数理解析研究所講究録
第523巻1984年76-85

平面領域上のcorona問題について

京大理　成田淳一郎（Junichiro Narita）

平面領域（又は開集合）上のcorona問題及びGamelin定数に関して，Gamelin，Behrens等の結果に基づき，若干の改良を加えて報告します。

1．Dを複素平面の開集合とし，$H^\infty(D)$の極大ideal空間を$\mathcal{M}(D)$で表わす。point evaluationsにより$D \subset \mathcal{M}(D)$とみなし，

corona問題：Dは$\mathcal{M}(D)$で稠密であるか？

を考える。稠密であるときにcorona定理が成り立つと言う。corona問題に関連してGamelin[5]は次の定数を導入した（以下Gamelin定数と呼ぶ）。

平面開集合D，$m \in \mathbb{N}$，$\delta > 0$に対し$C(D,m,\delta)$を次の性質を満たす最小の定数とする。

$$\left\{\begin{array}{l} f_1, \cdots f_m \in H^\infty(D) \text{ が } \|f_j\| \leq 1 \ (j=1,\cdots,m),\ |f_1|+\cdots+|f_m| \geq \delta \text{ on } D \\ \text{を満たせば，} f_1 g_1 + \cdots + f_m g_m = 1 \text{ on } D,\ \|g_j\| \leq C(D,m,\delta) \end{array}\right.$$

$\Big\rvert$ $(j=1,\cdots,m)$を満たす $g_1,\cdots,g_m\in H^\infty(D)$ が存在する。

ただし存在しないときは $C(D,m,\delta)=+\infty$ とおく。

各 $m\in\mathbb{N}$, $\delta>0$ に対して $C(D,m,\delta)<+\infty$ ならば D は $\mathcal{M}(D)$ で稠密であるが，逆はわかっていない。ここでは Gamelin [5] の結果の改良として，ある種の平面開集合の族に対する $C(\cdot,m,\delta)$ の有限性（有界性）を示す。Behrens [1] の結果と組み合わせると corona 問題自体に関しても新しい結果が得られる。

2．$\{D_n\}_{n=1}^\infty$ を平面開集合の列で，ある有界集合にすべて含まれているものとする。$\{D_n\}_{n=1}^\infty$ の formal disjoint union を $\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n\times\{n\})$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n\times\{n\})$ 上の有界関数で各 $D_n\times\{n\}$ 上正則なものの全体を $H^\infty(\{D_n\})$ で表わす。$H^\infty(\{D_n\})$ も sup norm に関する Banach 環とみなし，その極大 ideal 空間を $\mathcal{M}(\{D_n\})$ と書く。$\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n\times\{n\})$ 上の"座標関数" $Z\in H^\infty(\{D_n\})$ を $Z(\lambda,n)=\lambda$ $(\lambda\in D_n)$で定義する。

point evaluations により $\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n\times\{n\})\subset\mathcal{M}(\{D_n\})$ とみなすことにより，これらに対しても同様に corona 問題を考えることが出来るが，Gamelin [5] の平面開集合の corona 問題に関する localization principle 同様，$\mathcal{M}(\{D_n\})$に対しても Z に関して次の localization principle が成り立つ。

定理1　$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を上記の通り，Uを別の平面開集合とする．restriction map　$H^{\infty}(\{D_n\}) \longrightarrow H^{\infty}(\{D_n \cap U\})$　により自然な連続写像　$\Phi: \mathcal{M}(\{D_n \cap U\}) \longrightarrow \mathcal{M}(\{D_n\})$　が誘導され，この写像で $\mathcal{M}(\{D_n \cap U\}) \cap \hat{Z}^{-1}(U)$　と　$\mathcal{M}(\{D_n\}) \cap \hat{Z}^{-1}(U)$ は同相に対応している。特に　$\varphi \in \mathcal{M}(\{D_n \cap U\}) \cap \hat{Z}^{-1}(U)$　に対し，

$$\varphi \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}((D_n \cap U) \times \{n\})} \quad \text{in} \quad \mathcal{M}(\{D_n \cap U\})$$

$$\iff \Phi(\varphi) \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n \times \{n\})} \quad \text{in} \quad \mathcal{M}(\{D_n\}) \quad .$$

