数理解析研究所講究録
第523巻 1984年 122-141

Holomorphic martingaleからなるHardy空間について。

早大理工　新井 仁之 (Hitoshi Arai)

本講演では、古典的Hardy空間とmartingaleからなるHardy空間との関連性について得た結果を述べる。

まず、§2では、§3の準備として、Varopoulos[14]で定義されたHilbert変換を多変数化し、K^1-ノルムと $\|X\|_{L^1}+\sum_{j=1}^{3}\|H_jX\|_{L^1}$ ノルムの同値性を示す。つぎに、§3では、主要定理の1つとして、$\mathbb{T}^2$上のHardy空間$\mathcal{H}^p(\mathbb{T}^2)$とBMO$(\mathbb{T}^2)$が、各々、完備直積Brown空間上の$K^p$、BMOのあるclosed complemented subspaceに同型であることを、Varopoulos[13]、[15]で導入された作用素M、Nを使って示す。また、このことの系として、H. Satoの定理、Gundy-Steinの定理等の別証をする。

ところで、完備Brown空間上の1径数holomorphic martingaleからなるH^∞と、$H^\infty(\mathbb{T})$とは、関数環としてみると相違点があることが、K.Carne[3]、新井-和田[16]で示された。すなわち、[3]では、H^∞が解析構造をもたないことが証明され、

[16] では、H^∞が*弱極大でないことが示された。§4では、H^∞が*弱極大でないことの別証をし、さらに、H^∞を含む*弱閉環について、詳しく論ずる。

§1. 定義・記号.

§1では、martingaleについてのよく知られた事柄を、あとの議論に必要な範囲で、まとめておく。

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$を完備確率空間で、その上に、2つの互いに独立な1次元Brown運動

$(x_t)_{t\geq 0}$, $(y_t)_{t\geq 0}$,　　$x_0 = y_0 = 0$ a.s. dP.

が定義されているものとする。

$\{x_s, y_s : 0 \leq s \leq t\}$とP零集合で生成されるσ-集合体を$\mathfrak{F}_t$とおく$(t\geq 0)$。そして、$\bigcup_{t\geq 0}\mathfrak{F}_t$で生成されるσ-集合体が$\mathfrak{F}$になっているものと仮定する。

このとき、組$(\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, (x_t)_{t\geq 0}, (y_t)_{t\geq 0})$を完備(2次元)Brown空間といい、$\mathbb{B}_2$で表わす。よく知られているように、$(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$は、右連続である。すなわち、

$\bigcap_{s>t}\mathfrak{F}_s = \mathfrak{F}_t$ $(t \geq 0)$ をみたしている ([8] P.286 参照)。

$(\Omega_j, \mathfrak{F}^j, P^j, (\mathfrak{F}^j_{t_j})_{t_j\geq 0}, (x^j_{t_j})_{t_j\geq 0}, (y^j_{t_j})_{t_j\geq 0})$ $(j=1,2)$を2つの完備(2次元)Brown空間とする。$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$を直積測度空間$(\Omega_1\otimes\Omega_2, \mathfrak{F}^1\otimes\mathfrak{F}^2, P^1\otimes P^2)$の完備化とし、$\mathfrak{F}^1_s\otimes\mathfrak{F}^2_t$とP零集合で

生成されるσ-集合体を$\mathcal{F}_{st}$とおく。このとき、
組$(\Omega, \mathbb{F}, P, (\mathcal{F}_{st})_{s,t\geq 0}, (x^j_{t_j})_{t_j\geq 0}, (y^j_{t_j})_{t_j\geq 0}\ (j=1,2))$を完備直積Brown空間といい、$\mathbb{B}_2\times\mathbb{B}_2$で表わすことにする。

以下、§1から§3までは、上記の$\mathbb{B}_2\times\mathbb{B}_2$の上で、議論をすすめていく。

$z^j_{t_j} = x^j_{t_j} + \sqrt{-1}\, y^j_{t_j}$, $\bar{z}^j_{t_j} = x^j_{t_j} - \sqrt{-1}\, y^j_{t_j}$ $(t_j \geq 0\ ;\ j=1,2)$ とおく。

$E[\cdot]$で、$(\Omega, \mathbb{F}, P)$上の期待値を表わし、$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\Omega$上の2径数複素数値可測過程$\Phi$に対し、

$$\|\Phi\|_p \equiv E\left[\left(\int_0^\infty\int_0^\infty |\Phi_{st}|^2 ds\,dt\right)^{p/2}\right]^{1/p} \qquad (0<p<\infty)$$

