数理解析研究所講究録
第523巻 1984年 35-52

Douglas algebraに関連した最近の話題

神奈川大工 泉池 敬司 (Keiji Izuchi)

H^∞に関する分解定理は良く知られているが，ここでは$H^\infty+C$及び一般のDouglas環の中での分解定理の周辺の話題を述べたい。

§1. 準備.

Dを単位開円板，∂Dをその境界とする。H^∞をD上の有界正則関数のなす環とする。境界関数を考えることによって，H^∞はL^∞のsup-norm閉部分環となる。L^∞は$d\theta/2\pi$に関する有界Borel関数全体である。H^∞とL^∞の中間にある環をDouglas環という。Cを∂D上の連続関数全体とする時，$H^\infty+C$はH^∞を除いて最小のDouglas環である(D. Sarason)。以下断りなしにBと書いたら$H^\infty+C$より大きいDouglas環とする。Douglas環における最も重要な定理は，

<u>Chang-Marshall定理</u>[3, 14]. BはH^∞といくつかの

interpolating Blaschke積の複素共役で生成される。

$M(B)$でBのmaximal ideal spaceを表わす。$M(H^\infty+C)=M(H^\infty)\setminus D$である。Bはそのgelfand変換と同一視する。$f\in B$に対して

$$Z_B(f)=\{x\in M(H^\infty+C);\ f(x)=0\}$$

とする。特に$B=H^\infty+C$の時は$Z(f)=Z_{H^\infty+C}(f)$と省略して書くことにする。$M(H^\infty)$の中の2点x, yに対して

$$\rho(x,y)=\sup\{|f(y)|;\ f\in H^\infty, \|f\|\leq 1, f(x)=0\}$$

とおく。

$$P(x)=\{y\in M(H^\infty);\ \rho(x,y)<1\}$$

はxを含むGleason partと呼ばれる。H^∞はlogmodular環であるから，$P(x)\neq\{x\}$ならばDから$P(x)$上への1対1連続写像αで$\alpha(0)=x$, $f\circ\alpha_x$が各$f\in H^\infty$に対して正則となるαが存在する。その時$f\circ\alpha_x(z)$の$z=0$でのzero点のorderをそのままfのxでのzero点のorderと考え$\mathrm{Ord}_f(x)$で表わす。$\{z_n\}\subset D$が$\sum_{n=1}^{\infty}1-|z_n|<\infty$を満たす時,

$$b(z)=\prod\frac{-\bar{z}_n}{|z_n|}\ \frac{z-z_n}{1-\bar{z}_n z}$$

をBlaschke積という。特に$H^\infty|_{\{z_n\}}=\ell^\infty$となる時，interpolatingという名前を付ける。

<u>Hoffman定理1</u> [10]. $x\in M(H^\infty+C)$に対して$P(x)\neq\{x\}$で

ある必十条件は $b(x)=0$ となる interpolating Blaschke 積 b が存在することである。

b が $\{z_n\}$ を zero 点列とする interp. Blaschke 積とする時，次の事は知られている。

(1) $\{z_n\}$ の $M(H^\infty)$ での closure は βN と homeo. である。

(2) $\mathrm{Ord}_b(x)=1$ $(x\in Z(b))$.

また次の H^∞ の分解定理は，D の中の zero 点列に関して見ると大域的に分解出来ることを示している。

<u>H^∞ の分解定理.</u> $H^\infty = BSO$, B は Blaschke 積，S は singular inner 関数，O は outer 関数である。

次は K. Hoffman [10] によって与えられた，$M(H^\infty)$ の各点ごとの分解定理である。

<u>Hoffman 定理 2.</u> $f\in H^\infty$, $x\in M(H^\infty)$ で $\mathrm{Ord}_f(x)=k$ とする。$k<\infty$ ならば $f=f_1f_2\cdots f_k$, $f_i\in H^\infty$, $\mathrm{Ord}_{f_i}(x)=1$ と分解出来る。$k=\infty$ ならば任意の n に対して $f=f_1f_2\cdots f_n$, $f_i\in H^\infty$, $f_i(x)=0$ と分解出来る。

§2. Wolff の分解定理.

