これも定理1と同様に，$\varphi\bar{\psi},\bar{\varphi}\psi\in QC$ より得られる。一方，逆が成立しないことは，$B=QA$ ($:=QC\cap H^\infty$)，$\varphi_0\in\mathcal{F}_b$；$\varphi_0(z_n)=0$，$\varphi_0'(z_n)(1-|z_n|^2)\to1$ ($|z_n|\to1$) を考える。Sundberg-Wolff [8] により，$\varphi_0H^\infty+QA=H^\infty$ を示すことが出来る。$\varphi_\alpha:=(\varphi-\alpha)/(1-\bar{\alpha}\varphi)$ ($|\alpha|<1$) とすれば，$\varphi_\alpha\in\mathcal{F}_b$ で，その零点の列 $\{z_n'\}$ に対して，やはり $\varphi_\alpha'(z_n')(1-|z_n'|^2)\to1$ ($|z_n'|\to1$) が成立し，$\varphi_\alpha H^\infty+QA=H^\infty$ が成立する。従って，$\varphi_0H^\infty+QA=\varphi_\alpha H^\infty+QA$ であって，φ_0とφ_αは $H^\infty+C$ で co-divisible ではない例となっている。

以下，$\varphi\in\mathcal{F}_b$ で，その零点の列 $\{z_n\}$ が，

$$\varphi'(z_n)(1-|z_n|^2)\to 1 \qquad (|z_n|\to 1)$$

又は，同値な条件で，

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{\substack{j\neq k\\ j=1}}^{\infty}\left|\frac{z_k-z_j}{1-\bar{z}_j z_k}\right|=1$$

をみたすもの全体を，$\mathcal{F}_{s\text{-}w}$ と書くことにする。

解析環 B に対して，$[\varphi H^\infty+B]$ ($\varphi\in\mathcal{F}$) を考えるとき，とくに $[\varphi H^\infty+B]=H^\infty$ となる φ と B との関係を明らかにするのは興味深い問題と思う。B=A のときには，定理 C が対応している。B に対して，$\mathcal{F}$ の部分族で次のようなものを考える：

$$\mathcal{F}(B):=\{\varphi\in\mathcal{F}\,;\ [\varphi H^\infty+B]=H^\infty\}$$

定理 C により，常に $\mathcal{F}_\phi\subset\mathcal{F}(B)$ が成立する。又定理 1 の系 1-1，定理 2 により次の命題を得る。

命題：解析環 B に対して，$\mathcal{F}(B)\setminus\mathcal{F}_\phi\neq\emptyset$ ならば，$(\mathcal{F}(B)\setminus\mathcal{F}_\phi)\cap\mathcal{F}_b\neq\emptyset$ が成立する。

次にいくつかの例を示す。

例(1). B=A のとき，$\mathcal{F}(A)=\mathcal{F}_\phi$

(2) $B=QA$ のとき　$\mathcal{F}(QA)\supset\mathcal{F}_{s\text{-}w}\supsetneqq\mathcal{F}_\phi$.

(3) $B=\varphi H^{\infty}+A$, $m(\mathrm{supp}\,\varphi)=0$ のとき

$\mathfrak{F}(B)=\{\psi\in\mathfrak{F}$; $G.C.D(\varphi,\psi)=\Phi$ とすれば, $\Phi\equiv 1$ 又は, $\Phi\equiv\mathfrak{F}_b$

かつ $\exists\delta>0$; $\inf\limits_{\delta<|z|<1}\{|\hat{\varphi}(z)|+|\hat{\psi}(z)|\}>0\}$

(4) $B=H^{\infty}$ のとき $\mathfrak{F}(H^{\infty})=\mathfrak{F}$.

B と $\mathfrak{F}(B)$ について, 次のことを問題としている。

問題 3-1 : 解析環 B, B' に対して $B\neq B'\Rightarrow\mathfrak{F}(B)\neq\mathfrak{F}(B')$?

