数理解析研究所講究録
第523巻 1984年 142-152

Completely nondeterministic stochastic process と H^1 の extremal problem

北大応電研 中路貴彦 (Takahiko Nakazi)

本講演では、discrete、stationary、Gaussian process の過去と未来の様々な関係をその process のスペクトル測度を用いて表現する。過去と未来の関係のスペクトル測度による分類について知られている結果の紹介と同時に、過去と未来の共通部分を、H^1 のある extremal problem の解を用いて描く。更に、その共通部分に着目して新しい過去と未来の関係を考えて、そのスペクトル測度を調べる。

I章 Stationary process

P を確率測度、$L^2(P)$ を2乗可積分な実関数の作る空間とする。$\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ を discrete、zero-mean、stationary、Gaussian process とする。zero-mean とは $\int X_n\, dP = 0$ となることで、stationary とは covariance function $r_{s,t} = \int X_s X_t\, dP$ が、任意の n について

$r_{s+n,\,t+n} = r_{s,\,t}$ を満たすことであり、Gaussian とは実軸上の任意の Borel 部分集合 E について、

$$P(X^{-1}(E)) = (2b\pi)^{-1/2}\int_E e^{-(t-a)^2/2b}\,dt$$

を満たすことである。ここで、$a = \int X\,dP$、$b = \int (X-a)^2\,dP$ である。Gaussian の仮定から確率的な様相を Hilbert 空間 $L^2(P)$ の幾何のことばで解釈できる。例えば X_n によってはられた $L^2(P)$ の部分空間 M の中では、確率的独立性と直交とは同じことである。stationary の仮定から、Herglotz の定理によって、process X_n はいわゆるスペクトル表現をもつ。すなわち、円周上の確率測度 μ があって、$L^2(\mu)$ と M との間に isometry があり、X_n は $e^{in\theta}$ に移される。ここで、もともとの process $\{X_n\}$ は $L^2(\mu)$ での process $\{e^{in\theta}\}$ で表現された。測度 μ は process のスペクトル測度と呼ばれる。

過去 Z^- は $\{e^{in\theta}\}_{n\leq 0}$ の closed linear span を表わし、未来 Z^+ は $\{e^{in\theta}\}_{n>0}$ の closed linear span を表わす。また Z は $L^2(\mu)$ を表わす。本講演では、本質的である μ が絶対連続の場合、すなわち $\mu = w\,d\theta$ の場合のみを考える。$L^2(w) = L^2(w\,d\theta)$、$1 \leq p \leq \infty$ について $L^p = L^p(d\theta)$ とする。また Hardy 空間 H^p は $H^p = \{ f \in L^p : \int f e^{-in\theta}\,d\theta = 0 \quad n<0 \}$ で定義する。

II章 Nondeterministic process

$Z = Z^-$ となるとき、未来が全て予測可能で確率的には興味はない。1920年に Szegő [5, p86] は $Z \neq Z^-$ となるスペクトル測度の必要十分条件は、ある H^2 の outer 関数 h について $w = |h|^2$ と書けることを示した。これは他の表現では、$Z^- \cap Z^+ \not\ni e^{i\theta}$ または $\log w \in L^1$ と同じである。$Z \neq Z^-$ である process は nondeterministic process と呼ばれる。以下本講演では、$\mu = w\,d\theta$ かつある H^2 の outer 関数 h について $w = |h|^2$ を仮定する。このとき、Beurlingの定理より

$$\text{過去 } Z^- = \overline{h^{-1}}\,\overline{H^2} \text{、未来 } Z^+ = h^{-1} z H^2$$

と書ける。絶対値1の関数

$$\varphi = \bar{h} / h$$

は、本講演のスペクトル測度の分類において重要である。

III章 Orthogonal process

$j \neq l$ ならば $e^{ij\theta}$ と $e^{il\theta}$ が直交するとき、process は orthogonal process と呼ばれる。orthogonal process となるスペクトル測度は容易にわかるように w が定数に限る。$Z^{+/-}$ を Z^+ の Z^- への projection の閉包とする。このとき orthogonal process とは $Z^{+/-} = \{0\}$

