数理解析研究所講究録
第 523 巻 1984 年 96-107

R(K)における表現測度

早大教育　和田淳蔵 (Junzo Wada)

R(K)における表現測度、とくに Arens-Singer 測度と Jensen 測度について考える。これらの特徴付けと、その間の関係について、最近の結果を紹介することを中心にして、論じたい。

1. X をコンパクト Hausdorff 空間とし、A を X 上の関数環とする。M_A を A の極大イデアル空間とする。

$M_A \ni p$, σ を X 上の確率測度とする。

σ を A における p の Arens-Singer 測度であるとは

$$\log|f(p)| = \int \log|f|\,d\sigma \quad (f \in A^{-1})$$

となることをいう。ここで $A^{-1} = \{f \in A\,;\, f^{-1} \in A\}$。

また σ が A における p の Jensen 測度であるとは

$$\log|f(p)| \leqq \int \log|f|\,d\sigma \quad (f \in A)$$

となることである。p の Jensen 測度は、p の Arens-Singer

測度で、かつこの2つとも、Aにおけるpの表現測度となる。すなわち

$$f(p)=\int f\,d\sigma \qquad (f\in A)$$

$\Gamma=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$、Aを$\Gamma$上のdisk環のとき、$|z|<1$となる$z$の表現測度は$\frac{1}{2\pi}P_r(\theta-t)d\theta$ $(z=re^{it})$である。ここで$P_r(\theta)$はPoisson核。

Kを$\mathbb{C}$のコンパクト部分集合とし、R(K)でKの外側に極をもつ有理関数全体のK上での閉包を表わす。これはまた、Kのある近傍で解析的である関数全体のK上での閉包と同じである。R(K)はK上の関数環である。

ここで$M_{R(K)}=K$となることはよく知られている。

またP(K)でzの多項式全体のK上での閉包、すなわちK上でzの多項式で一様近似される関数全体を表わす。P(K)はK上の関数環で$P(K)\subset R(K)$である。

Kを$\mathbb{C}$のコンパクト部分集合とし、K上に台をもつ有限測度νのCauchy変換$\hat{\nu}$とは、

$$\hat{\nu}(\zeta)=\int\frac{d\nu(z)}{z-\zeta} \qquad (\zeta\in\mathbb{C})$$

を表わす。$\hat{\nu}$はνと、局所的に積分可能な関数$\frac{1}{z}$との、たたみこみ(convolution)であって、これは$\mathbb{C}$の測度0を除いた

所で定義される。

またνの対数ポテンシャル (logarithmic potential) にマイナスをつけたものを考える：

$$V_\nu(\xi) = \int \log|z-\xi|\,d\nu(z) \qquad (\xi \in \mathbb{C})$$

これはνと局所的に積分可能な関数 $\log|z|$ との，たたみこみ (convolution) として，$\mathbb{C}$のある測度0の集合を除いた所で定義される。また V_ν はνの台の外側で調和となる。

Kを$\mathbb{C}$のコンパクト部分集合とし，νをK上の確率測度とし，$K \ni p$とする。νが$R(K)$におけるpの表現測度である条件を考える。

定理1.1。νをK上の確率測度とし，$K \ni p$とする。そのとき，つぎは同値である。

(i) νは$R(K)$におけるpの表現測度である。

(ii) $$\hat{\nu}(\xi) = \frac{1}{p-\xi} \qquad (\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$$

(iii) $V_\nu(\xi) - \log|\xi - p|$ は$\mathbb{C}\setminus K$の任意の連結成分の上で定数となる。

証明。(ii) → (iii)。$\frac{\partial}{\partial \xi} V_\nu = -\frac{1}{2}\hat{\nu}$。 $\xi \neq z$ なら $\frac{\partial}{\partial \xi}\log|\xi - z|$ $= \frac{1}{2}\frac{1}{\xi - z}$ であるから (ii) より

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(V_\nu(\xi) - \log|\xi - p|\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\xi} - \hat{\nu}(\xi)\right] = 0.$$

$V_\nu(\xi) - \log|\xi - p|$ は実関数であるから、$\mathbb{C}\setminus K$ の任意の連結成分の上で定数となり (iii) を得る。(iii) → (ii) は明らか。