とくに $A\subsetneqq B$ で, $\mathfrak{F}(B)=\mathfrak{F}_{\phi}$ となるものがあるか ?

問題 3-2 : $\mathfrak{F}(B)$ は $\mathfrak{F}$ の中で, 開かつ閉集合か ?

問題 3-3 : $\varphi\in\mathfrak{F}(B)\Rightarrow[\![\varphi]\!]\subset\mathfrak{F}(B)$? $B=A$, H^{∞} なら明らかに成立。又 $B=QA$ のとき, $\varphi\in\mathfrak{F}_{s\text{-}w}$ に対しては, $[\![\varphi]\!]\subset\mathfrak{F}(B)$ が成立している。

§4. ここでは, 解析環 B の閉部分環 $[\varphi B+A]$ を考える。

定理3. B を $*$-不変な解析環, φ, ψ は, $\mathfrak{F}\cap B$ の元で $\mathrm{supp}\,\varphi$, $\mathrm{supp}\,\psi\subsetneqq T$ とする。このとき φ, ψ が $B+C$ で, co-divisible ならば $[\varphi B+A]=[\psi B+A]$ となる。又逆は一般に成立しない。

証明）仮定より，$[\varphi B+A]$，$[\psi B+A]$ は $*$-不変である。従って定理1の証明(iii)⇒(i)の H^∞ を B に置き換えることで示される。逆が成立しない例としては，$\forall \Phi\in\mathfrak{F}$；$\phi \neq \mathrm{supp}\,\Phi \subsetneqq T$ に対して，$B:=[A,\Phi]$ とすると，B は $*$-不変で，かつ $B=[\Phi B+A]$ が成立する。今 $\Phi_\alpha=(\Phi-\alpha)/(1-\bar{\alpha}\Phi)$ $(|\alpha|<1)$ に対しても，$B=[\Phi_\alpha B+A]$ が成立するから，$[\Phi B+A]=[\Phi_\alpha B+A]$ で，Φ，Φ_α は co-divisible でない例となっている。

系3-1. B を $*$-不変な解析環，φ を $B\cap\mathfrak{F}$ の元で，$\mathrm{supp}\,\varphi\subsetneqq T$ とする。任意の $\psi\in\mathfrak{F}_\phi$ に対して，$[\varphi B+A]=[\psi\varphi B+A]$ が成立する。

系3-2. B を $*$-不変な解析環，$\varphi\in B\cap\mathfrak{F}$ で，$\mathrm{supp}\,\varphi$ が Carleson-set ならば，$[\varphi B+A]=[bB+A]$ をみたす $b\in\mathfrak{F}_b\cap B$ が存在する。

証明） Guillory-Sarason [2] により，$\mathrm{supp}\,\varphi$ が Carleson set である φ に対しては，$\varphi\bar{b}=h\in C$ となる $b\in\mathfrak{F}_b$ が存在する。従って $b=\varphi\bar{h}\in(B+C)\cap H^\infty$ となる。定理Aにより，$b\in(B+C)\cap H^\infty=B$ となる。

定理4　BはQAを含む解析環とする。φ, ψ はみのBの元で，$\mathrm{supp}\,\varphi, \mathrm{supp}\,\psi \subsetneqq T$ とする。次の2条件は同値である。

(i)　$[\varphi B + A] = [\psi B + A]$

(ii)　φ と ψ とは，$H^\infty + C$ で co-divisible である。

注意：$B = H^\infty$ のときが，定理1である。

証明）　$QA \subset B$ ならば，Wolff [9] より，Bは*-不変である。又 $QA + C = QC \subset B + C$ より，$\varphi\bar{\psi} \in (H^\infty + C)^{-1}$ と $\varphi\bar{\psi} \in (B+C)^{-1}$ は同値となる。従って定理3より，(ii)⇒(i)は示された。(i)⇒(ii) を示すには，次の(☆)を示せば，定理1の(i)⇒(ii)と同様にすればよい。