なる(quasi-) normを定める。

Λ^pを、2径数複素数値可予測(predictable)過程Φで、$\|\Phi\|_p<\infty$なるものの全体とする$(0<p<\infty)$。

$\Phi\in\Lambda^p$に対して、2径数確率積分

$\iint\Phi\,dx^1dx^2$、$\iint\Phi\,dx^1dy^2$, $\iint\Phi\,dy^1dx^2$, $\iint\Phi\,dy^1dy^2$

が定義される。(Brossard-Chevalier [2] 参照。)

各Ω_j上で、Λ^pと同様のclassが定義できるが、それをΛ^p_jと表わす。$\Lambda^p_j\ni\varphi$に対しては、1径数確率積分

$\int\varphi\,dx^j$, $\int\varphi\,dy^j$ $(j=1,2)$

が定義される。([8]参照。)

ここで、Brossard-Chevalier [2] によるHardy空間K^pを導入する。[2] では、K^pという記号は使われていないが、ここ

では、[1]、[4]、[12]に習って、K^p という記号を使う。K^p は、つぎのように定義される。

$K^p \equiv \{ X=(X_{st}) :$ X は、つぎの(1.1)の形で表わされる。$\}$

$X_{00} \in \mathbb{C}$

(1.1) ある $\varphi_1, \varphi_2 \in \Lambda_1^p$、$\psi_1, \psi_2 \in \Lambda_2^p$, $\Phi_1, \cdots, \Phi_4 \in \Lambda^p$ が存在して、

$$X_{st} = X_{00} + \int_0^s \varphi_1 dx^1 + \int_0^s \varphi_2 dy^1 + \int_0^t \psi_1 dx^2 + \int_0^t \psi_2 dy^2$$
$$+ \int_0^t \int_0^s (\Phi_1 dx^1 dx^2 + \Phi_2 dx^1 dy^2 + \Phi_3 dy^1 dx^2 + \Phi_4 dy^1 dy^2)$$

$X \in K^p$ が(1.1)の形で表わされているとき、

$$\langle X, X \rangle \equiv \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty |\varphi_j|^2 ds + \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty |\psi_j|^2 dt + \sum_{j=1}^{4} \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi_j|^2 ds dt$$

とし、$\|X\|_{K^p} \equiv \| \langle X, X \rangle^{1/2} \|_{L^p} + |X_{00}|$ とする。(K^p, $\|\cdot\|_{K^p}$) は、$1 \leq p < \infty$ のとき、Banach空間になる。

また、$X=(X_{st}) \in K^2$ と、X の最終変数 $X_{\infty\infty} \in L^2 = L^2(\Omega, \mathbb{F}, P)$ とを同一視することによって、$K^2 = L^2$ とみなせる ([2] P. 100)。

[2] で、つぎの定理が証明された。

<u>Brossard-Chevalier の定理 ([2])</u>

(B.C) $\|X\|_{K^p} \approx \|X^*\|_{L^p}$ ($X \in K^p$, $0 < p < \infty$)

ただし、$X^* \equiv \sup_{s,t} |X_{st}|$ とする。

最後に、BMO について述べる。2径数BMO-martingale は、

まず、離散径数の場合に、A. Bernard [1] によって定義され、いわゆる Fefferman の不等式が証明された。$\mathbb{B}_2 \times \mathbb{B}_2$ 上の場合、BMO は、H. Sato [12]、E. Decamp [4] によって定義され、さらに、$(K^1)^* = BMO$ が証明された。ここでは、H. Sato [12] による定義を述べる。

T が région_aléatoire とは、T が Ω から $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^2$ の巾集合の中への写像で、かつ

$$\{(s,t,\omega) \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^2 \times \Omega : (s,t) \in T(\omega)\}$$

が可予測集合となるものである。可予測集合とは、

$$\{\,]s_1, t_1] \times]s_2, t_2] \times A : 0 \leq s_i \leq t_i,\ A \in \mathcal{F}_{s_1 s_2} \ (i=1,2) \}$$

で生成される σ-集合体に属する集合のことである。

région_aléatoire の全体を $\mathcal{R}$ とおく。

(1.1) で表わされている $X \in K^p$ と $T \in \mathcal{R}$ に対して、

$$\Delta X_{st} = X_{st} - X_{s0} - X_{0t} + X_{00} \quad (s,t \geqq 0)$$

とおき、

$$\Delta X_T = \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{\{(s,t) \in T\}} (\Phi_1 dx^1 dx^2 + \Phi_2 dx^1 dy^2 + \Phi_3 dx^1 dy^2 + \Phi_4 dy^1 dy^2)$$