事の始まりは次の Sarason 定理 [15] である。$QC=(H^\infty+C)\cap\overline{(H^\infty+C)}$, $QA=H^\infty\cap QC$ とする。

<u>Sarason 定理 1.</u> w が QC で invertible な unimodular

関数, $|w|=1$ a.e. $d\theta/2\pi$, ならば $w=z^n\exp[i(u+\tilde{v})]$ である, ここで $u, v\in C$ であり, $\tilde{v}$ は v の共役調和である。

Sarason は同時に次の問題を提出した。w が $H^\infty+C$ の unimodular 関数ならば, $w=uv$, u は inner 関数, v は QC で invertible か? これを解いたのが T. Wolff [17] である。

一方 S. Axler [1] は次の分解定理を与えた。

Axler 定理. $f\in L^\infty$ に対して, $bf\in H^\infty+C$ となる Blaschke 積 b が存在する ($L^\infty/\{$Blaschke 積$\}=H^\infty+C$).

ただし b は interp. Blaschke 積には取れない。[17] での Wolff の主定理は次である。

Wolff 定理 1. $f\in L^\infty$ に対して $gf\in QC$ となる outer 関数 $g\in QA$ が存在する ($L^\infty/QA=QC$).

この定理の応用は広く, Chang-Marshall 定理に次ぐ Douglas 環においては深い定理に思われる。この定理を用いて [7] で次が示された。

Guillory-Sarason 定理 1. 各 inner 関数 I に対して, $I\bar{b}\in H^\infty+C$ かつ $b\bar{I}\in H^\infty+C$ なる Blaschke 積 b が存在する。

この定理は, singular inner 関数は考えなくても Blaschke 積だけ考えれば用が足りることを示しているが, 又反面 Blaschke 積は interp. Blaschke 積の持つ性質と全く異なるも

のが存在することを示す定理でもある。後で関連してくるが，残されてくる問題の多くはこの様なBlaschke積に関するものである。W－定理1とG－S定理1を合わせると次が得られる。

<u>Wolff 定理2.</u> wがL^∞のunimodular関数ならば，$w = B_1\overline{B_2}v$である。ここでB_1，B_2はBlaschke積，vはQCでinvertible関数。

W－定理1は次の2つの補題を結び合わせて示される。

<u>補題1.</u> $f \in L^\infty$に対してBlaschke点列$\{z_n\}$で次の性質を持つものが存在する：$g \in QC$，$g(z_n) \to 0$ならば$gf \in QC$。

<u>補題2.</u> $\{z_n\}$がBlaschke点列ならば$g(z_n) \to 0$なるouter関数$g \in QA$が存在する。

Wolffの証明はともにVMO技法で示されている。後で，補題1はinterp. Blaschke積の性質を使う証明を述べる。補題2は存在定理で，gをsingular inner関数に変えられないかというのが[7]における問題の1つで後で述べる。

§3. Guillory-Sarasonの分解定理2.

[7]で示された一つの分解定理の周辺について述べる。

<u>Guillory-Sarason定理2.</u> ψをinner関数，$\varphi \in H^\infty + C$とする時次は同値である。

(i) $\varphi\bar{\psi}^n \in H^\infty + C,\ n = 1, 2, \cdots$

(ii) $\{x \in M(H^\infty + C);\ |\psi(x)| < 1\} \subset Z(\varphi)$.

この定理から出発して[2, 13, 1]のDouglas環への拡張がある。それらを通して次の2つが基本であることが理解出来る。一つは単純にChang-Marshall定理に含まれるものであるが，明確に書かれている所がなく，Marshall氏によれば彼の博士論文に述べられているとしうがない。

<u>命題1</u>（証明は[1]参照）．inner関数Iに対して，interpolating Blaschke積bで$[H^\infty, \bar{I}] = [H^\infty, \bar{b}]$なるものが存在する（$\{x \in M(H^\infty + C);\ |I(x)| < 1\} = \{x \in M(H^\infty + C);\ |b(x)| < 1\}$と同じこと），ここで$[\cdot]$は中味より生成される閉部分環を表わす。