(☆)　$\mathrm{supp}\,\varphi = \mathrm{supp}\,\psi$，　$Z_\lambda(\varphi) \cap Z_\lambda(\psi) \neq \phi$　$\forall \lambda \in \mathrm{supp}\,\varphi$

このために，次の補題を用意する。

補題　任意の複素数列 $\{z_n\}$：$|z_n| < 1$，$|z_n| \to 1$ に対して，部分列 $\{z_{n_j}\}$ で，次をみたすものがある：

$$(*)\qquad \lim_{k\to\infty} \prod_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{\infty} \left| \frac{z_{n_k} - z_{n_j}}{1 - \bar{z}_{n_j} z_{n_k}} \right| = 1$$

補題が示されたとして，(☆)を導く。Sandberg-Wolff

[8] により，(*) をみたす列に対応するブラシュケ積を b_0 とおけば，$b_0 H^\infty + QA = H^\infty$ が成立する。ここで，もし $\lambda \in \mathrm{Supp}\,\varphi - \mathrm{Supp}\,\psi$ とすれば，複素数列 $\{z_n\}$ で，$z_n \to \lambda$ $\varphi(z_n) \to 0$ となるものがある。この $\{z_n\}$ に補題を適用して，(*) をみたす部分列 $\{z_{n_j}\}$ をとり出す。$E := Z_\lambda(b_0) \cap Z_\lambda(\varphi)$ とすると，$E \neq \phi$ でかつ，一点集合ではない。$[\varphi B + A]|_E = A|_E$ は定数のみからなる一方，$[\psi B + A]|_E = B|_E \supset QA|_E = H^\infty|_E$ となり，$[\varphi B + A] = [\psi B + A]$ に矛盾する。従って $\mathrm{supp}\,\varphi = \mathrm{supp}\,\psi$ となる。又 $\lambda \in \mathrm{supp}\,\varphi$ に対して，$Z_\lambda(\varphi) \cap Z_\lambda(\psi) = \phi$ と仮定する。もし $\psi/_{Z_\lambda(\varphi)}$ が定数でなければ矛盾となる。又もし定数 $(\neq 0)$ であれば，${}^\forall x \in Z_\lambda(\varphi)$ ${}^\exists\{z_n\}$; $z_n \to \lambda$，$\varphi(z_n) \to 0\ (= \hat{\varphi}(x))$ より，補題を適用して，(*) をみたす部分列 $\{z_{n_j}\}$ をとり，再び，$[\varphi B + A]$ と $[\psi B + A]$ との E 上への制限を考えれば矛盾が得られる。従って (☆) が示された。

補題の証明）2つの複素数 z, w に対して $\rho(z, w) := |(z-w)/(1-\bar{z}w)|$ とおく。$0 < \delta_0 < 1$ をみたす正数 δ_0 を固定する。z_{n_1} を，$\rho(z_1, z) \geq \delta_0$，$|z_1| < |z|$ をみたす $\{z_n\}$ の元の1つとする。z_{n_2} を，$\rho(z_{n_1}, z) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta_0$，かつ $\max\{|z_1|, \cdots, |z_{n_1}|\} < |z|$

をみたす $\{z_n\}$ の元の1つとする。一般に $j \geqq 3$ に対して，z_{n_j} を，$\min\{\rho(z_{n_1}, z), \cdots \rho(z_{n_{j-1}}, z)\} \geqq \sum_{l=1}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^l + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}\cdot\delta_0$，かつ $\max\{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_{n_{j-1}}|\} < |z|$ を，みたす $\{z_m\}$ の元の1つと決める。簡単のために，

$$\delta_j := \sum_{l=1}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^l + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}\cdot\delta_0$$