とおく。

$X \in K^2$ とする。X がつぎの (1.2), (1.3) をみたすとき、X を BMO_martingale という。

$$(1.2) \qquad \|X_{\infty\infty}\|_* \equiv \left(\sup_s \| E[\, |X_{\infty\infty} - X_{s0}|^2 \| \mathcal{F}_s^1] \|_{L^\infty} \right)^{1/2} < \infty$$

$$\|X_{\infty\infty}\|_* \equiv \left(\sup_t \| E[\, |X_{\infty\infty} - X_{0t}|^2 \| \mathcal{F}_t^1] \|_{L^\infty} \right)^{1/2} < \infty$$

(1.3) $\|\Delta X\|_* \equiv \sup\{\|\Delta X_T\|_{K^2}/\sqrt{P(T\neq\phi)} : T\in\mathcal{R}\} < \infty$

(ただし、0/0=0 とみなす。)

そして、

$\|X\|_* \equiv \|X_{\infty 0}\|_* + \|X_{0\infty}\|_* + \|\Delta X\|_* + |X_{00}|$

とおく。BMO-martingale の全体をBMOで表わす。

Feffermanの不等式とK^1-BMO双対性 (Sato[12] ; cf. [1], [4])

(1.4) $\exists C>0,\ \forall X\in K^2,\ \forall Y\in BMO : |E[XY]| \leqq C\|X\|_{K^1}\|Y\|_*$

(1.5) $(K^1)^* = BMO$

この§の最後に、上記の定理の系として、つぎが成り立つことを注意しておく。

系1.1　　PをK^1, K^2及びBMO上の有界射影線型作用素とする。また、Pは$K^2=L^2$で自己共役とする。このとき、$P(K^1)^* = P(BMO)$　となる。ただし、ここで、

$P(K^1)^* \equiv \{\varphi\in(K^1)^* : \varphi((I-P)(K^1)) = 0\}$ (Iは恒等作用素)とする。

§2. Hilbert 変換の多変数化とその応用

Varopoulos [14] が導入した Hilbert 変換を、ここで、多変数化しておく。

$X \in K^p$ が、(1.1) の形で表わされているとき、

$$H_1X = -\int \varphi_2\, dx^1 + \int \varphi_1\, dy^1 + \int \psi_1\, dx^2 + \int \psi_2\, dy^2$$
$$+ \iint (-\Phi_3\, dx^1dx^2 - \Phi_4\, dx^1dy^2 + \Phi_1\, dy^1dx^2 + \Phi_2\, dy^1dy^2)$$

$$H_2X = \int \varphi_1\, dx^1 + \int \varphi_2\, dy^2 - \int \psi_2\, dx^2 + \int \psi_1\, dy^2$$
$$+ \iint (-\Phi_2\, dx^1dx^2 + \Phi_1\, dx^1dy^2 - \Phi_4\, dy^1dx^2 + \Phi_3\, dy^1dy^2)$$

$$H_3X = H_1(H_2X)$$

とおく。容易にわかるように、H_j は、K^p 及び BMO 上の有界線型作用素である。$(0<p<\infty)$。

$$K^p_{10} = \{X \in K^p : X_{st} = X_{s0} \ (\forall s,t \geq 0) \ \& \ X_{00} = 0\}$$

$$K^p_{01} = \{X \in K^p : X_{st} = X_{0t} \ (\forall s,t \geq 0) \ \& \ X_{00} = 0\}$$

$$K^p_{11} = \{X \in K^p : X_{st} = \Delta X_{st} \ (\forall s,t \geq 0)\}$$

とおく。すると、

$$K^p = \mathbb{C} \oplus K^p_{10} \oplus K^p_{01} \oplus K^p_{11}$$

である。

T_1, T_2, T_3, T_4 を各々、$\mathbb{C}, K^p_{10}, K^p_{01}, K^p_{11}$ 上の作用素とする。このとき、$X \in K^p$ に対して、

$$T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4(X) \equiv T_1(X_{00}) + T_2((X_{s0} - X_{00})) + T_3((X_{0t} - X_{00}))$$