(ii) → (i)。(ii) より

$$\int \frac{d\nu(z)}{z-\xi} = \hat{\nu}(\xi) = \frac{1}{p-\xi}$$

ゆえに $\displaystyle\int \frac{d\nu(z)}{z-\xi} = \int \frac{d\delta_p(z)}{z-\xi}$ （ここで δ_p は p の Dirac 測度）

これから $\hat{\nu}(\xi) - \hat{\delta}_p(\xi) = 0$ $(\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$。このことより、

$\nu - \delta_p \perp R(K)$，すなわち $\int f(d\nu - d\delta_p) = 0$ $(f \in R(K))$。

ゆえに $f(p) = \int f d\nu$ $(f \in R(K))$ となり (i) を得る。

(i) → (ii) は明らか。

注意。この定理は〔4〕P.35 に見られるが、その証明に不完全な所があるので、上のように訂正した。

2. つぎに $R(K)$ における Arens－Singer 測度と Jensen 測度の特徴付けについて考えて見る。

K を $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とする。$H(K)$ で、K のある近傍で調和である関数全体の $C_R(K)$ での閉包と定義する。

ここで $H(K)$ は $\log|R(K)^{-1}|$ で張られた部分空間の閉包であることがわかる。

定理2.1　K∋P, νをK上の確率測度とする。そのときつぎは同値である。

(i)　νは$R(K)$におけるpのArens–Singer測度である。

(ii)　νは$H(K)$上でpを表現する。すなわちKのある近傍で調和である任意の関数uで

$$u(p) = \int u\,d\nu$$

(iii)　$V_\nu(\xi) = \log|\xi - p| \quad (\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$。

証明。(i)→(ii)。(i)より $\int \log|f|\,d\nu = \log|f(p)| \quad (f \in R(K)^{-1})$。

ゆえに $\int u\,d\nu = u(p) \quad (u \in H(K))$ となり(ii)が得られる。

(ii)→(i)は明らか。

(iii)→(ii)。uを$\mathbb{C}$の上で無限回微分可能な関数でコンパクトな台をもち、Kのある近傍で調和とする。そのときuはそのラプラシアンの対数ポテンシャルとして表わされる：

$$u(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\iint (\Delta u)(z)\log|z-\xi|\,dx\,dy \quad (\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$$

これはGreenの公式から得られる。

uはKの近傍で調和であるゆえ、そこで$\Delta u = 0$。ゆえに

$$\int u(\xi)\,d\nu(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus K}(\Delta u)(z)\left[\int \log|z-\xi|\,d\nu(\xi)\right]dx\,dy$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int (\Delta u)(z) \log|z-p|\,dxdy = u(p)。$$

(ii) → (iii)。 $u(z) = \log|z-\xi|$ $(\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$ は K のある近傍で調和。ゆえに

$$V_\nu(\xi) = \int \log|z-\xi|\,d\nu(z) = \log|p-\xi|。$$

つぎに $R(K)$ における Jensen 測度を考える。これは B. Cole によって与えられた。

定理 2.2. $K \ni p$, ν を K の上の確率測度とする。そのとき、つぎは同値である。

(i) ν は $R(K)$ における p の Jensen 測度である。

(ii) ν はつぎをみたす。

a) $\log|\xi-p| \leqq \int \log|\xi-z|\,d\nu(z)$ $(\xi \in \mathbb{C})$

b) $\log|\xi-p| = \int \log|\xi-z|\,d\nu(z) = V_\nu(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$。

(iii) u が K のある近傍で劣調和のとき

$$u(p) \leqq \int u\,d\nu$$

証明。(i) → (ii)。(ii) の a) は関数 $z \to \xi - z$ に対する Jensen の不等式を表わし、b) は ν が Arens-Singer 測度であるから明らか。

