数理解析研究所講究録
第523巻 1984年 183-191

漸近的に有限である連続関数の多元環について

宮崎大 教育　　落合博二
(Hiroji Ochiai)

1 序論

コンパクトなハウスドルフ空間X(等)の上の連続関数の多元環と，そのイデアルについては，いろいろな研究がある。

例えば；

[4]: L.Gillman and M.Jerison: Rings of Continuous Functions. Springer-Verlag New York 1976.

[5]: Z.Semadani: Banach Spaces of Continuous Functions. Monograf. Matem., t.55, Warsawa 1971.

等々．

こゝでは，それらと異った，非アルキメデス的な賦値を持つ多元環の例を示す。

R を実数体とする時，R 上の関数 $f(x)$ が条件：

(i) 定義域が無限大 ∞ の近傍 $[a,\infty)$ を含む，

(ii) ある $t\in R$ に対して $f(x)=O(x^t)$ $(x\to\infty)$ である，

を満たす時，$f(x)$ は $(+\infty)$ で漸近的に有限であるという。
漸近的に有限な関数のクラスを $\mathcal{P}$ で表わす．

$$(1.1)\qquad \mathcal{A}=\{f\in\mathcal{P};\ f\text{ は }[0,\infty)\text{ で連続}\}$$

と定義される多元環 $\mathcal{A}$ のイデアル構造について述べる

なお "$\mathfrak{A}$ はいわゆる緩増大な超関数の族 $\mathcal{S}'$ の部分族になっている" ことを注意しておく。

J. Popken [2], [1, p. 187] は $f \in \mathcal{P}$ に対してノルム $\|f\|$ を

(1.2) $\qquad \|f\| = e^{\lambda},$

と定義した。ここで $\lambda = \inf\{t \in R;\ f(x) = O(x^t)\}$ である。

このノルムは次の性質を持っている：

(i) $\|f\| \geqq 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow$ 任意の $t > 0$ に対し，$x \to \infty$ の時 $x^t f(x) \to 0$

(1.3)
(ii) 任意の $c \in R$ に対し，$\|cf\| = \|f\|$,

(iii) $\|f + g\| \leqq \max(\|f\|, \|g\|)$,

更に

(iv) $\|f \cdot g\| \leqq \|f\| \|g\|$.

(i) で述べた "任意の $t > 0$ に対し $x \to \infty$ の時 $x^t f(x) \to 0$" というのは $f(x)$ が ∞ において，

$$f(x) \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \cdots\cdots,$$

と漸近展開される，つまり "$f(x)$ が漸近的に 0 に等しい" ことを意味している。このことを

(1.4) $\qquad f \sim 0$

と書く。又 $f \sim g$ とは $f - g \sim 0$ であることと定義すると，$\sim$ は同値関係である。$[\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}/\sim$ と置けば $[\mathfrak{A}]$ も多元環であり，$[f] \in [\mathfrak{A}]$ に対し $\|[f]\| = \|f\|$ とすれば $\|[f]\| = 0 \Leftrightarrow [f] = 0$

である。$[f], [g] \in [\mathfrak{A}]$ に対して，

(1.5) $$d([f],[g]) = \|f-g\|$$

とおくと，$d([f],[g])$ は $[\mathfrak{A}]$ に距離を定義し，従って $[\mathfrak{A}]$ に位相が導入される。これから又 $\mathfrak{A}$ に位相が定義されることになる。"$[\mathfrak{A}]$ が d に関して完備である"ことは Popken [1. P.191] と同様にして証明される。そこでは連続性を仮定しない $\mathfrak{P}$ の場合が述べられているが若干の修正によって連続関数の場合の完備性が導かれる。なおこの距離 d は超距離であること，つまり任意の $h \in \mathfrak{A}$ に対して，$d([f],[g]) \leqq \max(d([f],[h]), d([h],[g]))$ が成り立つ。又ノルム $\|f\|$ は同次性条件：$\|cf\| = |c|\|f\|$ を満たさないから通常のノルムと異なるものであることを注意しておく。

$^*R$ を R の超積モデルとし，$^*R_{+\infty}$ を $^*R$ 上の正の無限大数の集合とする。この時次の諸定理が成り立つ。

定理 1. 任意の $x_0 \in R$ に対し，$I(x_0) = \{f \in \mathfrak{A} ; f(x_0) = 0\}$ と置くと，$I(x_0)$ は $\mathfrak{A}$ の極大イデアルである。

