数理解析研究所講究録
第523巻 1984年 53-65

直積空間上の H^p

東北大理 佐藤秀一 (Shuichi Sato)

§1. $\mathbb{D}=\mathbb{R}_+^{n_1+1}\times\mathbb{R}_+^{n_2+1}$, $\mathbb{R}_+^{n_i+1}=\mathbb{R}^{n_i}\times(0,\infty)$, $i=1,2$, とする. $n_1=n_2=1$, または bi-disk における重調和関数に対する nontangential maximal function と面積積分の L^p-同値性は Gundy-Stein[7] で示された. ここでは一般の $\mathbb{D}$ 上の重調和関数 u に対する nontangential maximal function $N(u)$ と面積積分 $A(u)$ の L^p-同値性を §4 の定理(4.1) の形で述べ, その一つの証明を与える.

次の記号を用いる. $\mathbb{R}^{n_1+1}\times\mathbb{R}^{n_2+1}$ の元を $(x^{(1)},y_1;x^{(2)},y_2)$ $=(x_1^{(1)},\cdots,x_{n_1}^{(1)},y_1;x_1^{(2)},\cdots,x_{n_2}^{(2)},y_2)$, $(x^{(i)},y_i)\in\mathbb{R}^{n_i+1}$, $x^{(i)}=(x_1^{(i)},\cdots,x_{n_i}^{(i)})\in\mathbb{R}^{n_i}$, $y_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2$, とかく. また $(x^{(1)},y_1;x^{(2)},y_2)=(x,y)$, ここで $x=(x^{(1)},x^{(2)})$ $\in\mathbb{R}^N$ $(N=n_1+n_2)$, $y=(y_1,y_2)$ とも書く. さらに $\mathbb{R}_+^{n_i+1}=\{(x^{(i)},y_i)\in\mathbb{R}^{n_i+1}\ ;\ y_i>0\}$, $\mathbb{R}_-^{n_i+1}=$ $\{(x^{(i)},y_i)\in\mathbb{R}^{n_i+1}\ ;\ y_i<0\}$, $i=1,2$, とする.

§2、 Nontangential maximal function と面積積分の定義。

$u(x,y)$ を $\mathbb{D}$ 上の重調和関数とする。すなわち，u は2回連続微分可能で，$\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\partial^2}{(\partial x_j^{(i)})^2}u + \frac{\partial^2}{(\partial y_i)^2}u = 0$，$i=1,2$。$u$ に対して nontangential maximal function $N(u)$ と面積積分を定義する。まず，$a=(a_1,a_2)$，$a_1>0$, $a_2>0$，$x\in\mathbb{R}^N$ に対して product cone $\Gamma_a(x)$ を

$$\Gamma_a(x)=\{(z,y)\in\mathbb{D}\ ;\ |x^{(1)}-z^{(1)}|<a_1y_1,\ |x^{(2)}-z^{(2)}|<a_2y_2\}$$

で定義する。ここで $x=(x^{(1)},x^{(2)})$，$z=(z^{(1)},z^{(2)})$，$y=(y_1,y_2)$ である。$\Gamma_{(1,1)}(x)=\Gamma(x)$ とかく。そこで nontangential maximal function $N(u)$ を

$$N(u)(x)=\sup\{|u(z,y)|\ ;\ (z,y)\in\Gamma(x)\}$$

で定義する。また面積積分 $A_a(u)(x)$ を

$$A_a(u)(x)=\left(\int_{\Gamma_a(x)}|\nabla_1\nabla_2u|^2\,y_1^{1-n_1}y_2^{1-n_2}\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

で定義する。ここで $|\nabla_1\nabla_2u|^2=\sum_{j=0}^{n_1}\sum_{k=0}^{n_2}\left|\frac{\partial^2u}{\partial x_j^{(1)}\partial x_k^{(2)}}\right|^2$ ただし $x_0^{(1)}=y_1$，$x_0^{(2)}=y_2$。$A_{(1,1)}(u)=A(u)$ とかく。

§3、 共役な重調和関数からなる H^p 空間。 $u_{s,t}(x,y)$，$s=0,1,\cdots,n_1$; $t=0,1,\cdots,n_2$ を $(n_1+1)(n_2+1)$ この $\mathbb{D}$ 上の重調和関数とする。$u_{s,t}$ は次の一般化された Cauchy - Riemann の方程式を満足するとする。