(ii) → (iii)。u を K のある近傍で劣調和とする。Riesz の

分解定理により

$$u(z) = v(z) + \int \log|z-\zeta|\,d\tau(\zeta) \qquad (z \in K)。$$

ここで、τはKのあるコンパクト近傍に台をもつ正測度でvはKのある近傍で調和である。

Fubiniの定理より

$$\int u(z)\,d\nu(z) = \int v(z)\,d\nu(z) + \iint \log|z-\zeta|\,d\nu(z)\,d\tau(\zeta)$$

$$\geqq v(p) + \int \log|\zeta - p|\,d\tau(\zeta) = u(p)。$$

すなわち(iii)を得る。ここで(ii) b)は定理2.1によってKのある近傍で調和な任意の関数vで $v(p) = \int v(z)\,d\nu(z)$ であることと同値であるという事実を用いてある。

(iii)→(i)。fをKの外側に極をもつ有理関数とする。そのとき $\log|f|$ はKのある近傍で劣調和。(iii)より

$$\log|f(p)| \leqq \int \log|f|\,d\nu$$

このようなfの全体はR(K)の中で稠密であるから、R(K)の任意の元fで上が成り立つ。

3. さてここでR(K)におけるArens-Singer測度とJensen測度との関係を述べる。

まず、つぎのような結果が知られている([1])。

定理3.1. $K \ni p$, νをKの境界∂K上の確率測度とする。そのとき、νが$R(K)$におけるpのJensen測度であることと、νが$R(K)$におけるpのArens-Singer測度であることとは同等である。

この定理では、νは∂K上の確率測度であるという仮定がついているが、この仮定がないときは結果は大変に複雑となる。

これについてつぎに述べていく。

いまAをコンパクトHausdorff空間X上の関数環とする。

X上の確率測度全体を$\mathbb{M}$とする。$\mathfrak{S}$を$\mathbb{M}$の部分集合としたとき、$\mathfrak{S}$のaffine completionとは、$\mathfrak{S}$で生成されたw^*-閉アファイン空間と$\mathbb{M}$との共通部分をいう。これを$\hat{\mathfrak{S}}$で表わす。$\mathfrak{S}$がaffinely completeであるとは、$\hat{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$となることをいう。$M_A \ni p$で、$p$のArens-Singer測度全体の集合はaffinely completeであることがすぐ確められる。

いまAにおけるpのArens-Singer測度全体を$\mathfrak{A}$, AにおけるpのJensen測度全体の集合を$\mathfrak{J}$で表わすと、一般に$\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$であるから、$\hat{\mathfrak{J}} \subset \hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$となっている。ここで$\hat{\mathfrak{J}} = \mathfrak{A}$となっているかという問がある。これを$A = R(K)$の場合に考える。

このために最初に$\mathbb{C}$上の fine topology について述べる。

$\mathbb{C}$上の fine topology とは、$\mathbb{C}$上の劣調和関数すべてが連続（$-\infty$もとり得る実数値関数として）となるような最弱な位相をいう。$\mathbb{C}$上の fine topology は$\mathbb{C}$上の普通の位相より強くなるが、つぎのような性質をもっている。

1° $\mathbb{C}$上の fine topology は局所連結位相である。ゆえに任意の finely open（fine topology で開集合）な$\mathbb{C}$上の集合は、互いに共通点のない finely connected component の高々可算個の和集合となっている。

2° $\mathbb{C}$上の finely open な集合Uと$U \ni x$に対して、xを中心とする、いくらでも小さな円周がUに含まれる。

ここでつぎの定理が成り立つ（[5]）。

定理3.2. Kを$\mathbb{C}$のコンパクト部分集合とする。UをKの fine interior（fine topology に関しての内部）の fine connected component とし、$U \ni p$とする。

このとき、$R(K)$に関するpの Jensen 測度全体の affine completion は$\overline{U}$に台をもつ$R(K)$に関するpの Arens-Singer 測度全体と一致する。

証明。$U \ni p$のとき、pの Jensen 測度の台は$\overline{U}$に含まれることがわかる。ゆえに$R(K)$に関するpの Jensen 測度全体の affine completion は、$R(K)$に関するpの Arens-Singer 測度

で台を$\overline{U}$の中にもつものの全体に含まれる。

ゆえに、逆に$\overline{U}$に台をもつ任意の Arens-Singer 測度は Jensen測度全体で生成されたアファイン空間の w^*-閉包の中に入ることが示されればよい。