と同値であることはすぐにわかる。

$\boxed{\text{定理 III} - 1}$（Levinson-McKean [5 , p97]）

$Z^{+/-} \neq Z^{-}$ となる必要十分条件は、ある inner 関数 g、b について、$\varphi = \bar{g}b$ と書けることである。

$\boxed{\text{定理 III} - 2}$（Hida [5, p101]）

$Z^{+/-}$ が n 次元（$n < \infty$）である必要十分条件は h が n 次の有理関数であることである。

定理 III − 1 と III − 2 は continuous process のときに示されたが、ほとんど同様にして discrete process の場合も示すことができる。$Z^{+/-}$ をもう少し詳しく調べると、もし $Z^{+/-} \neq Z^{-}$ ならば、$\varphi = \bar{g}b$ と書けるわけだが、g と b は互いに素に取れ、更に $\mathrm{supp}\, g \supset \mathrm{supp}\, b$ とできる。よって g が有限 Blashke 積ならば、b も有限 Blashke 積で、b の次数は g の次数以下にできる。$\mathrm{supp}\, g$ とは g の円周上の不連続点を示す。このとき、

$Z^{+/-} = \overline{h}^{-1}\, \overline{H^2 \ominus gH^2}$ 、$h \in H^2 \ominus gzH^2$

とできる。ここでもし他の inner 関数 g' について $h \in H^2 \ominus g'zH^2$ ならば $\overline{g'}g \in H^2$ となっている。S^*f

$= f - f(0)/z$ とすると、どんな正の整数 n についても $S^{*n} h \in H^2 \ominus \mathfrak{z} z H^2$ となっているので、h は S^* の non-cyclic 関数である。Douglas、Shapiro と Shields [4] は S^* の non-cyclic 関数を調べたので、h にそれを適用できる。例えば、円周を越えて h の pseudo continuation である meromorphic 関数 $\tilde{h}$ があり $\tilde{h}$ は $|z| > 1$ で Nevanlinna class に属する。またもし h が定数でないならば、$\int \mathrm{Log}\,|\mathrm{Re}\,h(e^{it})|\,dt > -\infty$ となる。

IV章 Completely nondeterministic process

$Z^{+/-}$ は stochastic process において重要である事が知られているが、我々は過去と未来の共通部分 $Z^- \cap Z^+$ を調べる。明らかに、$Z^{+/-} \supset Z^- \cap Z^+$ である。もし $Z^{+/-} = Z^- \cap Z^+$ ならば、$Z^- \cap Z^+ \neq Z^-$ なので定理III－1によって、ある inner 関数 $\mathfrak{z}$、b について $\varphi = \mathfrak{z} b$ と書ける。しかし更に次の事が正しい。

$\boxed{\text{定理IV－1}}$ (Levinson - McKean [5 , p97])

$Z^{+/-} = Z^- \cap Z^+$ である必要十分条件は、ある inner 関数 $\mathfrak{z}$ について、$\varphi = \bar{\mathfrak{z}}$ と書けることである。

$Z^- \cap Z^+$ の構造を調べるのに、H^1 の extremal problem の解を用いるのは有効である。$\varphi \in L^\infty$ のとき、

$$K_\varphi(f) = \int_0^{2\pi} f\,\varphi\, d\theta/2\pi \qquad (f \in H^1)$$

とする。$S = \{f \in H^1 : \|f\|_1 \leq 1\}$ とするとき、$\|K_\varphi\| = \sup\{|\int f \varphi\, d\theta/2\pi| : f \in S\}$ とし、

$$S_\varphi = \{f \in S : K_\varphi(f) = \|K_\varphi\|\}$$

とする。$S^1 = \{f \in H^1 : \|f\|_1 = 1\}$ とする。$f \in H^1$ のとき、$f \in S_\varphi$ である必要十分条件は $\varphi f \geq 0$ a.e. である。次の定理を Levinson - McKean は continuous process において示したが、discrete process の証明は、[2] に知られている。我々の必要性の証明は、[2] より少し簡単である。