(3.1) $\sum_{i=0}^{n_1} \dfrac{\partial u_{i,t}}{\partial x_i^{(1)}} = 0$, $\dfrac{\partial u_{j,t}}{\partial x_i^{(1)}} = \dfrac{\partial u_{i,t}}{\partial x_j^{(1)}}$; $0 \le i, j \le n_1$,
$t = 0, 1, \cdots, n_2$, さらに

$$\sum_{k=0}^{n_2} \frac{\partial u_{s,k}}{\partial x_k^{(2)}} = 0 , \quad \frac{\partial u_{s,l}}{\partial x_k^{(2)}} = \frac{\partial u_{s,k}}{\partial x_l^{(2)}} \ ; \quad 0 \le k, l \le n_2,$$

$s = 0, 1, \cdots, n_1$, ただし $x_0^{(1)} = y_1$, $x_0^{(2)} = y_2$.

$F(x, y)$ を (j, k)-成分 ($1 \le j \le n_1+1$, $1 \le k \le n_2+1$) が $u_{j-1,k-1}(x, y)$ である $(n_1+1) \times (n_2+1)$ 行列とする，$F(x,y) = (u_{j-1,k-1}(x,y))$. F を共役な重調和関数のシステムと呼ぶ. $|F| = (\sum_{s=0}^{n_1} \sum_{t=0}^{n_2} |u_{s,t}|^2)^{\frac{1}{2}}$, $p_0 = \max(\frac{n_1-1}{n_1}, \frac{n_2-1}{n_2})$ とする.

<u>$H_A^p(\mathbb{D})$ の定義</u>. F を共役な重調和関数のシステムとする. $p_0 < p < \infty$ に対し, $F \in H_A^p(\mathbb{D})$ とは

$$\sup_{y_1>0,\, y_2>0} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|F\|_p < \infty$$

であることとする.

さらに, $\mathbb{D}_{+-} = \mathbb{R}_+^{n_1+1} \times \mathbb{R}_-^{n_2+1}$, $\mathbb{D}_{-+} = \mathbb{R}_-^{n_1+1} \times \mathbb{R}_+^{n_2+1}$, $\mathbb{D}_{--} = \mathbb{R}_-^{n_1+1} \times \mathbb{R}_-^{n_2+1}$ とし $H_A^p(\mathbb{D}_{+-})$, $H_A^p(\mathbb{D}_{-+})$, $H_A^p(\mathbb{D}_{--})$ を $H_A^p(\mathbb{D})$ に類似して定義する.

§4. 定理.

<u>(4.1) 定理.</u> $u(x,y)$ を $\mathbb{D}$ 上の重調和関数とする. $U(x,y)$ を $(1,1)$-成分が $u(x,y)$ で, その他の成分がすべ

て 0 である $(n_1+1)\times(n_2+1)$ 行列値関数とする．このとき $p_0<p<\infty$ に対して次の3つの性質は同値である．

(1) $N(u)\in L^p(\mathbb{R}^N)$.

(2) $u(x,y)\to 0$, as $y_1+y_2\to\infty$ かつ $A(u)\in L^p(\mathbb{R}^N)$.

(3) 4つの行列値関数 $F_{++}\in H^p_A(\mathbb{D})$, $F_{+-}\in H^p_A(\mathbb{D}_{+-})$, $F_{-+}\in H^p_A(\mathbb{D}_{-+})$, $F_{--}\in H^p_A(\mathbb{D}_{--})$ が存在して

$$U(x,y)=F_{++}(x,y)+F_{+-}(x,y_1,-y_2)+F_{-+}(x,-y_1,y_2)+F_{--}(x,-y_1,-y_2)\quad,\quad (x,y)\in\mathbb{D}$$

とかける．

さらに $\|N(u)\|_p\approx\|A(u)\|_p$.