もう一つは[2, 9]で同時に独立に得られた結果である。

<u>A-G-G-I-S定理</u>．bをinterpolating Blaschke積，$f \in H^\infty + C$，かつ$Z(f) \supset Z(b)$ならば，$f\bar{b} \in H^\infty + C$である。

H^∞の分解定理は，$f \in H^\infty$，bをBlaschke積で，もし$\mathrm{Ord}_f(z) \geq \mathrm{Ord}_b(z)$（$z$は$b$の$D$でのzero点）ならば，$f\bar{b} \in H^\infty$であることを示している。この場合$\mathrm{Ord}_b(z) < \infty$である。よって割算について自然に$H^\infty + C$に拡張を考えるならば，$\mathrm{Ord}_b(x) < \infty$ ($\forall x \in Z(b)$)の時に考えることになる。その場合，bはinterpolating Blaschke積の有限個の積の形に表わさ

れるから A−G−G−I−S定理が自然な拡張になっていることがわかる。$\mathrm{Ord}_b(x)=\infty$ となる $x\in Z(b)$ がある時は $f\in H^\infty+C$ が $\mathrm{Ord}_f(x)\geq \mathrm{Ord}_b(x)$ ($\forall x\in Z(b)$) を満たしかつ $f\bar{b}\notin H^\infty+C$ なる例は簡単に作れる。この点は Guillory−Sarason定理3に関係している。分解定理で残された難かしさはすべて, zero 点の order が ∞ になる場合に集約される。この場合はあまりわかっていない。

さてG−S定理2を命題1とA−G−G−I−S定理より導いてみよう。([2])

<u>証明.</u> (i) ⇒ (ii) は自明である。(逆) φ に対して命題1の b を取る。$Z(b)\subset\{x\in M(H^\infty+C);\ |\varphi(x)|<1\}\subset Z(\varphi)$ であるから, A−G−G−I−S定理より, $\varphi\bar{b}\in H^\infty+C$ である。その上 $Z(b)\subset Z(\varphi\bar{b})=Z(\varphi)$ より, $\varphi\bar{b}^2\in H^\infty+C$。続けて, $\varphi\bar{b}^n\in H^\infty+C$ を得る。

A−G−G−I−S定理は Chang−Marshall 定理をいつものように使うと容易に一般の Douglas 環の場合に拡張出来る。よってG−S定理2も拡張出来る。G−S定理2の最終的な形は次の様になる([18]を参照)。

<u>命題2.</u> B_1, B_2 を Douglas 環で $f\in B_2$ とする。次は同値である。

(i) $fB_1\subset B_2$.

(ii) $Z_{B_2}(f) \supset M(B_2) \setminus M(B_1)$.

Wolff補題1の別証。$f \in L^\infty$とする。C-M定理より$f, \bar{f} \in [H^\infty, \bar{I}]$なるinner関数$I$が存在する。命題1より$[H^\infty, \bar{I}] = [H^\infty, \bar{b}]$なるinterp. Blaschke積$b$がある。$g \in QC$を$g(z_n) \to 0$とすると，A-G-G-I-S定理より$g\bar{b}^n \in H^\infty + C$を得る。これは$[H^\infty, \bar{b}]g \subset H^\infty + C$であり証明が終る。

この証明は命題2の特別な場合である：$B_1 = [H^\infty, f, \bar{f}]$，$B_2 = H^\infty + C$，$f = g \in QC \subset H^\infty + C$。証明は同じである。又補題1のDouglas環への拡張も出来る。ただ補題1を証明するだけならば，A-G-G-I-S定理は不必要で，命題1より明らかになる。

関連して生ずる問題は：Wolff補題1の結論が成立するBlaschke点列$\{z_n\}$はinterpolating点列の有限個の合併集合か？

最後に§2の終りに述べた事柄について述べる。[7]に次の問題がある：各inner関数Iに対してsingular inner関数Sで$S\bar{I}^n \in H^\infty + C\ (\forall n)$をみたすものが存在するか？