$$+T_4((\Delta X_{st}))$$

と定義することにする。

$T_j=(I+\sqrt{-1}H_j)/2$, $S_j=(I-\sqrt{-1}H_j)/2$ $(j=1,2)$ とし、

$K^{aa}=I\oplus T_1\oplus T_2\oplus T_1\circ T_2$ （Iは恒等作用素）

$K^{ab}=0\oplus 0\oplus 0\oplus T_1\circ S_2$ （0は零作用素）

$K^{ba}=0\oplus 0\oplus 0\oplus S_1\circ T_2$

$K^{bb}=0\oplus S_1\oplus S_2\oplus S_1\cdot S_2$

とおく。K^ε は $K^p(0<p<\infty)$ 上、BMO上で有界である $(\varepsilon=aa,ab,ba,bb)$。

$X\in K^p$ に対し、$X^\varepsilon=K^\varepsilon(X)$ $(\varepsilon=aa、ab,ba、bb)$ とする。

$(K^p)^\varepsilon=\{X^\varepsilon : X\in K^p\}$ とし、特に、$H^p=(K^p)^{aa}$ $(0<p<\infty)$ とする。$BMO^\varepsilon=\{X^\varepsilon : X\in BMO\}$ とし、$BMOA=BMO^{aa}$ とする。また、$H^\infty=H^2\cap L^\infty$ とおく。$1\leq p<\infty$ に対して、$(K^p)^\varepsilon$ は、K^p_ノルム閉線型空間となり、BMO^ε は、BMO_ノルム閉線型空間になる。さらに K^ε が、K^p 上の有界射影線型作用素で、特に、K^2 上で自己共役になっていることが容易に証明できる $(\varepsilon=aa,ab,ba,bb)$。そのほか、$H^p=[H^\infty]_p$ $(1\leq p<\infty)$ も示せる。（$[\cdot]_p$ で、・の L^p_ノルム閉包を表わす。）

$\mathbb{B}_2$ 上の Varopoulos の定理（[14] Theorem 3.2）の $\mathbb{B}_2\times\mathbb{B}_2$ 上への拡張として、つぎが証明できる。

<u>定理2.1.（Varopoulos の定理の拡張）</u>

$$\|X\|_{K^p}\approx\|X\|_{L^p}+\sum_{j=1}^{3}\|H_jX\|_{L^p}\approx\sum_{\varepsilon=aa,ab,ba,bb}\|X^\varepsilon\|_{L^p}\qquad(X\in K^p\ ;\ 1\leq p<\infty)$$

この定理と、(1.5) 及び通常の duality argument により、つぎの定理が得られる。

<u>定理 2.2.</u>　以下の条件 (a), (b), (c) は同値である。

(a)　$X \in BMO$

(b)　ある $A_j \in L^\infty$ $(1 \leqq j \leqq 4)$ が存在して、

$X = A_1^{aa} + A_2^{ab} + A_3^{ba} + A_4^{bb}$ かつ $\|X\|_* \approx \sum_{j=1}^{4} \|A_j\|_{L^\infty}$ をみたす。

(c)　ある $B_j \in L^\infty$ $(1 \leqq j \leqq 4)$ が存在して、

$X = B_1 + H_1 B_2 + H_2 B_3 + H_3 B_4$ かつ $\|X\|_* \approx \sum_{j=1}^{4} \|B_j\|_{L^\infty}$ をみたす。

<u>§3. $\mathbb{T}^2$ 上の関数論への応用.</u>

$D_j = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T}_j = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ $(j = 1, 2)$ とし、$D^2 = D_1 \times D_2$, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ とおく。dm_j を $\mathbb{T}_j$ 上の正規化された Lebesgue 測度とし、$dm = dm_1 \otimes dm_2$ とおく。

$\tilde{H}_j$ を $\mathbb{T}^2$ 上の関数の j 番目の変数に関する共役作用素とする $(j = 1, 2)$。そして、$\tilde{H}_3 = \tilde{H}_1 \circ \tilde{H}_2$ とおく。

$\mathcal{H}^1(\mathbb{T}^2) \equiv \{ f \in L^1(\mathbb{T}^2) : \|f\|_{\mathcal{H}^1} \equiv \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^{3} \|H_j f\|_{L^1} < \infty \}$

とし、

$h^1(\mathbb{T}^2) \equiv \{ f \in L^1(\mathbb{T}^2) : \|f\|_{h^1} < \infty \}$　(ただし、$\|f\|_{h^1} = \|n(f)\|_{L^1}$ とし、$n(f)$ は f の radial maximal 関数) とする。

つぎの作用素 M, N が Varopoulos [13], [15] によって考えられた。

$\tau_j = \inf\{t : |Z_t^j| = 1\}$ $(j=1,2)$ とする。$f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ に対して、$Mf = f(Z^1_{\tau_1}, Z^2_{\tau_2})$ とする。M は、$L^p(\mathbb{T}^2)$ から $L^p = L^p(\Omega, \mathbb{F}, P)$ への等距離線型作用素である。$(1 \leq p \leq \infty)$

$X \in L^1(\Omega)$ に対して、$NX(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = E[X \| Z^1_{\tau_1} = e^{i\theta}, Z^2_{\tau_2} = e^{i\varphi}]$ とする。N は、$L^p(\Omega)$ から $L^p(\mathbb{T}^2)$ への縮小線型作用素である。