まず次の補題を示す。

補題1　$F \in H^{\infty}(\{D_n\})$　に対し，各 $F(\cdot, n)$ を D_n の外では 0 として $\mathbb{C}$ まで拡張する。このとき，関数列 $\{F(\cdot, n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\zeta \in \mathbb{C}$ で同等連続かつ $F(\zeta, n) = 0$　$(n = 1, 2, \cdots)$ ならば，$\hat{F} = 0$ on $\hat{Z}^{-1}(\{\zeta\})$ である。

証明　g_m を $\Delta(\zeta, \frac{1}{m}) = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z - \zeta| < \frac{1}{m}\}$ 内にコンパクトな台を持つ C^1 関数で，ζ のある近傍で 1，$\|\frac{\partial g_m}{\partial \bar{z}}\|_{\infty} \leq 4m$　を満たすものとする。$F(\cdot, n)$ を上記のように拡張し，

$$(T_{g_m}F)(w, n) = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{F(z, n) - F(w, n)}{z - w} \frac{\partial g_m}{\partial \bar{z}} dx\,dy \,, \quad w \in \mathbb{C},\ z = x + iy$$

とおくと各nに対し，

- $T_{g_m}F(\cdot, n)$ は D_n 及び $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}\, g_m$ で正則

。$F(\cdot, n) - (I_{g_m}F)(\cdot, n)$ は $g_m = 1$ な開集合上で正則

。任意の $w \in \mathbb{C}$ に対し

$$|(I_{g_m}F)(w, n)| \leqq \frac{2}{\pi} \left\| \frac{\partial g_m}{\partial \bar{z}} \right\|_\infty \sup\{ |F(z, n) - F(z', n)| \,;\, z, z' \in \mathrm{supp}\, g_m \} \times [\pi \cdot \mathrm{Area}(\mathrm{supp}\, g_m)]^{1/2}$$

なことが知られている（cf. [6] p4-5）．

よって $I_{g_m}F \in H^\infty(\{D_n\})$ ，かつ仮定により

$$\| I_{g_m}F \| \leqq 8 \sup_n \sup\{ |F(z, n) - F(z', n)| \,;\, z, z' \in \Delta(\zeta, \tfrac{1}{m}) \} \longrightarrow 0, \quad \text{as } m \to \infty \quad .$$

そこで $F_m(z, n) = F(z, n) - (I_{g_m}F)(z, n) + (I_{g_m}F)(\zeta, n)$ とおくと，各 n につき $F_m(\cdot, n)$ は ζ の近傍 $\{ z \in \mathbb{C} \,;\, g_m(z) = 1 \}$（$n$ によらない）で正則かつ $F_m(\zeta, n) = 0$ であるから $(Z - \zeta)^{-1} F_m \in H^\infty(\{D_n\})$。従って $\psi \in \hat{Z}^{-1}(\{\zeta\})$ に対しては $\psi(F_m) = \psi(Z - \zeta)\, \psi((Z - \zeta)^{-1} F_m) = 0$ であり，$\| F - F_m \| \to 0$ as $m \to \infty$ ゆえ $\psi(F) = 0$ となる。 [証明終]

定理 1 の証明　Φ は $\varphi \in \mathcal{M}(\{D_n \cap U\})$, $f \in H^\infty(\{D_n\})$ に対し $(\Phi(\varphi))(f) = \varphi(f|_{\bigcup_{n=1}^{\infty}((D_n \times U) \times \{n\})})$ により定義する。Φ が連続なことは極大 ideal 空間の位相の入れ方から明らか。また $(\Phi(\varphi))(Z) = \varphi(Z)$ だから，$\varphi \in \mathcal{M}(\{D_n \cap U\}) \cap \hat{Z}^{-1}(U)$ ならば $\Phi(\varphi) \in \mathcal{M}(\{D_n\}) \cap \hat{Z}^{-1}(U)$ である。以下 $\mathcal{M}(\{D_n\}) \cap \hat{Z}^{-1}(U)$ 上で Φ の逆写像 Ψ を作る。

$\psi \in \mathcal{M}(\{D_n\})$, $\hat{Z}(\psi)=\zeta\in U$, $f\in H^\infty(\{D_n\cap U\})$ とする。g を U 内にコンパクトな台を持つ C^1 関数で ζ のある近傍で 1 なものとし，各 $f(\cdot,n)$ を $D_n\cap U$ の外で 0 とおいて $\mathbb{C}$ まで拡張して，補題 1 の証明と同様にして T_gf を作る。