<u>注意</u>、上の定理は H^p_A の定義を適当にすることにより $0<p<\infty$ で成り立つ．特に $\|N(u)\|_p\approx\|A(u)\|_p$, $0<p<\infty$．以下で $(1)\Rightarrow(2)$ は $0<p<2$ について示す．

§5. $(1)\Rightarrow(2)$ の証明．$P_y(x)=P_1(x^{(1)},y_1)P_2(x^{(2)},y_2)$ とする．ここで $P_i(x^{(i)},y_i)=c_{n_i}\dfrac{y_i}{(|x^{(i)}|^2+y_i^2)^{\frac{n_i+1}{2}}}$

は $\mathbb{R}^{n_i+1}_+$ にふずいした Poisson 核である．$f\in L^2(\mathbb{R}^N)$ に対して $P(f)(x,y)=P_y*f(x)=\int_{\mathbb{R}^N}f(x-z)P_y(z)\,dz$

とする． $0<p<2$ に対して $(1)\Longrightarrow(2)$ は次の定理からわかる． $P\geq 2$ については省略する．

<u>(5.1) 定理.</u> $u(x,y)=P_y*f(x)$ $f\in L^2(\mathbb{R}^N)$ とする．このとき

(5.2) $$|\{x\in\mathbb{R}^N;\ A(u)(x)>\alpha\}|\leqq c\left(|\{x\in\mathbb{R}^N: N(u)(x)>\alpha\}|+\frac{1}{\alpha^2}\int_{N(u)\leq\alpha}N^2(u)(x)dx\right),\ \forall\alpha>0$$

が成り立つ．

<u>注意.</u> $n_1=n_2=1$，または bidisk の時は [7] で示された． 以下では [7] よりかんたんな証明を与える．

<u>定理 (5.1) の証明.</u> $u(x,y)=P_y*f(x)$， f は実数値としてよい、 $E=\{x\in\mathbb{R}^N: N(u)(x)\leq\alpha\}$ $(\alpha>0)$ とする． $0<\delta<\frac{1}{2}$ とするとき次がなり立つ (cf. [7])．

<u>(5.3) Lemma.</u> E の部分集合 E^* が存在して

$$\inf_{z\in E^*}\ \inf_{(x,y)\in\Gamma(z)} P(\chi_E)(x,y)\geq 1-\delta,$$

$$|CE^*|\leq c|CE|$$

が成り立つ． ここで CE^* は E^* の補集合である．

$\phi\in C^\infty(\mathbb{R})$ を $\phi(t)=1$， $t\geq 1-\delta$； $\phi(t)=0$，

$1-2\delta \geq t$; $|\phi^{(j)}(t)|^2 \leq c\ \phi(t)$ $t \in \mathbb{R}$, $j=1,2$,
をみたすものとする（cf. [8]）. Lemma (5.3) により

(5.4) $$\int_{E^*} A^2(u)(z)\,dz \leq c \int y_1 y_2\, \phi(v)\, |\nabla_1 \nabla_2 u|^2 dx\,dy = c\,I,$$

ここで $v = P(\chi_E)$. 次に

(5.5) $$I_\varepsilon = \int y_1 y_2\, \phi(v_\varepsilon)\, |\nabla_1 \nabla_2 u_\varepsilon|^2\, dx\,dy$$

とおく. ここで $v_\varepsilon(x,y) = P(\chi_E)(x, y_1+\varepsilon, y_2+\varepsilon)$, $u_\varepsilon(x,y) = u(x, y_1+\varepsilon, y_2+\varepsilon)$.

グリーンの定理により（部分積分により）

(5.6) $$\int y_1 y_2\, \Delta_1(\phi(v_\varepsilon)\, |\nabla_2 u_\varepsilon|^2)\, dx\,dy = \int y_2\, \phi(v_\varepsilon) |\nabla_2 u_\varepsilon|^2\, dx\,dy_2 = J_\varepsilon$$

最後の積分で積分は $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2+1}_+$ でなされる. 以後, 上記のような書き方をする. 一方,

(5.7) $$\Delta_1(\phi(v_\varepsilon)\, |\nabla_2 u_\varepsilon|^2) = \phi''(v_\varepsilon)\, |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 |\nabla_2 u_\varepsilon|^2 + 2\phi(v_\varepsilon)\, |\nabla_1 \nabla_2 u_\varepsilon|^2 + O(|\phi'(v_\varepsilon)|\, |\nabla_1 w_\varepsilon|\, |\nabla_1 \nabla_2 u_\varepsilon|\, |\nabla_2 u_\varepsilon|),$$

ここで $w_\varepsilon(x,y) = P(\chi_{cE})(x, y_1+\varepsilon, y_2+\varepsilon)$, また (5.6), (5.7) で一般に D 上の重調和関数 u に対して $|\nabla_i u|^2 = \sum_{j=1}^{n_i} |\frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}} u|^2 + |\frac{\partial}{\partial y_i} u|^2$ である.