定理 2. 任意の $\kappa \in {}^*R_{+\infty}$ に対し，$I(\kappa) = \{f \in \mathfrak{A} ; |f(\kappa)| < \kappa^{-n}, \text{ for any } n \in N\}$ と置くと，$I(\kappa)$ は $\mathfrak{A}$ の極大イデアルである。

定理 3. $I(\kappa)$ は $f_n \in I$，$f \in \mathfrak{A}$，$\lim_{n\to\infty} d([f_n],[f]) = 0$ ならば $f \in I$ である，と言う意味において距離 d に関して閉じている。しかし $I(x_0)$ は閉じていない。

定理4　$\mathfrak{A}$の極大イデアルIはある$x_0 \in R$に対して$I = I(x_0)$であるか，又は一つの$\kappa \in {}^*R_{+\infty}$に対して$I = I(\kappa)$であるかである。

2　定理1の証明

$I(x_0)$は明らかにイデアルであるから，極大であることを示す。Jを$I(x_0)$を真に含むイデアルとし，$g \in J - I(x_0)$をとる。$x \neq x_0$なるxに対しては$f(x) \neq 0$，$x \geqq a = x_0 + 1$なるxに対しては$f(x) = 1$である$I(x_0)$の関数fをとり，$F(x) = f(x)^2 + g(x)^2$とおくと，$F \in J$である。更にFはすべての$x \in R$に対して$F(x) \neq 0$であり，$x \geqq a$なら$0 < 1/F(x) \leqq 1$だから$1/F \in \mathfrak{A}$従って$1 = (1/F)f^2 + (1/F)g^2 \in J$となり$J = \mathfrak{A}$である。それ故$I(x_0)$は極大イデアルである。

3　定理2の証明

明らかに$I(\kappa)$は$\mathfrak{A}$のイデアルである。

${}^*R$は超積モデルだから無限大κは列$\{a_n\}_{n \in N}$の同値類で定義される（$a_n > 0$として良い）。

Jを$I(\kappa)$を真に含むイデアルとし，$g \in J - I(\kappa)$とする。と定義から$m \in N$があって，

(3.1)　$|g(\kappa)| \geqq \kappa^{-m}$

となる。gは連続であるから無限小$\delta > 0$があって

(3.2)　$|\kappa' - \kappa| < \delta$ならば$|g(\kappa') - g(\kappa)| < \kappa^{-m-1}$

となる。すると

(3.3) $|g(\kappa')| > |g(\kappa)| - \kappa^{-m-1} > \kappa^{-m} - \kappa^{-m-1} > \kappa^{-m-1} > 2^{-m-1}\kappa'^{-m-1}$

が得られる。δ が列 $\{c_n\}_{n\in N}$ $(c_n > 0)$ によって定義されるとし連続関数 $f(x)$ を；

(3.4) すべての n に対して $f(a_n) = a_n^{-a_n}$,

(3.4′) $x \notin \bigcup_n (a_n - c_n,\ a_n + c_n)$ に対して $f(x) = 1$

(3.4″) $[a_n - c_n,\ a_n]$, $[a_n, a_n + c_n]$ なる各区間上では直線で結ばれるものとして定義すると，$f(x)$ は有界であるから明らかに $f \in I(\kappa)$ である。$F(x) = f(x)^2 + g(x)^2$ とおくと，

$F(x) \neq 0$ かつ $F \in J$ であり，(3.2), (3.3), (3.4′) によって，

(3.5) 任意の $\kappa' \in {}^*R_{+\infty}$ に対して $|F(\kappa')| \geqq (2^{-m-1}\kappa'^{-m-1})^2$

が示され，従って $1/F \in \mathfrak{A}$ 更に $J = \mathfrak{A}$ となる。このことから $I(\kappa)$ は極大イデアルであることが分かる。

4 定理3の証明

(1) $f_n \in I(\kappa)$ とし，ある $f \in \mathfrak{A}$ に対して $\|f_n - f\| \to 0$ と仮定する。すると [1. P.182 定理3.4 および P.175 定義2.1] により任意の $t \in R$ に対し，ある $g \in N$ があって，$n \in N$, $n > g$ のとき，すべての $\kappa' \in {}^*R_{+\infty}$ に対し $\kappa'^t |f(\kappa') - f_n(\kappa')|$ は無限小となる。それ故 $|f(\kappa)| \leqq |f_n(\kappa)| + (\text{無限小})\cdot \kappa^{-t} \leqq \kappa^{-t+1}$