$(T_gf)(\cdot,n)$ は $D_n\cap U$ 及び $\mathbb{C}\setminus \mathrm{supp}\, g$ で正則，かつ

$$|(T_gf)(w,n)|\leq \frac{4}{\pi}\left\|\frac{\partial g}{\partial \bar z}\right\|_\infty \|f\|\,[\pi\cdot \mathit{Area}\,(\mathrm{supp}\, g)]^{1/2}\quad (\forall w\in\mathbb{C},\ \forall n)$$

だから，$F(z,n)=(T_gf)(z,n)-(T_gf)(\zeta,n)+f(\zeta,n)$ とおくと $F\in H^\infty(\{D_n\})$ である。そして各 $(F-f)(\cdot,n)$ は ζ の近傍 $\{z\in\mathbb{C}\,;\,g(z)=1\}$ で正則，$(F-f)(\zeta,n)=0$ だから，$F-f$ は補題 1 の条件を満たす。

そこで $(\Psi(\psi))(f)=\psi(F)$ により Ψ を定義する。実際まず $\Psi(\psi)$ が線形なことは明らか。又，$f_1,f_2\in H^\infty(\{D_n\cap U\})$ とするとき f_1, f_2, f_1f_2 に対してそれぞれ上のように $F_1, F_2, F_3\in H^\infty(\{D_n\})$ を作る。$F_1F_2-f_1f_2=F_1(F_2-f_2)+(F_1-f_1)f_2$ で F_1, f_2 は有界なことから $F_1F_2-f_1f_2$ は補題 1 の条件を満たすので，$F_1F_2-F_3$ も補題 1 の条件を満たす。よって

$$(\Psi(\psi))(f_1f_2)=\psi(F_3)=\psi(F_1F_2)=\psi(F_1)\psi(F_2)=(\Psi(\psi))(f_1)(\Psi(\psi))(f_2)$$

即ち $\Psi(\psi)$ は *multiplicative* でもあり，$H^\infty(\{D_n\cap U\})$ 上の複素準同形である。$\Psi\circ\Phi=id$ on $\mathcal{M}(\{D_n\cap U\})\cap\hat{Z}^{-1}(U)$, $\Phi\circ\Psi=id$ on $\mathcal{M}(\{D_n\})\cap\hat{Z}^{-1}(U)$ なことも明らか。さらに Φ が "*fiber*" 間の対応，即ち $\hat{Z}(\Phi(\varphi))=\hat{Z}(\varphi)$ であることと簡単

な位相的考察によりこの対応が同相なことがわかり，最後の主張もこのことから容易に従う。 ［証明終］

3．さて，定理1を用いて平面開集合のGamelin定数に関する結果を得るために次の補題を用いる。これは容易である（cf. ［1］Th 8.1）.

補題2　$\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n \times \{n\})$ が $\mathcal{M}(\{D_n\})$ で稠密であるための必要十分条件は，各 D_n が $\mathcal{M}(D_n)$ で稠密かつ任意の $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ に対して $\limsup_{n\to\infty} C(D_n, m, \delta) < +\infty$ の成り立つことである。

定理2　任意の $M>0$, $\varepsilon>0$ に対し，① $\{|z| \leq M\}$ に含まれ，②補集合の各成分の直径が ε より大きい，を満たす平面開集合の族に対するGamelin定数 $C(\cdot, m, \delta)$ の値は各 $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ に対し有界である。

証明　任意に可算個 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ と，たときに有界：
$\sup_n C(D_n, m, \delta) < +\infty$ なことを言えばよい。さらに平面開集合の列 $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ を各 W_k はある D_n に等しく，任意の D_n が無限回表われるようにとる。各 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $\Delta(\lambda, \frac{\varepsilon}{2}) = \{z \in \mathbb{C}\, ;\, |z-\lambda| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ とおく。仮定により各 k に対し

$\overbrace{W_k \cap \Delta(\lambda, \frac{\varepsilon}{2})}^{\text{の各成分}}$ は単連結であり，開円板の corona 問題に対する Carleson の結果（Gamelin 定数が有限なことまで主張している）により，$\bigcup_{k=1}^{\infty}((W_k \cap \Delta(\lambda, \frac{\varepsilon}{2})) \times \{k\})$ は $\mathcal{M}(\{W_k \cap \Delta(\lambda, \frac{\varepsilon}{2})\})$ で稠密である。これが任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について言えるので，定理1より $\bigcup_{k=1}^{\infty}(W_k \times \{k\})$ も $\mathcal{M}(\{W_k\})$ で稠密である。よって補題2より $\limsup_{k\to\infty} C(W_k, m, \delta) < +\infty$，従ってまた $\sup_n C(D_n, m, \delta) < +\infty$ が各 $m \in \mathbb{N}$，$\delta > 0$ について成り立つ。　［証明終］