$\mathbb{T}^2$ 上の BMO 関数として、つぎのものが、H. Sato [12] によって導入された。

$BMO(\mathbb{T}^2) \equiv \{ f \in L^2(\mathbb{T}^2) : Mf \in BMO \}$, $\|f\|_* \equiv \|Mf\|_*$

さて、$H^p(D^2)$ を D^2 上の解析関数からなる Hardy 空間とし、$H^p(\mathbb{T}^2)$ を $H^p(D^2)$ に属する関数の境界関数からなる Hardy 空間とする (cf Rudin [11])。$BMOA(\mathbb{T}^2) = BMO(\mathbb{T}^2) \cap H^2(\mathbb{T}^2)$ とおく。

$\mathcal{H}^p(\mathbb{T}^2)$, $BMO(\mathbb{T}^2)$ と K^p、BMO との関連性に関する結果として、つぎの定理が得られる。

<u>定理3.1.（主要定理）</u>　$\mathcal{H}^p(\mathbb{T}^2)$ (resp. $BMO(\mathbb{T}^2)$) は、K^p (resp. BMO) のある closed complemented subspace に同型である。実際、M∘N が K^p (resp. BMO) 上の有界射影線型作用素で、

M が、$\mathcal{H}^p(\mathbb{T}^2)$ (resp. $BMO(\mathbb{T}^2)$) から、$M\circ N(K^p)$ (resp. $M\circ N(BMO)$) の上への同型作用素になっている。

(証明の概略) $\tilde{N}=M\circ N$ とおく。まず $\tilde{N}$ の K^1-有界性を示す。$X\in K^2$ に対して、$\tilde{N}H_jX = H_j\tilde{N}X$ が成り立つことが、$H^\infty\cap(K^2_{10}\oplus\mathbb{C})$ の $*$弱Dirichlet 性を使って証明できる。ゆえに、定理2.1より、$X\in K^2$ に対して、つぎが成り立つ。

$$\|\tilde{N}X\|_{K^1} \approx \|\tilde{N}X\|_{L^1} + \sum_{j=1}^{3}\|H_j\tilde{N}X\|_{L^1} = \|\tilde{N}X\|_{L^1} + \sum_{j=1}^{3}\|\tilde{N}H_jX\|_{L^1}$$
$$\leqq \|X\|_{L^1} + \sum_{j=1}^{3}\|H_jX\|_{L^1} \approx \|X\|_{K^1}$$

これより、$\tilde{N}$ の K^1-有界性が得られる。[11] Theorem 2.1.3 (c) から、$\mathcal{H}^1(\mathbb{T}^2)$ で $C(\mathbb{T}^2)$ が稠密であることがわかる。すなわち、任意の $f\in\mathcal{H}^1(\mathbb{T}^2)$ に対して、$\|f_n-f\|_{\mathcal{H}^1}\to 0$ $(n\to\infty)$ なる $f_n\in C(\mathbb{T}^2)$ が存在する。定理2.1.より、$\lim_{n,m\to\infty}\|Mf_n - Mf_m\|_{K^1}=0$ である。ゆえに、ある $X\in K^1$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - NX\|_{L^1} \lesssim \lim_{n\to\infty}\|Mf_n - \tilde{N}X\|_{K^1} = \lim_{n\to\infty}\|\tilde{N}(Mf_n - X)\|_{K^1}$$
$$\lesssim \lim_{n\to\infty}\|Mf_n - X\|_{K^1} = 0$$

となる。したがって、$f=NX$, $Mf=\tilde{N}X\in K^1$ かつ

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1} = \lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{\mathcal{H}^1} \approx \lim_{n\to\infty}\|Mf_n\|_{K^1} = \|Mf\|_{K^1}$$

となり、M が同型であることがわかる。

つぎに、$\tilde{N}$ の BMO-有界性を示す。$X\in BMO$ と任意の $T\in\mathcal{R}$ をとる。$X=\Delta X$ の場合を示せば十分である。Fefferman の不等式から、

$$\|\tilde{N}(\Delta X)_T\|_{K^2}^2 \lesssim \|\Delta X\|_* \|\tilde{N}(\tilde{N}(\Delta X)_T)\|_{K^1}$$