次に δ' を δ より大きい正の数として, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ を $\psi(t) = 0$, $t \leq 1-2\delta'$; $\psi(t) > 0$, $t > 1-2\delta'$;

$|\psi^{(j)}(t)|^2 \leq c\,\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $j=1,2$; $\psi \leq 1$, をみたすようにとる。 この時

$$|\phi^{(j)}(t)| > 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(t) \geq c \ (>0) \qquad (j=1,2)$$

となるような $c>0$ が存在する. この事実を以後用いる. $K_\varepsilon = \int y_1 y_2\, \psi(v_\varepsilon)\, |\nabla_1 w_\varepsilon|^2\, |\nabla_2 u_\varepsilon|^2\, dx\,dy$ とおく.
(5.6) と (5.7) により Schwarz の不等式を用いると

(5.8) $\qquad I_\varepsilon \leq c\,(J_\varepsilon + K_\varepsilon + I_\varepsilon^{\frac{1}{2}} K_\varepsilon^{\frac{1}{2}})$

を得る. 次の 2つの Lemma を仮定する.

<u>(5.9) Lemma.</u> $\quad J_\varepsilon \leqq c\,(\int \phi(v_\varepsilon)\, u_\varepsilon^2\, dx + \alpha^2 \int w_\varepsilon(x,0)^2 dx)$

<u>(5.10) Lemma.</u> $\quad K_\varepsilon \leqq c\,\alpha^2 \int w_\varepsilon(x,0)^2\, dx$.

(5.8) と Lemma (5.9), (5.10) により

(5.11) $\qquad I_\varepsilon \leqq c\,(\int \phi(v_\varepsilon)\, u_\varepsilon^2\, dx + \alpha^2 \int w_\varepsilon(x,0)^2\, dx)$

を得る. かんたんに, $\varepsilon \to 0$ のとき.

$$\int \phi(v_\varepsilon)\, u_\varepsilon^2\, dx \to \int_E f^2(x)\, dx, \quad \int w_\varepsilon(x,0)^2 dx \to |CE|$$

がわかる. よって (5.11) において $\varepsilon \to 0$ として

(5.12) $\qquad I \leqq c\,(\int_E N^2(u)(x)\, dx + \alpha^2 |CE|)$

を得る. (5.2) は (5.12) と Lemma (5.3) からわかる

q.e.d.

次に Lemma (5.9) と (5.10) を証明する.

Lemma (5.9) の証明. グリーンの定理により

(5.13) $\int y_2\, \Delta_2(\phi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2)\, dx dy_2 = \int \phi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2\, dx$

一方

(5.14) $\Delta_2(\phi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2) = \phi''(v_\varepsilon) |\nabla_2 w_\varepsilon|^2 u_\varepsilon^2 +$
$2\phi(v_\varepsilon) |\nabla_2 u_\varepsilon|^2 + O(|\phi'(v_\varepsilon)|\, |\nabla_2 w_\varepsilon| |u_\varepsilon|\, |\nabla_2 u_\varepsilon|)$.

$L_\varepsilon = \int y_2 \psi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2 |\nabla_2 w_\varepsilon|^2\, dx dy_2$ とおく. (5.13), (5.14) と Schwarz の不等式から

(5.15) $J_\varepsilon \leqq c\left(\int \phi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2 dx + L_\varepsilon + J_\varepsilon^{\frac{1}{2}} L_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right)$

を得る. ここで δ' を十分小さくとると

$$\sup\{ |u_\varepsilon(x, y)| \,;\, \psi(v_\varepsilon(x, y)) \neq 0 \} \leqq \alpha$$

がいえる. したがって

(5.16) $L_\varepsilon \leqq \alpha^2 \int y_2 |\nabla_2 w_\varepsilon|^2\, dx dy_2 = c\alpha^2 \int w_\varepsilon(x, 0)^2 dx$.