とおけば，$\delta_j \to 1$（単調増加列）である。こうして得られた部分列 $\{z_{n_j}\}$ は (*) をみたす。何故ならば，

$$\prod_{\substack{k\neq j\\ j=1}}^{\infty}\left|\frac{z_{n_j} - z_{n_k}}{1-\bar{z}_{n_k} z_{n_j}}\right| = \prod_{k=1}^{k<j}\rho(z_{n_j}, z_{n_k})\cdot\prod_{k>j}^{\infty}\rho(z_{n_j}, z_{n_k})$$

$$\prod_{k=1}^{k<j}\rho(z_{n_j}, z_{n_k}) \geqq (\delta_j)^{j-1} \longrightarrow 1 \quad (j\to\infty)$$

$$\prod_{k>j}^{j+m}\rho(z_{n_j}, z_{n_k}) \geqq \delta_j\cdot\delta_{j+1}\cdot\delta_{j+2}\cdots\cdots\delta_{j+m}$$

$$\geqq \left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{j-1}\right)\cdot\cdots\cdots\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{j-1+m}\right)$$

$$(=: P(j;m))$$

$$P^+(j:m) := \left(1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{j-1}\right)\cdot\cdots\cdots\left(1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{j-1+m}\right)$$

$$|P(j:m)-1| \leqq P^+(j;m)-1 \leqq \exp\left(\tfrac{1}{2}\right)^{j-2}-1$$

$$\forall\varepsilon>0.\ \exists j_0\ ;\ j_0<\forall j \longrightarrow \exp\left(\tfrac{1}{2}\right)^{j-2}-1<\varepsilon \quad 故，$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists j_0\ ;\ j_0<\forall j \longrightarrow 1-\varepsilon< P(j:m)<1$$

これより，

$$(1-\varepsilon)^2 \leqq \delta_j^{\,j-1}\cdot P(j:m) \leqq \prod_{\substack{k\neq j\\ k=1}}^{j+m}\rho(z_{n_j}, z_{n_k}) < 1$$

$$(1-\varepsilon)^2 \leqq \delta_j^{\,j-1} \lim_{m\to\infty} P(j:m) \leqq \prod^{\infty} \rho(z_{n_j}, z_{n_k})$$

$$\therefore \quad \lim_{j\to\infty} \prod_{\substack{k\neq j \\ k=1}}^{\infty} \left| \frac{z_{n_j} - z_{n_k}}{1 - \bar{z}_{n_k} z_{n_j}} \right| = 1.$$

系4-1　$QA \subset B$ とすれば，$\varphi \in \mathcal{F} \cap B$ に対して，$b \in \mathcal{F}_b \cap B$ で，$[\varphi B + A] = [bB + A]$ をみたすものがある。

証明）Guillory - Sarason [2] により，$\forall \varphi \in \mathcal{F}$, $\exists b \in \mathcal{F}_b$; $\bar{\varphi} b \in QC$。従って $\bar{\varphi} b = \ell \in (B+C)^{-1}$ より $b = \varphi \ell \in (B+C) \cap H^{\infty} = B$ となる。

系4-2　$QA \subset B$ とすれば，次の3条件は同値である。

(i) $\varphi \in \mathcal{F}_\phi$　　(ii) $[\varphi B + A] = B$

(iii) $[\varphi B + A] = [\tilde{\varphi} B + A]$　$\forall \tilde{\varphi} \in [\![\varphi]\!]$

証明）(i)⇒(ii) は B の*-不変性による。$\forall b \in \mathcal{F}_\phi$ に対して，$B = [bB + A]$ となることから，(ii)を仮定すれば，$[\varphi B + A] = B = [bB + A]$ となり，定理4より，$\varphi \bar{b} \in QC$ となり，$\varphi \in QC \cap H^{\infty} = QA$。一方 $QA \cap \mathcal{F} = \mathcal{F}_\phi$ であったから，$\varphi \in \mathcal{F}_\phi$ をうる。即ち(i)⇔(ii)である。

(i)⇒(iii) は，$\varphi \in \mathcal{F}_\phi$ ならば，$[\![\varphi]\!] \subset \mathcal{F}_\phi$ より明らか