この解は最近P. Gorkin[6]によって与えられた。Gorkinは[7]での手法を使っている為，上半平面でその構成をしているが単位円板Dで議論した方が簡単で又singular測度を作る時，連続にも又discreteにも取れるから便利である。

singular測度の構成。

まず Sarason の問題に答えるように問題を変形していく。I を inner 関数とすると命題1より $[H^\infty, I] = [H^\infty, b]$ なる interpolating Blaschke 積 b がある。その zero点列を $\{z_n\}$ とする。$S(z_n) \to 0$ なる singular inner 関数 S の存在が示されれば，A-G-G-I-S 定理より $S\bar{b}^n \in H^\infty + C$ となり，$S\bar{I}^n \in H^\infty + C$ が得られる。よって問題は $S(z_n) \to 0$ なる S の作り方だけである。(Wolff補題2と比較すると問題意識は同じになる)。

そこで $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ とおく。$\sum_{n=1}^{\infty}(1-r_n) < \infty$ だから，正数列 $\{b_n\}$ で $b_n \to \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(1-r_n) < \infty$ なるものが取れる。$a_n = b_n(1-r_n)$ とおく。δ_n を $e^{i\theta_n}$ での単位点測度とし，$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n$ とする，μ は discrete 測度である。$S[\mu]$ で μ より作られる singular inner 関数とすると

$$
\begin{aligned}
|S[\mu](z_n)| &\leq |S[a_n\delta_n](z_n)| \\
&= \left|\exp\left[-a_n \frac{e^{i\theta_n} + r_n e^{i\theta_n}}{e^{i\theta_n} - r_n e^{i\theta_n}}\right]\right| \\
&= \exp\left[-a_n \frac{1+r_n}{1-r_n}\right] = \exp[-b_n(1+r_n)] \to 0.
\end{aligned}
$$

もし連続 singular inner 関数を望むならば δ_nの変わりに

$$
\mathrm{Re} \int \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\mu_n(\theta) \geq \frac{1+r_n}{2(1-r_n)}
$$

をみたす連続 singular 確率測度を選べばよい。証明終り。

この結果から Hoffman の本，P. 179 に述べられている，

$x \in M(H^\infty+C) \setminus M(L^\infty)$ の特長づけの所に次の条件を加えることが出来る。

(a) $S_d(x)=0$ ($S_c(x)=0$) なる discrete (連続) singular inner 関数 S_d (S_c) が存在する。

又 L^∞ が H^∞ と $\overline{S_d}$ (又は $\overline{S_c}$) で生成され得ることもわかる。おもしろい所は、S_d に対して $S_c\overline{S_d}^n \in H^\infty+C$ なる S_c が存在する所である。同様に S_c に対して $S_d\overline{S_c}^n \in H^\infty+C$ なる S_d が存在する。singular inner 関数の分解定理の研究はあまり進んでいないが、上の議論を押し進めていくと何かがある様な気がする。注意としては、Axler定理はこれらの事を使っても得ることが出来る。しかしAxler定理の証明自体は簡単なのでそこで使っている Douglas-Rudin 定理 [4] と結びつけて考えると新しい見方が出て来る様な気がする。

§4. Guillory-Sarason定理3.

次も[7]に示されている結果である。

Guillory-Sarason定理3. 次をみたす自然数 N が存在する: $\varphi \in H^\infty+C$ で、ψ を inner 関数とする。もし $M(H^\infty+C)$ 上で $|\varphi| \le |\psi|$ が成立していれば、$\varphi^N\overline{\psi} \in H^\infty+C$ である。

この定理は分解定理の中で深く $H^\infty+C$ の構造又は Douglas 環の構造に関係している様に思われる。まず N の出所である

が Carleson の corona 定理の証明の中に出てくる構成法の中の自然数に関係する N である。問題の一つは具体的に与えよである。もう一つは一般の Douglas 環で G－S 定理 3 が成立するかである。ともに難しい問題の様に思われる。筆者は $N=2$（もう少し 1^+ という所まで短縮出来る）と予想する。