$\boxed{\text{定理 V - 2}}$ (Levinson - McKean [5 , p100])

$Z^- \cap Z^+ = \{0\}$ となる必要十分条件は、ある定数 $\gamma > 0$ について $S_\varphi = \{\gamma h^2\}$ となることである。

証明　もし $F \in Z^- \cap Z^+$ かつ $F \neq 0$ ならば、$Z^- = \overline{h^{-1}}\,\overline{H^2}$ かつ $Z^+ = h^{-1} z H^2$ から、$F = \overline{h^{-1}}\,\overline{k} = h^{-1} f$ ($k \in H^2$、$f \in zH^2$) と書ける。よって $\varphi k f = |k|^2 \geq 0$ a.e. かつだからある $\gamma_1 > 0$ について $\gamma_1 k f \in S_\varphi$。かくして $S_\varphi \neq \{\gamma h^2\}$ かつ $\gamma = \|h^2\|_1^{-1}$。

逆に $\gamma = \|h^2\|^{-1}$ のとき、$S_\varphi \neq \{\gamma h^2\}$ ならば、$k \neq \gamma h^2$ となる $k \in S_\varphi$ が存在する。$(\gamma h^2 + k)/2 \in S_\varphi$ であるが、S の extreme point である必要十分条件は outer 関数であること〔3, Theorem 1〕より、$(\gamma h^2 + k)/2$ は outer 関数ではない。だから、ある定数でない inner 関数 $\mathfrak{z}$ と outer 関数 g について $\gamma h^2 + k = \mathfrak{z} g$ と書ける。$\bar{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}(0))(1 - \overline{\mathfrak{z}(0)}\mathfrak{z}) \geq 0$ a.e. から、ある $\gamma_2 > 0$ があって $\gamma_2(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}(0)) \times (1 - \overline{\mathfrak{z}(0)}\mathfrak{z}) g \in S_\varphi$。よってある inner 関数 $\mathfrak{z}_1$ ($\mathfrak{z}_1(0) = 0$) と outer 関数 g_1 があって、$\mathfrak{z}_1 g_1{}^2 \in S_\varphi$ とできる。だから $\bar{h}/h = \bar{g}_1/\mathfrak{z}_1 g_1$ かつ $h^{-1}\mathfrak{z}_1 g_1 = \bar{h}^{-1}\bar{g}_1$。かくして $Z^- \cap Z^+ \ni h^{-1}\mathfrak{z}_1 g_1 \neq 0$。

Sarason〔2〕は $Z^- \cap Z^+ = \{0\}$ となる process を completely nondeterministic process と呼んだ。

S_ψ が weak-* compact である必要十分条件は、ある正の整数 n について

$$S_\psi = \{\gamma p g^2 \in S^1 : \gamma > 0,\ p \in S_{\bar{z}^n}\}$$

と書ける事が知られている〔8, Theorem 2〕。ここで、$S_{|g|^2/g^2} = \{g^2\}$ であり、$S_{\bar{z}^n} = \{\gamma \prod_{j=1}^{n}(z - a_j)(1 - \bar{a}_j z) \in S^1 : \gamma > 0,\ |a_j| \leq 1\}$ である。この結果は、次

の定理の証明において本質的である。

$\boxed{\text{定理IV-3}}$ $n \neq 0$ かつ $n < \infty$ とする。次の(1)～(3)は同値である。

(1) $Z^- \cap Z^+$ は n 次元である。

(2) $h = p_0 g$ 。ここで p_0 は n 次の多項式で、g は $S_{|g|^2/g^2} = \{g^2\}$ を満たす。

(3) $Z^- \cap Z^+ = \{zp/p_0 : p$ は全ての $n-1$ 次以下の多項式を動く$\}$ かつ p_0 は n 次の多項式である。

V章 過去と未来の angle

Helson - Szegö〔 7 〕は過去と未来の angle の cosine $\rho_0(W)$ が 1 にならない必要十分条件を与えたことは大変有名である。もし $Z^- \cap Z^+ \neq \{0\}$ ならば、angle の cosine は常に 1 になるので、我々は $Z^- \cap Z^+$ の外側の Z^- と Z^+ の angle の cosine が 1 にならないスペクトル測度 W を調べる。

