数理解析研究所講究録
第 523 巻 1984 年 66-75

PW型リーマン面上のHardy族について — 不変部分空間定理が成立する場合としない場合

北大 理　林 実樹広
(Mikihiro Hayashi)

1．Rを平面領域，又は定数でない有界正則関数をもつようなリーマン面とする．以下では，平面領域と限ってもほぼ十分であるから，単に領域と呼ぶことにする．領域Rが単位円$\{|z|<1\}$の場合，Hardy族$H^p(R)$の（弱＊）閉不変部分空間M（本講では，$H^\infty(R)$-加群のことをこう呼ぶ）は，内部関数gを用いて，

(1.1)　　$M = gH^p(U)$

と表わされる．これは$p=2$の場合に，ヒルベルト空間上の作用素の不変部分空間を考察してBeurlingが与えた結果である．Rが多重連結な領域とした場合，$H^p(R)$の不変部分空間Mの最大共通内部因子をgとすると，

(1.2)　　$M \subseteq gH^p(R, \gamma_g^{-1})$

となることはすぐわかる．ここで，内部関数gは一般には多価であり，γ_gはgの周期である．$H^p(R,\gamma_g^{-1})$は多価H^p関数の族で内部関数gと逆の周期をもつもの全体である．gと$H^p(R,\gamma_g^{-1})$の元の周期が互いに打消し合って$gH^p(R,\gamma_g^{-1})$が

1価となり，$H^p(R)$ の不変部分空間を構成することに注意したい．領域 R が有限連結の場合，(1.2) で等号が成立することは 60 年代に示めされている．70 年代になって，Neville[7] により，ある種の無限領域の場合には (1.2) で等号となることが示めされ，その結果は，荷見 [2, 3], Neville [8] によって更に拡張された．同じ頃，Widom は次の性質をみたす領域 R の特徴付けを与えていた ([9, 10])

(1.3)　すべての周期 γ について，$H^\infty(R, \gamma)$ が 0 以外の元を含む．

リーマン球と全平面という特殊な場合を除けば，(1.3) から $H^\infty(R)$ が定数でない元を含むことがすぐにでる．($\because$ $H^\infty(R,\gamma)\ H^\infty(R,\gamma^{-1}) \subseteq H^\infty(R)$)．また，Neville，荷見等により考えられた領域も (1.3) をみたすものであった．年代が逆になるが，50 年代に Parreau は次の条件を満す領域を考えている．$G(z, \zeta)$ を R 上の Green 関数，1 点 ⓪ を固定して，

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(G(z,0) + i\, {}^*G(z,0)\right) \quad , \text{但 } {}^* \text{は共役調和関数},$$

の零点を a_n，その位数を c_n としたとき

(1.4)　$\sum_n c_n G(0, a_n) < \infty$

が成立する．Widom による (1.3) の特徴付けにはこの (1.4) が現われる．厳密に云えば，(1.3) と (1.4) の間には相異があるが，

本質的に同値であることが，荷見［3］により示されている．以下では，(1.3)と(1.4)を区別せずこれらをみたす領域をParreau-Widom型（略して，PW型）と呼ぶことにする．（注：領域Rが双曲型で，ポテンシャル論的に正則な場合には(1.3)と(1.4)は同値である）．

さて問題は，PW型で一般に(1.2)において等号が成立するかどうかである．以下で，必ずしも等号の成立しない場合があることを示す．同じ例で，F. and M. Rieszの定理の拡張も成立しないこともわかるので合せて述べることにする．

2. 上で用いた記号の定義を述べておく．領域Rの中に1点Oを固定する．Oを基点とする基本群を$\pi_1(R)$，$\pi_1(R)$から$\mathbb{T}=\{e^{i\theta}:\ 0\leq\theta<2\pi\}$への群準同型（characterと呼ぶ）を$\pi_1(R)^*$で表わす．$R$上の多価有理型関数で，$|f|$が1価となるものの周期は$\pi_1(R)^*$の元を用いて完全に記述できる．すなわち，点$O$における関数要素$f_O$を決めて，$f$を$f_O$の解析接続全体とみなす．$O$を起点とする閉曲線$C$に沿った$f_O$の解析接続を$f_C$とすると