となり，従って $f \in I(\kappa)$ となる。よって $I(\kappa)$ が閉じていることが分かる。

(2) $f_0 \in \mathfrak{A}$ は $f_0(x_0) \neq 0$ でかつ $f_0 \sim 0$ とする。$f_n \in I(x_0)$ はある $f \in \mathfrak{A}$ に対し $d([f_n],[f]) \longrightarrow 0$ となるものとする。もし $f(x_0)=0$ ならば $f^*(x) = f(x) + f_0(x)$ とおく。明らかに，$f \in \mathfrak{A}$ であるから $f^* \in \mathfrak{A}$ である。ノルムの定義から $\{f_n\}$ は又 (1.5) の距離によって f^* に収束する。所が $f^*(x_0) \neq 0$ だから $f^* \notin I(x_0)$ である。即ち $I(x_0)$ は閉じていない。

§5 定理4の証明

I を $\mathfrak{A}$ の極大イデアルとし，どんな $x_0 \in R$ に対しても $I \neq I(x_0)$ となるものと仮定する。$\mathfrak{A}$ の関数 f に対して，

(5.1) $$Z(f) = \{x \in R;\ f(x) = 0\}$$

とおく。すると

(5.2) $$\bigcap_{f \in I} Z(f) = \phi$$

でなければならない。

関数 $f \in I$ に対してある $a, b \in R$ があって $Z(f) \subset [a, b]$ となると仮定する。$x_1 \in Z(f)$ とすると $g_1(x_1) \neq 0$ となる $g_1 \in I$ があり，$|x - x_1| < \delta_1$ なら $g_1(x) \neq 0$ となる $\delta_1 > 0$ がある。$Z(f)$ はコンパクトであるから I の関数 $g_1, \cdots g_m$ と $Z(f)$ の数 $x_1, \cdots x_m$ と正数 $\delta_1, \cdots, \delta_m$ で $|x - x_j| < \delta_j$ なる x に対して $g_j(x) \neq 0$ かつ $\bigcup_{j=1}^{m} (x_j - \delta_j, x_j + \delta_j) \supset Z(f)$ となるものが存在する。そこで

$$F = f^2 + g_1^2 + \cdots + g_m^2$$

とおくと，$F > 0$ である。もし $p \in N$ があって任意の $\kappa \in {}^*R_{+\infty}$

に対して $F(\kappa) > \kappa^{-p}$ となるならそのとき $1/F \in \mathfrak{a}$ そして，
$1 = (1/F)f^2 + (1/F)g_1^2 + \cdots + (1/F)g_m^2 \in I$ となって矛盾であるから，任意の $p \in N$ に対して $F(\kappa_p) \leqq \kappa_p^{-p}$ となるような $\kappa_p \in {}^*R_{+\infty}$ がある。κ_p は列 $\{x_n^{(p)}\}_{n \in N}$ によって定義されているとする。
$\mathcal{F}$ を超積モデルを構成する為の極大フィルターとする。その時すべての $p \in N$ に対して $\{n ; F(x_n^{(p)}) \leqq (x_n^{(p)})^{-p}\} \in \mathcal{F}$ である。
帰納法によって，自然数列 $\{n_p\}$ を $n_p \geqq 2n_{p-1}$, $x_{n_1}^{(1)} > 1$,
$x_{n_p}^{(p)} \geqq 2\, x_{n_{p-1}}^{(p-1)}$, $F(x_{n_p}^{(p)}) \leqq (x_{n_p}^{(p)})^{-p}$, を満たすようにとることが出来る。$x_p = x_{n_p}^{(p)}$ とおく。$n \in N$ をとると，もし $p > n$ なら $F(x_p) \leqq x_p^{-p} < x_p^{-n}$ である。$\kappa \in {}^*R_{+\infty}$ を $\{x_p\}_{p \in N}$ で定義される無限大とすると，任意の $p \in N$ に対して $F(\kappa) \leqq \kappa^{-p}$ である。これから任意の有限個の I の関数の組 $\{h_1, \cdots h_\ell\}$ に対して，ある $\kappa \in {}^*R_{+\infty}$ が存在して $h_j \in I(\kappa)$, $j = 1, 2, \cdots, \ell$ が成り立つ。故にコンパクト性定理によって $I \subset I(\kappa)$ となる $\kappa \in {}^*R_{+\infty}$ が存在する。I は極大であるから，$I = I(\kappa)$ でなければならない。