(5.15) と (5.16) により Lemma の証明をおわる. q.e.d.

Lemma (5.10) の証明. グリーンの定理により

(5.17) $\int y_1 y_2\, \Delta_2(\psi(v_\varepsilon) |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 u_\varepsilon^2)\, dx dy$
$\leqq \alpha^2 \int y_1 \psi(v_\varepsilon) |\nabla_1 w_\varepsilon|^2\, dx dy_1$
$\leqq c\alpha^2 \int w_\varepsilon(x, 0)^2\, dx$.

ところで一方.

(5.18) $\Delta_2(\psi(v_\varepsilon) |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 u_\varepsilon^2) = \psi''(v_\varepsilon) |\nabla_2 w_\varepsilon|^2 |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 u_\varepsilon^2$
$+ 2\psi(v_\varepsilon) |\nabla_1 \nabla_2 w_\varepsilon|^2 u_\varepsilon^2 + 2\psi(v_\varepsilon) |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 |\nabla_2 u_\varepsilon|^2 +$

$O(|\psi'(v_\varepsilon)|\,|\nabla_2 w_\varepsilon|\,|\nabla_1 w_\varepsilon|\,|\nabla_1\nabla_2 w_\varepsilon|\,|u_\varepsilon|^2 + |\psi'(v_\varepsilon)|\,|\nabla_2 w_\varepsilon|$
$\times|\nabla_1 w_\varepsilon|^2|u_\varepsilon|\,|\nabla_2 u_\varepsilon| + |\psi|\,|\nabla_1 w_\varepsilon|\,|\nabla_1\nabla_2 w_\varepsilon|\,|u_\varepsilon|\,|\nabla_2 u_\varepsilon|)$.

そこで
$$M_\varepsilon = \int y_1 y_2 |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 |\nabla_2 w_\varepsilon|^2 dx dy,$$
$$N_\varepsilon = \int y_1 y_2 |\nabla_1\nabla_2 w_\varepsilon|^2 dx dy$$
とする。(5.17) と (5.18) により Schwarz の不等式を用いて

$$(5.19)\quad K_\varepsilon \leqq c\,(\alpha^2\int w_\varepsilon(x,0)^2 dx + \alpha^2 M_\varepsilon + \alpha^2 N_\varepsilon + \alpha^2 M_\varepsilon^{\frac12} N_\varepsilon^{\frac12} + \alpha K_\varepsilon^{\frac12} M_\varepsilon^{\frac12} + \alpha K_\varepsilon^{\frac12} N_\varepsilon^{\frac12}).$$

よういに $N_\varepsilon = c\int w_\varepsilon(x,0)^2 dx$, $M_\varepsilon \leq c\int w_\varepsilon(x,0)^2 dx$ がわかるので (5.19) により
$$K_\varepsilon \leqq c\,\alpha^2 \int w_\varepsilon(x,0)^2 dx$$
がしたがう。 q.e.d.

§6. (3) ⇒ (1).

<u>(6.1) Lemma.</u> $F \in H^p_A(D)$ $(p_0 < p < \infty)$ とする。
$N(|F|)(x) = \sup\{|F(z,y)|\,;\,(z,y)\in\Gamma(x)\}$ とすると
$$\|N(|F|)\|_p \approx \|F\|_p .$$

この Lemma は $|F|^{p_0}$ が bisubharmonic であることからわかる。

(3) ⇒ (1) は Lemma (6.1) からわかる。

§7. (2) ⇒ (3).

$u(x,y) = P_y * f(x)$, $f \in L^2(R^N)$,

とする. この形のuに対してだけ (2)⇒(3) を示す.