$$f_C = \gamma_f(C)\, f_O \tag{2.1}$$

という関係がある．ここで，$\gamma_f \in \pi_1(R)^*$で，fによって決まるcharacterである．前節で述べた，内部関数gの周期γ_g

とはこの character のことである．$\gamma \in \pi_1(R)^*$ を与えたときに，γ を character とする多価関数 f で，

(2.2) $|f|^p \leq {}^\exists u$，　u：調和　$(0<p<\infty)$

$|f|$ が有界　$(p=\infty)$

となるもの全体を $H^p(R,\gamma)$ で表わす．

$$\|f\|_p = \inf\{\, u(0)^{1/p} : u \text{ は } (2.2) \text{ をみたす} \}$$

とおくと，これは $H^p(R,\gamma)$ の p-norm になる．R が単位円のときは，0 として原点を取れば，普通の H^p-norm に一致する．

3．はじめに述べた領域 R は次のようにして作る．単位円 $U=\{|z|<1\}$ に含まれ，原点に収束するような閉円板の列

$$\Delta_n = \{z : |z-\alpha_n| < r_n\}$$

で，互いに共通分をもたないものを考える．

$$R = U - \{0\} - \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$$

とおいて，α_n, r_n を適当にとることにより

(3.1) R は PW 型

(3.2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{\alpha_n} < \infty$

を満すものを作くれば目的は達成されたことになる．実際，

$$M = \{ f \in H^\infty(R) : f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z}\,dz = 0 \}$$

とおくと，M は $H^\infty(R)$ の弱*閉イデアルとなることが (3.1)に

より保障される．また，Mの最大共通内部因子をgとすると$g \equiv$ const．となる．これは，仮に$g \not\equiv$ const とすると，原点が極大イデアル空間の中で弱＊開 analytic disc W の中心となることがいえる．$\hat{z}$がW上定数でないことはすぐわかるので，正則関数が開写像ということより$\hat{z}(W)$は$z=0$の近傍を含むことになり事実に反する．従って，Mは(1.2)で等号の成立しない不変部分空間である．

α_n，r_nの選び方であるが，収束級数$\sum d_n < \infty$ $(0<d_n<1)$を1つ固定する．次に$\alpha_n = 2^{-\nu_n}$ (ν_n：自然数の増加列)，$r_n = d_n \alpha_n$とおく．ν_nが十分速く発散するとRがPW型になることがいえる．一方(3.2)はν_nのとり方によらない．

RがPW型であることを示すには次のようにする．

$$I_n = [\alpha_n - r_n, \alpha_n + r_n]$$

とおき，

$$\tilde{R} = S^2 - \{0\} - \bigcup_n I_n \qquad (S^2:\text{リーマン球})$$

という補助的な領域を考える．$R \subset \tilde{R}$であることから，$\tilde{R}$がPW型ならRもPW型となることが(1.3)により示せる．$\tilde{R}$を考えたのは，$\tilde{R}$上のGreen関数は具体的に書くことができるためである．これを評価して$\nu_1 \to \infty$，$\nu_2 \to \infty$，$\nu_3 \to \infty$のとき，

$$\sum \tilde{G}(\infty, a_n) \to 0$$

が示めせる．従って，Perreauの条件（1.4）が満たされる．くわしい計算については［6］．

上の作り方において，更に p_n という非減少自然数列で

(3.3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

という性質をみたすものであれば，$r_n = d_n \alpha_n^{p_n}$ とおいても R がPW型になることが示めせる．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n / \alpha_n^{p_k} < \infty \quad , \quad \forall p_k$$

をみたす．$p_n = 1/\log(1+\frac{1}{n})$ とすれば（3.3）をみたしており $p_n \to \infty$ $(n\to\infty)$ であるから，$z=0$ における k 階の点微分

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz$$

はすべて有界となる．

$$J_\infty = \{ f \in H^\infty(R) : f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{for all } k \}$$

とおくと，J_∞ は 0 でない ideal で，J_∞ の最大共通内部因子は定数となることが示めせる．従って，（1.2）における包含関係は J_∞ については余次元が無限大になっている．

4．（1.2）でつねに等号が成立しているPW型の領域ではF. and M. Rieszの定理の一般化が示めせる（［4］）．

領域 R がPW型のときは，$H^\infty(R)$ のシロフ境界 $Ш(R)$ はリーマン面の理想境界でいうWienerの調和境界 $\Gamma_w(R)$ と一致する．$\Gamma_w(R)$ 上には調和測度と呼ばれる確率測度 ω_z があって，

R 上の有界調和関数はすべて

(4.1) $$u(z) = \int_{\text{Ш}(R)} u(b)\, d\omega_z(b)$$

と表わすことができる．ω_z はすべての $z \in R$ について互いに絶対連続なので，

$$P_z(b) = \frac{d\omega_z}{d\omega_0}(b)$$

とおくと，これは単位円でいうポアソン核に対応している．

F. and M. Riesz の定理の一般化は次のように述べられる．

(4.2) μ を $H^\infty(R)$ に直交する Ш(R) 上の測度とすれば，μ の Lebesgue 分解 $\mu = \mu_a + \mu_s$, $\mu_a \ll \omega_0$, $\mu_s \perp \omega_0$ に対して，μ_a も μ_s も $H^\infty(R)$ に直交する．

前節で与えた例ではこの性質も成り立たない．実際，

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z}\, dz$$

で与えられる測度を Ш(R) 上に lift したものを μ_a とすると，μ は ω_0 に関して絶対連続である．一方

$$\mu_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_n} \frac{f(z)}{z - a_n}\, dz$$