次に，すべての $f \in I$ に対して $Z(f)$ が有界でないと仮定する。それ故ある $\kappa \in {}^*R_{+\infty}$ があって $f(\kappa) \neq 0$ である。

(5-3) $$\widetilde{Z}(f) = \{\kappa \in {}^*R_{+\infty} ; |f(\kappa)| < \kappa^{-p} \text{ for any } p \in N\}$$

とおく。もし $\bigcap_{f \in I} \widetilde{Z}(f) \neq \phi$ ならその時明らかにある $\kappa \in {}^*R_{+\infty}$ があって，$I = I(\kappa)$ である。従って $\bigcap_{f \in I} \widetilde{Z}(f) = \phi$ と仮定し

てよい。

(5.4) $\qquad \tilde{Z}(g_1)\cap\cdots\cap\tilde{Z}(g_m)=\phi$

となる I の関数 $g_1,\cdots,g_m$ が存在すると仮定する。この時もし $Z(h_1)\cap\cdots\cap Z(h_l)=\phi$ となる I の関数 $h_1,\cdots,h_l$ が存在すれば $h_1,\cdots,h_l,g_1,\cdots,g_m$ を $f_1,\cdots,f_k$, $k=l+m$ と書いて,

$$\tilde{Z}(f_1)\cap\cdots\cap\tilde{Z}(f_k)=\phi,$$

$$Z(f_1)\cap\cdots\cap Z(f_k)=\phi$$

と仮定出来る。

$$F=f_1^2+\cdots+f_k^2$$

とおくと, 任意の $x\in R$ に対して $F(x)\neq 0$ であり, さらに, $\tilde{Z}(F)=\phi$ である。もし $p\in N$ があって任意の $\kappa'\in {}^*R_{+\infty}$ に対して $F(\kappa')\geqq \kappa'^{-p}$ となるならば, その時 $1/F\in \mathfrak{A}$, そして, $1=(1/F)f_1^2+\cdots+(1/F)f_k^2\in I$ となって矛盾である。それ故任意の $p\in N$ に対して $0<F(\kappa_p)\leqq \kappa_p^{-p}$ となるような $\kappa_p\in {}^*R_{+\infty}$ が存在する。

前の議論と同様にして, $\kappa\in {}^*R_{+\infty}$ が存在して任意の $p\in N$ に対して $F(\kappa)\leqq \kappa^{-p}$ となることが導けるが, これは $\tilde{Z}(F)=\phi$ と矛盾する。このようにして, I の関数の任意の有限個の組 $f_1,\cdots,f_k$ に対しては

$$\tilde{Z}(f_1)\cap\cdots\cap\tilde{Z}(f_k)\neq\phi$$

か又は $\qquad Z(f_1)\cap\cdots\cap Z(f_k)\neq\phi$

である。もし $Z(f_1)\cap\cdots\cap Z(f_k)\neq\phi$ なら $f_j(\kappa)=0$ $(j=1,2,\cdots,k)$ となる $\kappa\in{}^*R_{+\infty}$ が存在し，これから，$\tilde{Z}(f_1)\cap\cdots\cap\tilde{Z}(f_k)\neq\phi$ が得られる。従って I の関数の任意の有限個の組 $f_1,\cdots,f_k$ に対して

$$(5.5)\qquad \tilde{Z}(f_1)\cap\cdots\cap\tilde{Z}(f_k)\neq\phi$$

を得る。そしてこれからコンパクト性定理によって

$$\bigcap_{f\in I}\tilde{Z}(f)\neq\phi$$

を得る。これは $I=I(\kappa)$ となる $\kappa\in{}^*R_{+\infty}$ の存在を示すものであり，定理は証明された。

参考文献

1. A.H.Lightstone and A.Robinson: Nonarchimedian Fields and asympototic Expansions. North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1975.

2. J.Popken: Asymptotic expansions from an algebraic stand point, Indag. Math., 15(1953), 131-143.

3. A.Robinson: Nonstandard Analysis. North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1966.

4. L.Gillman and M.Jerison: Rings of Continuous Functions. Springer-Verlag New York 1976.

5. Z.Semadani: Banach Spaces of Continuous Functions. Monograf. Matem., t.55, Warsawa 1971.