$R_s^{(1)}$ を $\mathbb{R}^{n_1}$ 上の s-th Riesz 変換, $R_t^{(2)}$ を $\mathbb{R}^{n_2}$ 上の t-th Riesz 変換 ($s=1,2,\cdots,n_1$; $t=1,2,\cdots,n_2$) とする.

$$u_{s,t}(x,y)=P_y*R_s^{(1)}R_t^{(2)}f(x),\quad u_{s,0}(x,y)=P_y*R_s^{(1)}f(x),$$
$$u_{0,t}(x,y)=P_y*R_t^{(2)}f(x),\quad u_{0,0}(x,y)=u(x,y)$$

$s=1,2,\cdots,n_1$; $t=1,2,\cdots,n_2$ とする.

Fを (j,k)-成分が $u_{j-1,k-1}(x,y)$ ($j=1,\cdots,n_1+1$; $k=1,\cdots,n_2+1$) である $(n_1+1)\times(n_2+1)$ 行列値関数とする. $F\in H_A^p(\mathbb{D})$ を示す. Fの定義から, Fは共役な重調和関数のシステムであることは明らかである.

次の Lemmaを必要とする

(7.1) Lemma. $v(x,y)=P_y*g(x)$, $g\in L^2(\mathbb{R}^N)$ とする. この時 $0<p<\infty$ に対して

$$\sup_{y_1,y_2>0}\int_{\mathbb{R}^N}|v(x,y)|^p dx\leq c\,\|A_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(v)\|_p^p.$$

(7.2) Lemma. $A_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(u_{s,t})(x)\leqq c\,A(u)(x)$,

$s=0,\cdots,n_1$, $t=0,\cdots,n_2$.

Lemma (7.1) は [10, P. 213], Lemma (7.2) は [7, Lemma 1] とそれぞれ同様に示すことができる.

Lemma (7.1), (7.2) により, $F \in H^p_A(\mathbb{D})$ であり, $\|F\|_p \leqq C\,\|A(u)\|_p$. 次に F_{++}, F_{+-}, F_{-+}, F_{--} を定義する. そのために F をブロック形に書く.

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$$

ここで F_1, F_2, F_3, F_4 はそれぞれ 1×1, $1\times n_2$, $n_1\times 1$, $n_2\times n_2$ 行列である. そこで $F_{++}(x,y)=\frac{1}{4}F(x,y)$,

$$F_{+-}(x,y)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} F_1(x,y_1,-y_2) & -F_2(x,y_1,-y_2) \\ F_3(x,y_1,-y_2) & -F_4(x,y_1,-y_2) \end{pmatrix},$$

$$F_{-+}(x,y)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} F_1(x,-y_1,y_2) & F_2(x,-y_1,y_2) \\ -F_3(x,-y_1,y_2) & -F_4(x,-y_1,y_2) \end{pmatrix},$$

$$F_{--}(x,y)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} F_1(x,-y_1,-y_2) & -F_2(x,-y_1,-y_2) \\ -F_3(x,-y_1,-y_2) & F_4(x,-y_1,-y_2) \end{pmatrix}$$

とおくと, F_{++}, F_{+-}, F_{-+}, F_{--} は条件をみたす.

文献

1. A. P. Calderón and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution,

Advances in Math. 16 (1975), 1–64.

2. S. Y. A. Chang, Carleson measure on the bi-disc, Ann. of Math. 109 (1979), 613–620.

3. S. Y. A. Chang and R. Fefferman, A continuous version of duality of H^1 with BMO on the bidisc, Ann. of Math. 112 (1980), 179–201.

4. C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 138–193.

5. R. Fefferman, Bounded mean oscillation on the polydisk, Ann. of Math. 110 (1979), 395–406.

6. R. F. Gundy, Inégalités pour martingales à un et deux indices: L'espace H^p, Lecture Notes in Math. 774, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1980.

7. R. F. Gundy and E. M. Stein, H^p theory for the poly-disc, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 76 (1979), 1026–1029.

8. M. P. Malliavin and P. Malliavin, Intégrales de Lusin-Calderón pour les fonctions

biharmoniques, Bull. Sci. Math. 101 (1977), 357-384.

9. E. M. Stein, A variant of the area integral, Bull. Sci. Math. 103 (1979), 449-461.

10. E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1971.

11. E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1971.

12. A. Zygmund, Trigonometric series, I and II, Cambridge Univ. Press, 1959.

13. S. Sato, Lusin functions and nontangential maximal functions in the H^p theory on the product of upper half-spaces.