で与えられる測度を Ш(R) へ lift して，その弱*集積点の一つを μ_s とすると，μ_s が $z = 0$ における（複素）表現測度となることが，次のようにしてわかる：まず $f(z)$ を

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(w)}{w-z}\,dw-\sum_k\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_k}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$=f_0(z)-\sum_k f_k(z)$$

と分解する（[1]）. 留数定理により

$$\mu_n(f)=f_0(\alpha_n)-\sum_{k\neq n}f_k(\alpha_n)$$

となる. よって

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=f_0(0)-\sum_k f_k(0)=f(0).$$

μ_s の台は $\hat{z}^{-1}(0)\cap Ш(R)$ 上にあり, $\omega_0(\hat{z}^{-1}(0))=0$ であるから, $\mu_s\perp\omega_0$. よって, $\mu=\mu_a-\mu_s$ は $H^\infty(R)$ に直交するが, μ_a, μ_s は直交しない.

5. Widom は次の関数を考えた.

$$m^p(\gamma)=\sup\{|f(0)|:\ f\in H^p(R,\gamma),\ \|f\|_p\le 1\}.$$

領域 R が PW 型なら

(5.1) $\quad\inf\{m^p(\gamma):\ \gamma\in\pi_1(R)^*\}>0$

となることを示している. 更に, $\pi_1(R)^*$ はコンパクト・アーベル群 $\mathbb{T}^d$（d は高々可算濃度）に同型であるので, この位相で $\pi_1(R)^*$ を位相空間と考えれば, $m^\infty(\gamma)$ が連続という条件が意味をもつ. この条件も Widom が導入したものだが, PW 型の場合には, (1.2) で等号が成立することと, $m^\infty(\gamma)$ が連続となることは本質的に同値であることが示されている.

([5])．従って，先に述べた例では $m^{\infty}(\gamma)$ も連結でない．

最後に，まだ未解決と思われる問題をあげておきます．

(5.2)　$H^{\infty}(R)$ は H^{p} で dense?

(5.3)　$w \in L^{1}(\alpha)$, $w \geqq 0$ のとき

$$\inf_{f \in H_0^{\infty}(R)} \int |1-f|^{p} w \, d\alpha = \left(\frac{1}{m^{p}(\gamma_{w/p})} \right)^{p} \exp\left(\int \log w \, d\alpha \right) ?$$

(5.4)　$I(R) \neq H^{\infty}(R)$ ならば常に $\dim H^{\infty}(R)/I(R) = \infty$?

(5.5)　$I(R)$ と $H^{\infty}(R)$ の間にある弱*閉不変部分空間全体と $g\underline{H}^{p}(R, \gamma_g^{-1})$ と $gH^{p}(R, \gamma_g^{-1})$ の間にある（弱*）閉不変部分空間との間には，包含関係を保つような 1 : 1 対応があるか?

はじめの2つは，R が PW 型で (1.2) で等号が成立していれば成立することはわかっている（[4]）．一般の PW 型の領域で成立するかどうか興味ある．後の2つについては記号の意味を説明する．$I(R)$ は $H^{\infty}(R)$ に含まれるイデアルで，その最大共通内部因子が定数という性質をもつもののうち最小のものである．その存在はわかっている．$\underline{H}^{p}(R, \gamma_g^{-1})$ は $I(R)H^{p}(R, \gamma_g^{-1})$ の closed linear span である．

最近，荷見先生による Lecture Note が Springer から出ましたので，興味ある方はそちらも参考になることと思います．
([11]).

1. M. Behrens, The corona conjecture for a class of infinitely connected domains, Bull. Amer. Math. Soc. 76(1970), 387-391.

2. M. Hasumi, Invariant subspaces on open Riemann surfaces, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 24,4 (1974), 240-255.

3. ______ , Invariant subspaces on open Riemann surfaces, II, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 26,2 (1976), 273-299

4. M. Hayashi, Szegö's theorem on Riemann surfaces, Hokkaido Math. J. 10(1981) Sp., 242-253.

5. ______ , Invariant subspaces on Riemann surfaces of Parreau-Widom type, Trans. Amer. Math. Soc. 279(1983), 737-757.

6. _____, An example of a domain of Parreau-Widom type, to appear.

7. C.W. Neville, Invariant subspaces on Hardy classes on infinitely connected plane domains, Bull. Amer. Math. Soc. 78(1972), 857-860.

8. ______ , Invariant Subspaces of Hardy Classes on Infinitely Connected Open Surfaces, Memoirs Amer. Math. Soc. Number 160, 1975.

9. H. Widom, The maximum principle for multiple-valued analytic functions, Acta Math. 126(1971), 63-82.

10. ______ , H_p sections of vector bundles over Riemann sufaces, Ann. of Math. 94 (1971), 305-324.

11. M. Hasumi, Hardy Classes on Infinitely Connected Riemann Surfaces, LNM #1027, 1983, Springer-Verlag.