ψ が interpolating Blaschke 積とすると，$|\varphi|\le|\psi|$ は $Z(\psi)\subset Z(\varphi)$ を意味するから A－G－G－I－S 定理より $\varphi\overline{\psi}\in H^\infty+C$ となる。つまり ψ が interpolating Blaschke 積ならば $N=1$ と取れる。有限回の議論で ψ が interpolating Blaschke 積の有限個の積の場合にも $N=1$ である。ψ がそうでない時，interpolating Blaschke 積 b で $\psi\overline{b}^n\in H^\infty+C$ なるものが存在する。$\varphi=\psi\overline{b}$ とすると，$|\varphi|=|\psi|$（$M(H^\infty+C)$ 上で）であり，$\varphi\overline{\psi}=\overline{b}\notin H^\infty+C$ であり $\varphi^2\overline{\psi}=\psi^2\overline{b}^2\overline{\psi}=\psi\overline{b}^2\in H^\infty+C$ である。$\varphi=\psi\overline{b}^n$ としても，$\varphi^2\overline{\psi}=\psi\overline{b}^{2n}\in H^\infty+C$ で同じ事になる。もう一つの例は U を $M(L^\infty)$ の開かつ閉集合で χ を U 上で 1，U^c 上で定数 α，$|\alpha|=1$ とする。Wolff 定理 2 より，$\chi=uB_1\overline{B_2}$ なる Blaschke 積 B_1, B_2 と QC で invertible な u が存在する。$B_1\overline{B_2}\notin H^\infty+C$ である。又

$$B_1^2\overline{B_2}=\chi^2B_2^2\overline{u}^2\overline{B_2}=\overline{u}^2\chi^2B_2$$

であるから $B_1^2\overline{B_2}\in H^\infty+C$ を示すには，$\chi^2B_2\in H^\infty+C$ をチェックすればよい。$\alpha=\pm1$ の時はあたりまえ。よって $\alpha\neq\pm1$

の時を考える。$\chi^2 B_2 \notin H^\infty + C$ とすると，或る $x \in M(H^\infty + C)$ で $\chi^2 B_2|_{\mathrm{supp}\,\mu_x} \notin H^\infty|_{\mathrm{supp}\,\mu_x}$ となる。条件より $\chi B_2 \in H^\infty + C$ より $\chi B_2|_{\mathrm{supp}\,\mu_x} \in H^\infty|_{\mathrm{supp}\,\mu_x}$ かつ $B_2|_{\mathrm{supp}\,\mu_x} \in H^\infty|_{\mathrm{supp}\,\mu_x}$ である。よって

$$(\chi^2-\chi) B_2|_{\mathrm{supp}\,\mu_x} \notin H^\infty|_{\mathrm{supp}\,\mu_x} \text{ かつ } (\chi-1) B_2|_{\mathrm{supp}\,\mu_x} \in H^\infty|_{\mathrm{supp}\,\mu_x}$$

χ_0 を U 上で 0，U^c 上で 1 とすると

$$\chi_0 B_2|_{\mathrm{supp}\,\mu_x} \notin H^\infty|_{\mathrm{supp}\,\mu_x} \text{ かつ } \chi_0 B_2|_{\mathrm{supp}\,\mu_x} \in H^\infty|_{\mathrm{supp}\,\mu_x}$$

で矛盾が生ずる。この議論を押し進めると，w が有限個の値を取る unimodular 関数の時，Wolff定理2より得られる $w B_1 \overline{B_2} \in QC$ となる Blaschke 積 B_1, B_2 に対して $B_1^2 \overline{B_2} \in H^\infty + C$ となることがわかる。もし G−S の証明方法で話しを進めようとしたら corona定理の精密化が必要に思われる。

自然数の2と3に関係する問題がいくつかあるのでここでそれを紹介したい。

早大の羽鳥氏より注意された事であるが，corona定理に関係して次の問題がある（Wolffの問題，[5, p.329]）：

$f_1, f_2, \dots, f_n, g \in H^\infty$ で $|g(z)| \le |f_1(z)| + |f_2(z)| + \cdots + |f_n(z)|$ ならば $g^2 = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_n f_n$ なる $g_i \in H^\infty$ が存在するか?