それをつぎのように3つの部分に別けて証明する。

1° νを$\overline{U}$に台をもつpの Arens-Singer 測度とすれば、νは$H(\overline{U})$におけるpの表現測度となる。ゆえにδ_pをpの Dirac 測度とすれば

$$(*) \qquad \nu - \delta_p \in H(\overline{U})^{\perp}$$

すなわち $\int f(d\nu - d\delta_p) = 0 \quad (f \in H(\overline{U}))$ となる。

さてpから発するBrown運動のUからの first exit time をTとし、τを$\tau \leq T$となる任意の stopping time とすれば、つぎのように$\overline{U}$の上の確率測度σ_τが存在する：

$$\int h \, d\sigma_\tau = \int h(b_\tau(w))dw$$

ここでそのBrown運動を$\{b_t\}$とし、Brownian path の空間の上の Wiener 測度をdwとする。

ここでσ_τは$R(\overline{U})$におけるpの Jensen測度であることが示せる。なんとなれば、hを$\overline{U}$のある近傍で劣調和とすれば $h \circ b_t$ は submartingale となる。また stopping time $\tau > 0$ であるから $\int h\,d\sigma_\tau = \int h \circ b_\tau dw \geqq \int h \circ b_0 dw = h(P)$。

ゆえに定理2.2より σ_τ は $R(\overline{U})$ における p の Jensen 測度となる。

2° つぎに h を有界で U の上で finely harmonic なら $h\circ B_t$ $(t<T)$ は martingale。上と同じような論法で $h(p)=\int h\,d\sigma_\tau$ となる。一方 $h(p)=\int h\,d\delta_p$ であるから、$\sigma_\tau-\delta_p\in H(\overline{U})^\perp$。

これは $H(\overline{U})$ は $\overline{U}$ で連続で、U で finely harmonic な関数全体と一致することが知られている([1])ことから導かれる。

ここで $\mathfrak{S}$ を $\{\sigma_\tau-\delta_p : 0<\tau<T,\ \tau$ は stopping time$\}$ の張る線形空間とすれば、$\mathfrak{S}\subset H(\overline{U})^\perp$ となる。ここでまた $\mathfrak{S}$ が $H(\overline{U})^\perp$ の中で w^*-dense となることも示される。

3°. 1° の (*) より $\nu-\delta_p\in H(U)^\perp=\overline{\mathfrak{S}}^{w^*}$ ($\mathfrak{S}$ の w^*-閉包) であるから、$\mathfrak{S}$ の元 $\sum_{i=1}^n\alpha_i(\sigma_{\tau_i}-\delta_p)$ で

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i(\sigma_{\tau_i}-\delta_p)\longrightarrow\nu-\delta_p\quad(w^*)$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i\sigma_{\tau_i}-\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i-1\right)\delta_p\to\nu\ (w^*).$$

ところが σ_{τ_i}, δ_p はともに p の Jensen 測度となる。

このことから ν は Jensen 測度全体の affine completion の中に入ることになり、この定理は証明された。

定理3.2は Jensen 測度全体と Arens-Singer測度全体との関係をある程度明らかにしているが、条件がいろいろついている。$\mathbb{C}$ の上の fine topology に関しては、比較的いい性質があるので（たとえば [3] 参照）、この定理はまだ改良の余地はあるように思う。

参照文献

[1] A. Debiard and B. Gaveau : Potential fin et algèbras de fonctions analytiques I, J. Functional Analysis 16 (1974) 289-304。

[2] B. Fuglede : Finely Harmonic Functions, Springer Lecture Notes in Math., 289 1972.

[3] B. Fuglede : Fonctions harmoniques et fonctions finement harmoniques, Ann. Inst. Fourier 24 (1974) 77-91.

[4] T. W. Gamelin : Uniform Algebras and Jensen Measures, London Math. Soc., Lecture Notes 32, 1978.

[5] T. W. Gamelin and T. J. Lyons : Jensen measures for R(K), J. London Math. Soc., 27 (1983) 317-330.