$$\rho(W) = \sup\left|\int \bar{f} g W d\theta/2\pi\right| .$$

ここで $f \in Z^-$ は $\| f + Z^- \cap Z^+ \| \leq 1$ 、$g \in Z^+$ は $\| g + Z^- \cap Z^+ \| \leq 1$ を全て動く。次の補題は、$\rho_0(W) < 1$ となる良く知られている必要十分条件は

$\|\varphi + H^\infty\| < 1$ となることであるのと比べると、興味ある。

$\boxed{\text{補題}}$ $\rho(W) < 1$ となる必要十分条件は、$\|\bar{\varphi} + H^\infty\| < 1$ となることである。

$\boxed{\text{定理V-1}}$ $\rho(W) < 1$ となる必要十分条件は、ある outer 関数 $F \in \mathfrak{z}\bar{H}^1 \cap H^1$ と $|k|^2 = e^{u+\tilde{v}}$ となるある outer 関数 $k \in H^2$ があって

$$h = F \times k$$

と書けることである。ここで、$\mathfrak{z}$ は inner 関数で、u、$v \in L^\infty$ は実関数で、$\|v\|_\infty < \pi/2$ となっている。

$\rho(W) < 1$ のとき、$\varphi = \mathfrak{z}|k|^2/k^2$ と書けるが、そのとき $Z^- \cap Z^+$ は一般に有限次元ではないが、我々は描くことができる。それによって、もし $Z^- \cap Z^+ = \{0\}$ ならば、$\mathfrak{z}$ は定数となりかつ F はまた定数となる。もし $Z^- \cap Z^+$ が有限次元ならば $\mathfrak{z}$ は有限 Blashke 積となる。$\rho_0(W) < 1$ と $\rho(W) < 1$ かつ $Z^- \cap Z^+ = \{0\}$ は同値であるから、Helson - Szegő の定理[7]は定理V-1の系として得られる。$\mathfrak{z}$ が有限 Blashke積のとき、F は有理

関数となる。だから、$\rho(w) < 1$ かつ $Z^- \cap Z^+$ は有限次元ということは、Helson - Sarason の定理[6, Theorem 6]と同値になる。もし $w \in L^\infty$ のとき、F は $H^2 \ominus \bar{z}zH^2 = z\bar{H}^2 \cap H^2$ に取れる。一方 $H^2 \ominus \bar{z}zH^2$ は Ahern - Clark によりその構造が良く知られている[1]。

参照　文献

1. Ahern, P.R. and Clark, D.N. : On functions orthogonal to invariant subspaces, Acta Math. 124 (1970), 191 - 204.
2. Bloomfield, P.B., Jewell, N.P., and Hayashi, E : Characterizations of completely nondeterministic stochastic process, Pacific J. Math. 107 (1983), 307 - 317.
3. deLeeuw, K. and Rudin, W : Extreme points and extremal problems in H^1, Pacific J. Math. 8 (1958), 467 - 485.
4. Douglas, R.G., Shapiro, H.S. and Shields, A.L. : Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 20 (1970), 37 - 76.

5. Dym, H. and McKean, H.P. : Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem, Probability and Mathematical Statistics 31 (1976), Academic Press. New York San Francisco London.

6. Helson, H and Sarason, D.E. : Past and future, Math. Scand. 21 (1967), 5-16.

7. Helson, H and Szegő. G : A problem in prediction theory, Ann. Mat. Pura Appl. 51 (1960), 107-138.

8. Nakazi, T : Exposed points and extremal problems in H^1, J. Functional Anal. 53 (1983), 224-230.