この時2は一般の k で問題設定が出来るが $k \geqq 3$ の時には Wolff によって示されている。$k = 1$ の時は NO である。残されているのが上の問題である。これは問題としては前のN

の問題とにている。この場合はD上での評価式の条件であるが，ここら辺の難かしさは境界の近くでの0に近ずく早さのorderを評価しなくてはならない所である。Nの問題も同じである。しかし2つの問題の相関関係はあまりはっきりしない。羽鳥氏はWolffの問題は2^+に当る所まではOKで2はNOという結果を得ている様である。

次はSarasonの問題である。BをDouglas環で$\mathcal{U}$をBの中でinvertibleなinner関数の集まりとする。uを$\mathcal{U}$より生成されるC*-環の中のunimodular関数とする。問題はuが$\mathcal{U}$の中の2つの関数の商で近似出来るか？ u^2は近似出来ることがMarshallによってわかっている([5, p. 399])。

最後にSarason定理2 [16]について述べる。

<u>Sarason定理2.</u> φ_1とφ_2をinner関数で

$$\{x \in M(H^\infty + C);\ |\varphi_1(x)| < 1\} \cap \{x \in M(H^\infty + C);\ |\varphi_2(x)| < 1\} = \phi$$

とする。すると任意のQC-level set Qに対して$\varphi_1|Q$又は$\varphi_2|Q$の少なくとも一方は定数となる。ここでQC-level setとはQC関数で分離出来ないXの中の極大集合をいう。

ここで2つのinner関数が出てくるが，3つの場合はどうなるかというのがSarasonの問題である。この定理2のDouglas環への拡張もわかっていない。又この定理の応用としてbがinterpolating Blaschke積ならば

(※) $\cup\{\operatorname{supp}\mu_x ; x\in Z(b)\}$の閉包は$H^\infty$の weak peak set になっており，これは Wolff補題2の精密化に当っている。その話しを進めることによって多少QC-level set に関する情報が得られる[11]．G－S定理3とSarason定理2は今の所関係がない様に見えるが，将来は何らかの形で結びついて来る様に思われる。Sarason定理2はWolff定理1を使って示されているが，一つの応用として(※)が得られ，そしてそれより

(※※) 任意の$M(L^\infty)$の開集合はQC-level set を含む

ことが示される[6, 11]。もしこの事実がWolff定理1を使わないで示すことが出来れば，そこからWolff定理1を示すことは難かしくない。QA関数の outer factor はQA関数になることに注意すればよい。(※※)はWolff定理1からは容易に出て来そうには思われない。その意味ではWolffのQA関数の構成法は初等的である。より深く見ていくために[8, 9]から手掛りが得られるのではないかと期待する。

§5. 他の分解定理と問題.

inner関数の$H^\infty+C$の中での分解定理を考える時，G－S定理1より，Blaschke積bについて考えればよい。そこでbをBlaschke積とする。まずA-G-G-I-S定理より，

次の問題が出てくる。

問題1. $Z(I) \supset Z(b)$ なる inner 関数 I に対して，いつでも $|I| \leq |b|$ ($M(H^\infty + C)$ 上で) となる b の特長づけは何か？

A-G-G-I-S 定理より b が interpolating Blaschke 積の時は問題1の性質を持つ。よって問題は上の解答が interpolating Blaschke 積になるかである。b が interpolating でない時，問題1の条件を満たさないことをいえばよいが次の場合はわかる。

(1) $2 \leq \mathrm{Ord}_b(x) < \infty$ なる $x \in Z(b)$ が存在する時。

(2) $\{z_n\}$ を b の D 内での zero 点列とする時，$\mathrm{Ord}_b(z_n) \geq 2$.

(3) $\rho(z_n, z_m) \geq \alpha$ $\forall n \neq m$.