が得られる。ゆえに、$\tilde{N}$ の K^1_有界性より、

$$\begin{aligned}\|\tilde{N}(\Delta X)_T\|_{K^2}^2 &\lesssim \|\Delta X\|_* \|\tilde{N}(\Delta X)_T\|_{K^1} \\ &\lesssim \|\Delta X\|_* \|\tilde{N}(\Delta X)_T^* \chi_{\{T\neq\phi\}} \\ &\leq \|\Delta X\|_* \|\tilde{N}(\Delta X)_T^*\|_{L^1}\sqrt{P(T\neq\phi)} \\ &\lesssim \|\Delta X\|_* \|\tilde{N}(\Delta X)_T\|_{K^1}\sqrt{P(T\neq\phi)}\end{aligned}$$

よって、$\tilde{N}$ は BMO 有界である。M の BMO_同型性は、BMO$(\mathbb{T}^2)$ の定義から明らかである。∎

定理3.1. により、(B-C), (1.4), (1.5), 定理2.1 などの martingale に関する結果を、つぎのように、$\mathbb{T}^2$ 上にうつすことができ、下記のように、H. Sato の定理、Gundy-Stein の定理の別証を与えることができる。

<u>系3.2. (H. Sato [12])</u> $\mathcal{H}^1(\mathbb{T}^2)^* = \mathrm{BMO}(\mathbb{T}^2)$

(証明) $\tilde{N}$ は、$K^2=L^2$ で自己共役である。したがって、定理3.1. と系1.1 より、$\tilde{N}(K^1)^* = \tilde{N}(\mathrm{BMO})$ である。ゆえに、定理3.1 より系3.2 が得られる。∎

<u>系3.3. (Gundy-Stein, [6])</u> $\mathcal{H}^1(\mathbb{T}^2) \approx h^1(\mathbb{T}^2)$

(略証) Gundy [6] P.305 より、$\|Mf^*\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{h^1}$ がわかる。これを使って、$h^1(\mathbb{T}^2)$ が $\tilde{N}(K^1)$ と同型になることが示せる。したがって定理3.1 より系3.3 が得られる。∎

系3.4. つぎの (a), (b), (c) は、同値である。

(a) $f \in (H^1(\mathbb{T}^2))^*$

(b) $f \in BMOA(\mathbb{T}^2)$

(c) ある $h \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ が存在して、

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{w_1 + z_1}{w_1 - z_1} h(w_1, 0)\, dm_1(w_1) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{w_2 + z_2}{w_2 - z_2} h(0, w_2)\, dm_2(w_2) + \frac{1}{4}\iint_{\mathbb{T}^2} \left(\prod_{j=1}^{2} \frac{w_j + z_j}{w_j - z_j}\right) \Delta h(w_1, w_2)\, dm(w) \quad ((z_1, z_2) \in D^2)$$

かつ $\|f\|_* \approx \|h\|_{L^\infty}$ 、ただし、ここで、

$\Delta h(w_1, w_2) = h(w_1, w_2) - h(w_1, 0) - h(0, w_1) + h(0, 0)$ とし、f, h で各々、f, h の D^2 への Poisson 拡張を表わすことにする。

(注：この結果は、$\mathbb{T}$ の場合、Baernstein II, Analytic function of bounded mean oscillation (in "Aspects of Contemporary Complex Analysis" Academic Press ('80)) に、関数論的証明がある。)

(注意) 系3.2と系3.3から、$BMO(\mathbb{T}^2)$ の Fefferman-Stein 型の分解が導びかれる。このことと、[5] P.397 で構成された関数の簡単な修正で、$\mathbb{T}^2$ 上では、Helson-Szegö の定理が必ずしも成立しないことがわかる。すなわち、つぎをみたす関数 W が構成できる。

(1) $0 \leqq W \leqq 1$ a.e. dm

(2) $\exists c>0,\ \forall f\in L^2(\mathbb{T}^2):\ \sum_{j=1}^{3}\iint_{\mathbb{T}^2}|\tilde{H}_j f|^2 w\,dm \leq c\iint_{\mathbb{T}^2}|f|^2 w\,dm$

(3) $\log w \notin \{ g_0+\sum_{j=1}^{3}\tilde{H}_j g_j \ :\ g_0,\cdots,g_3\in L^\infty(\mathbb{T}^2)\}$

§4. H^∞について。(1径数の場合)

この§では、以下の記号を使う。

$(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},(x_t)_{t\geq 0},(y_t)_{t\geq 0})$を完備Brown空間とし、

$z_t=x_t+\sqrt{-1}\,y_t\quad(t\geq 0)$とおく。

$\mathcal{G}$を$\mathcal{F}$の部分σ集合体としたとき、

$L^p(\mathcal{G})\equiv L^p(\Omega,\mathcal{G},P)$, $L^p\equiv L^p(\mathcal{F})$とし、

$H^p(\mathcal{G})\equiv\{x\in L^p(\mathcal{G}):\ \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}=0\}$, $H^p=H^p(\mathcal{F})\quad(1\leq p\leq\infty)$