である。(iii)を仮定する。もし $\mathrm{supp}\,\varphi \neq \phi$ とすれば、
$\varphi_\alpha := (\varphi-\alpha)/(1-\bar{\alpha}\varphi)$ $|\alpha|<1$ を考えれば、$\varphi_\alpha \in [\![\varphi]\!]$
で、かつ $\varphi\cdot\bar{\varphi}_\alpha \notin (H^\infty+C)^{-1}$ より定理4に矛盾する。

§3で考えたと同様に、解析環Bに対して、$[\varphi B+A]=B$ となるBと $\varphi\in\mathfrak{F}\cap B$ との関係を明らかにすることは興味ある問題と思われる。Bに対して、内部関数族

$$\tilde{\mathfrak{F}}(B) := \{\varphi\in\mathfrak{F}\cap B\ ;\ [\varphi B + A] = B\}$$

を考える。

注意：Bが *-不変であることと、$\tilde{\mathfrak{F}}(B)\supset\mathfrak{F}_\phi$ は同値である。

Bと $\tilde{\mathfrak{F}}(B)$ について、次のことを問題としている。

問題4-1　*-不変な解析環Bで、$\tilde{\mathfrak{F}}(B)=\mathfrak{F}_\phi$ となるものの特徴付け。

$\tilde{\mathfrak{F}}(B)=\mathfrak{F}_\phi$ となるBの例としては、A及び、$QA\subseteq{}^{\forall}B$（定理4）、B_A, B_C（Nishizawa[4]）ただし B_A, B_C を定義する内部関数は $\mathfrak{F}_{s\text{-}w}$ の元とする。このとき、$B_A, B_C \not\supset QA$ である。

一方、$\tilde{\mathfrak{F}}(B)\supsetneq\mathfrak{F}_\phi$ となるBの例としては、$B=[A,\bar{\varphi}]$ ただし $\varphi\in\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{F}_\phi$; $m(\mathrm{supp}\,\varphi)=0$ がある。このとき $B=[\varphi B+A]$ で、$\varphi_\alpha=(\varphi-\alpha)/(1-\bar{\alpha}\varphi)$ に対して、

$B=[\varphi B+A]=[\varphi_\alpha B+A]$ であり，$\mathrm{supp}\,\varphi_\alpha=\mathrm{supp}\,\varphi\ (\neq\phi)$ であるから，$\varphi_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{F}}(B)\setminus\mathfrak{F}_\varphi$ である。

問題4-2　＊不変な解析環 B，及び $\varphi\in\mathfrak{F}\cap B$ で，$\mathrm{supp}\,\varphi\subsetneqq T$ とするとき，次の2条件を同値にする B の特徴付け.

(i) $[\varphi B+A]=B$ i.e. $\varphi\in\widetilde{\mathfrak{F}}(B)$

(ii) $[\varphi B+A]=[\tilde{\varphi}B+A]$ $\quad\forall\tilde{\varphi}\in[\![\varphi]\!]$.

References

1) K.Izuchi, ディスク環を含む有界正則関数の環, 神奈川大工学研究所所報, 4(1981), 97-105.

2) C.Guillory & D.Sarason, Division in H^∞ +C, Michigan Math.J.,28(1981), 173-181.

3) T.Muto, Remarks on some algebras of H^∞ containing A, unpublished.

4) K.Nishizawa, On closed subalgebras between A and H^∞, Tokyo J.Math.,3(1980), 137-140.

5) K.Nishizawa, On closed subalgebras lying between A and H^∞,II, Tokyo J.Math.,5(1982),157-169.

6) D.Sarason, Algebras of functions on the unit circle, Bull.Amer.Math.Soc.,79(1973),286-299.

7) D.Stegenga, Sums of invariant subspaces, Pacific J. Math.,70(1977), 567-584.

8) C.Sundberg & T.H.Wolff, Interpolating sequences for QA_B , Trans. Amer. Math.Soc., 276(1983), 551-581.

9) T.H.Wolff, Two algebras of bounded functions, Duke Math.J., 49(1982), 321-328.