チェックされないで残っているのは

$$\mathrm{Ord}_b(x) = 1 \text{ 又は } \infty \quad (\forall x \in Z(b))$$

の場合である。最終的には [10] で見られる様な他の Blaschke 積の分解定理が必要に思われる。

問題2. $f \in H^\infty + C$, $x \in M(H^\infty + C)$, $\mathrm{Ord}_f(x) \geq 2$ とする。$f = f_1 f_2$, $f_i \in H^\infty + C$, $f_i(x) = 0$ と分解出来るか？

Hoffman 定理2は局所的 (fiber 上で) に分解出来ることを示している。問題は大域的に分解する所である。x が特殊な点の時，たとえば interpolating 点列 $\{z_n\}$ で $f(z_n) \to 0$ かつ $\mathrm{cl}\{z_n\} \ni x$ の時には A-G-G-I-S 定理より分解される。

この問題に関して得られている結果はない。

問題3. Iを inner 関数で, $\mathrm{Ord}_I(x)<\infty$ $(\forall x\in Z(I))$ とする。その時Iは interpolating Blaschke 積の有限個の積になる。$\mathrm{Ord}_I(x)=k$ $(\forall x\in Z(I))$ ならばIはk個の interpolating Blaschke の積で表わせるか？これは Y. Izuchi [12] によって答えは Yes である。$\mathrm{Ord}_I(x)=\infty$ $(\forall x\in Z(I))$ の時は，問題1の特殊な場合となり $I=b_1 b_2$, $Z(I)=Z(b_1)=Z(b_2)$ なる Blaschke 積 b_1, b_2 が存在するかどうかわからない（ただしIを Blaschke 積とする時）。

問題4. (Guillory-Sarason [7]). $S_1\overline{S_2}$, $\overline{S_2}S_1\in H^\infty+C$ をみたす singular inner 関数 S_1, S_2 が存在するか？

$S_1\overline{S_2}\in H^\infty+C$ となる2つの singular inner 関数の関係についてもわかっていない。§3の最後に述べたことから，S_2を固定した時 $S_1\overline{S_2}\in H^\infty+C$ となる S_1 はかなり多い。その特長づけは難かしい様に思われる。$S_1\overline{S_2}^n\in H^\infty+C$ $(\forall n)$ なるS_1の特長づけは§3からその様子は想像出来るが，きちんとした条件で与えるのにはもう少し時間が必要に思われる。問題4をみたす S_1, S_2 が見つかるとおもしろいと思う（たぶん存在しないと思う）。

References

1. S. Axler, Factorization of L^∞ functions, Ann. of Math., 106 (1977), 567–572.

2. S. Axler and P. Gorkin, Divisibility in Douglas algebras, to appear in Michigan Math. J..

3 S.-Y. Chang, A characterization of Douglas subalgebras, Acta Math., 137 (1976), 81–89.

4. R. Douglas and W. Rudin, Approximation by inner functions, Pac. J. Math. 31 (1969), 313–320.

5. J, Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press (1981).

6. P. Gorkin, Singular inner functions and division in $H^\infty + C$, preprint.

7. C. Guillory and D. Sarason, Division in $H^\infty + C$, Michigan Math. J., 28 (1981), 173–181.

8 C. Guillory and D. Sarason, The Algebra of quasicontinuous functions, preprint.

9. C. Guillory, K. Izuchi and D. Sarason, Interpolating Blaschke products and division in Douglas algebras, to appear in Proc. Royal Irish Acad..

10 K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason

and Gleason parts, Ann. of Math., 86(1967), 74–111.

11. K. Izuchi, QC-level sets and quotients of Douglas algebras, preprint.

12. Y. Izuchi, A note on interpolating Blaschke products, preprint.

13. D. Luecking, Division in Douglas algebras, Michigan Math. J., 29(1982), 307–314.

14. D. Marshall, Subalgebras of L^∞ containing H^∞, Acta Math., 137(1976), 91–98.

15. D. Sarason, Algebras of functions on the unit circle, Bull. Amer. Math. Soc., 79(1973), 286–299.

16. D. Sarason, The Shilov and Bishop decompositions of $H^\infty + C$, Conference harmonic Analy. in honor of A. Zygmund (1981), 461–474.

17 T. Wolff. Two algebras of bounded functions, Duke Math. J., 49(1982), 321–328.

18. R. Younis, Divison in Douglas algebras and some applications, preprint.