とする。(注:ここでのH^∞は、§2, §3でのH^∞とは異なる。)

H^∞は、*弱Dirichlet環で、Corona定理をみたし([14])、解析構造をもたず([3])、*弱極大でない([16])。

この§での主要定理は、つぎの定理である。

定理4.1.(主要定理) Tを任意の$(\mathcal{F}_t)$停止時間で、$T<\infty$ a.s. とする。任意の$A\in\mathcal{F}_T$に対して、つぎの(1)、(2)を満たすAの分解$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$が存在する。

(1) $A_n\in\mathcal{F}_T\ (n\in\mathbb{N})$、$P(A_n\cap A_m)=0\ (n,m\in\mathbb{N},\ n\neq m)$,

$P(A\,\Delta\,\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=0$ (Δは対称差)

(2) 任意の $\varepsilon_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ と任意の $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N}, \sup_n a_n < \infty)$ に対して、つぎの (a), (b), (c) をみたす $X \in H^\infty$ が存在する。

(a) $X_R = 0$ (a.s. on A^c) (R は任意の $(\mathcal{F}_t)$ 停止時間)

(b) $0 < |X| \leqq a_n$ (a.s. on A_n) $(n \in \mathbb{N})$

(c) $P(A_n \setminus \{|X| = a_n\}) < \varepsilon_n$ $(n \in \mathbb{N})$

(証明の概略) $T_n = \inf\{t : |Z_t| = n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とし、

$K_n = \{T_n \leqq T\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とおく。

$A_1 = A \cap K_1^c$, $A_n = A \cap (K_{n-1} \setminus K_n)$ $(n \geqq 2)$ とおく。

$$\alpha(s, \omega) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq s \leqq T(\omega)) \\ 1 & (T(\omega) < s) \end{cases} \qquad (\omega \in \Omega)$$

とおき、

$$Y_t^{(n)} = \int_0^t \chi_{\{s < T_n\}} \alpha_s \, dZ_s \qquad (n \in \mathbb{N}, t \geqq 0)$$

とする。

$$R_n = \begin{cases} T & (\text{on } A_n^c) \\ \infty & (\text{on } A_n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

とおくと、ある $0 < \delta_n < 1$ が存在して、

$$P(A_n \setminus \{|Y_{R_n}^{(n)}| > \delta_n\}) < \varepsilon_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つことがわかる。そこで、

$$S_n = \inf\{t : |Y_{R_n \wedge t}^{(n)}| = \delta_n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

とおく。

$X=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\delta_n}Y^{(n)}_{R_n\wedge S_n}$ とすると、$X\in H^\infty$で、さらに、以上の $\{A_n\}$, X が、所要の性質をもつことが確かめられる。∎

系4.2. 任意の $A\in \cup\{\mathcal{F}_T : T$ は $T<\infty$ a.s. なる $(\mathcal{F}_t)$ 停止時間$\}$ と、任意の $\alpha, \varepsilon>0$ に対して、つぎをみたす $X\in H^\infty$ が存在する。

(1) $X_R=0$ (a.s. on A^c) (Rは、任意の$(\mathcal{F}_t)$ 停止時間)

(2) $0<|X|\leqq\alpha$ (a.s. on A)

(3) $P(A\setminus\{|X|=\alpha\})<\varepsilon$.

(証明) 定理4.1 で $a_1=a_2=\cdots=\alpha$, $\varepsilon_n=\varepsilon/2^n$ とすればよい。∎

定理4.1、系4.2 より、H^∞が解析環でない(したがって、*弱極大でない)ことが示されるが、さらに、つぎのことも定理4.1 から示される。

系4.3 H^∞の元の support set の特性関数で生成される*弱閉線型空間は、L^∞である。

(注意) よく知られているように、$H^\infty(\mathbb{T})$ の support set の特性関数は、本質的に、1か0だけである。

（注意）　この系から、$H^\infty_{max}=L^\infty$ となることがわかる。H^∞_{max} の定義については、Nakazi [9] 参照。

定理4.1は、H^∞ の単位球の端点の多くが、$H^\infty(\mathbb{T})$ のそれよりも非常に単純な形をしていることも示している。すなわち、つぎのことが証明できる。

系4.4.　$X\in H^\infty$ とする。T を $T<\infty$ a.s. なる $(\mathcal{F}_t)$ 停止時間とする。このとき、つぎの(1)、(2)は同値である。

(1)　X_T は、H^∞ の単位球の端点である。

(2)　$|X_T|=1$ a.s.