4. 定理2は平面開集合の補集合の各成分があまり小さくならない時に有効であるが，逆に十分小さくかつ互いに離れているときに関して Behrens [1] の結果がある。

V を平面開集合，$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ を V 内の点列で V の内部には集積しないもの，$\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ を α_n 中心の開円板列とする。α_n 中心の互いに交わらない開円板列 $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\Delta_n \subset W_n \subset V$ $(n=1,2,\cdots)$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{rad}\,\Delta_n}{\mathrm{rad}\,W_n} < +\infty$（rad は半径を表わす）を満たすものが存在するとき，$\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は V 内で hyperbolically rare であると言う。又一般に V 内の disjoint な閉集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても，hyperbolically rare な円板列 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $E_n \subset \Delta_n$ $(n=1,2,\cdots)$ となるものが存在するとき，$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ は V 内で hyperbolically rare であると言う。さてこのとき，$U = V \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，$D_n = \hat{\mathbb{C}} \setminus E_n$ として Behrens は次のことを証明した。

<u>定理３</u>　V は $\mathcal{M}(V)$ で稠密であるとする。このとき上記の仮定のもとで U が $\mathcal{M}(U)$ で稠密であるための必要十分条件は，各 D_n が $\mathcal{M}(D_n)$ で稠密，かつ任意の $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ に対して $\limsup_{n\to\infty} C(D_n, m, \delta) < +\infty$ の成り立つことである。

例えば V が $\mathcal{M}(V)$ で稠密なとき，V から V 内で *hyperbolically rare* な閉円板列を除いて得られる開集合 U も $\mathcal{M}(U)$ で稠密である。又，*Behrens* は定理３を用いて，一般の平面開集合に対する *corona* 問題を次のような特殊な領域の場合に帰着させた。即ち，

$\Delta' = \{0 < |z| < 1\}$ から原点にのみ集積する Δ' 内の互いに交わらない閉円板列 $\Delta_n = \{|z - c_n| \leq r_n\}$ を除いて得られる領域を一般に Δ-領域と呼ぶ。

<u>定理４</u>　ある平面開集合について *corona* 定理が成り立たないならば，ある Δ-領域に対しても成り立たない。

もちろん $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Δ' で *hyperbolically rare* な Δ-領域については *corona* 定理が成り立つ。また *Deeb & Wilken* [4] は次の条件

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{\infty} \frac{r_m}{|c_m|} \frac{|c_k|}{|c_k - c_m|} = 0 \qquad (*)$$

のもとでもcorona定理の成り立つことを示した。これはhyperbolically rareの場合を含んでいるが，やはり$\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$の小さい場合で，例えば(*)のとき必らず$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{|c_n|}<+\infty$である。$\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$が原点の近くで密に存在する場合については何もわかっていないように思えるが，定理2と定理3を組み合わせると，例えば次のような例のあることはわかる。

<u>例</u>　$\sum_{n=1}^{\infty} r_n=+\infty$ を満たす Δ-領域で，corona定理の成り立つものが存在する。

これについては[7]を参照されたい。

参考文献

[1] M. Behrens, The maximal ideal space of algebras of bounded analytic functions on infinitely connected domains, Trans. Amer. Math. Soc., 161 (1971), 358-380.

[2] L. Carleson, Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, Ann. of Math., 76 (1962), 547-559.

[3] W. Deeb, A class of infinitely connected domains and the corona, Trans. Amer. Math. Soc., 231 (1977), 101-106.

[4] W. Deeb and D. Wilken, Δ-domains and the corona,

Ibid. 231 (1977), 107-115.

[5] T. Gamelin, *Localization of the corona problem*, Pacific J. Math., 34 (1970), 73-81.

[6] ———, *Lectures on* $H^\infty(D)$, Univ. Nacional de la Plata, Argentine, 1972.

[7] J. Narita, *A remark on the corona problem for plane domains*, to appear.