系4.5.　$f\in H^\infty(\mathbb{T})$ とする。つぎの(1)、(2)は、同値である。

(1)　Mf は、H^∞ の単位球の端点である。

(2)　f は内部関数である.

ところで、H^∞ を含む＊弱閉環が存在することが、定理4.1からわかったわけであるが、ここで、H^∞ を含む＊弱閉環に関して得た結果を述べる。

定理4.6.　T を $0<T<\infty$ a.s. なる任意の $(\mathcal{F}_t)$ 停止時間とし、

A_TをH^∞と$L^\infty(\mathfrak{m}_T)$で生成される*弱閉環とする。このとき、

$$H^\infty \subsetneqq A_T \subsetneqq L^\infty$$

*弱Dirichlet環の一般論において、H^∞_{min}の果たす役割は大きい（cf. Nakazi [9], [10]）。したがって、H^∞_{min}の形を決定することは、重要なことであるといえる。定理3.5.から、つぎの系が得られる。

<u>系4.7.</u> $H^\infty_{min} = H^\infty$

$\mathfrak{A}$をH^∞とM_zで生成される*弱閉環とする。系4.7.と*弱Dirichlet環の一般論（[7]、[10]）とから、H^∞と$\mathfrak{A}$の間に、必ず無限個の*弱閉環が存在することがわかる。ここで、それらを、つぎのように特徴づける。$\mathcal{B} = \sigma(M_z)$とする。

<u>定理4.8.</u> $H^\infty \subset B \subset \mathfrak{A}$なる*弱閉環$B$に対し、つぎが成り立つ。

(1) $H^\infty \subset B \subsetneqq \mathfrak{A} \Leftrightarrow B \cap L^\infty(\mathcal{B}) = H^\infty(\mathcal{B})$　(2) $H^\infty = B \Leftrightarrow B \cap \overline{B} \subset L^\infty(\mathcal{B})$

<u>系4.9（Carne [3]のNに関する結果の拡張）</u>

$\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$なる$\sigma$-集合体$\mathcal{G}$に対して、$E[\cdot \| \mathcal{G}]$が$H^\infty$上乗法的なら、$\mathcal{G} = \mathrm{trivial}$である。特に、Nは$H^\infty$上乗法的でない。

参考文献

[1] A. Bernard, Espace H^1 de martingales a deux indeces. Dualites avec les martingale de type «BMO», Bull. Sc. math. 2e Série 103 (1979) 297-303

[2] J. Brossard - L. Chevalier, Calcule stochastique et inégalités de norme pour les martingales bi-browniennes: application aux fonctions bi-harmoniques, Ann. Inst. Fourier, 30 (4) (1980) 97-120.

[3] K. Carne, The algebra of bounded holomorphic martingales, J. Funct. Anal. 45 (1982) 95-108.

[4]. E. Decamp, Caracterisation des espaces BMO de martingales dyadiques à deux indeces, et de fonctions bi-harmoniques sur $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$, These de doctrat, Grenoble (1979)

[5] R. Fefferman, Bounded mean oscillation on the polydisk, Ann. of Math. 110 (1979) 395-406

[6] R.F. Gundy, Inegalites pour martingales a un et deux indeces: l'espace H^p, Lect. Notes in Math. 774, 252-334.

[7] R. Kallenborn - H. König, An invariant subspace theorem in the Abstract Hardy algebra theory, Arch. Math. 39 (1982) 51-58

[8] P.A. Meyer, Un cours sur integrales stochastiques,

Lect. Notes in Math. 511, 246-400.

[9] T. Nakazi, Superalgebras of weak * Dirichlet algebras, Pacific J. Math. 68 (1977) 197-207

[10] T. Nakazi, Minimal superalgebras of weak * Dirichlet algebras, preprint

[11] W. Rudin, Function Theory in Polydiscs, Benjamin 1969.

[12] H. Sato, Caracterisation par les transformations de Riesz de la classe de Hardy H^1 de fonctions bi-harmoniques sur $\mathbb{R}_+^{m+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1}$, These de doctrat, Grenoble, (1979)

[13] N. Th. Varopoulos, A probabilistic proof of the Garnett-Jones theorem on BMO, Pacific J. Math. 90 (1980) 201-221

[14] N. Th. Varopoulos, The Helson-Szegö theorem and A_p-functions for Brownian motion and several variables, J. Funct. Anal. 39 (1980) 85-121

[15] N. Th. Varopoulos, Probabilistic approach to some problems in complex analysis, Bull. Sc. math. 2e Série 105 (1981) 181-224.

[16] 新井仁之・和田淳藏、関数環とmartingale，数理解析研究所講究録 491 (1983), 87-106.