数理解析研究所講究録
第 523 巻 1984 年 192-207

$bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multipliers について

茨城大 理　中井 英一 (Eiichi Nakai)
茨城大 理　薮田 公三 (Kôzô Yabuta)

§1. 緒論.

函数は複素数値とする。函数 $g(x)$ を，他の函数に各点ごとに掛ける作用素，とみるとき pointwise multiplier と呼ぶ。目的は，函数空間 $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multipliers の特徴づけである。

始めに函数空間 $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ を定義する。記号 $I = I(a,r)$ を用いて，点 $a \in \mathbb{R}^n$ を中心にもち，各辺が座標軸に平行で長さが r の n 次元立方体を表わす。$|E|$ で可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度を表わす。函数 f の I における平均値と平均振動量をそれぞれ $f_I = M(f,I) = |I|^{-1}\int_I f(x)\,dx$, $MO(f,I) = |I|^{-1}\int_I |f(x)-f_I|\,dx$ とする。また ϕ を正の実数 $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ から $\mathbb{R}_+$ への単調非減少函数とし，これを growth function と呼ぶことにする。ここで以上の記号

を用いて次のように定義する。

$$\|f\|_{BMO_\phi} = \sup_{I(a,r)\subset\mathbb{R}^n} MO(f, I(a,r))/\phi(r),$$

$$\|f\|_{bmo_\phi} = \|f\|_{BMO_\phi} + |f_{I(0,1)}|,$$

$$bmo_\phi(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) ; \|f\|_{bmo_\phi} < \infty \}.$$

$\|f\|_{BMO_\phi}$ で定義される空間は定数を法として Banach 空間となるが，$\|f\|_{bmo_\phi}$ で定義すると函数のままで Banach 空間になる。pointwise multipliers を考える場合には，$\|f\|_{bmo_\phi}$ が適する。また，growth functions ϕ_1 と ϕ_2 が同値ならば，すなわちある定数 $C>0$ が存在して $C^{-1}\phi_1(r) \le \phi_2(r) \le C\phi_1(r)$ となるならば，$bmo_{\phi_1}(\mathbb{R}^n) = bmo_{\phi_2}(\mathbb{R}^n)$ となる。

正値函数 $h(r)$ が almost decreasing であるとは，ある定数 $A>0$ が存在して $h(r) \le A h(s)$，$r \ge s$ を満たすことをいう。Janson [2] は，n 次元トーラス $\mathbb{T}^n$ の場合に次の結果を得ている。

定理 J. $\phi(r)/r$ が almost decreasing ならば，g が $bmo_\phi(\mathbb{T}^n)$ 上の pointwise multiplier であるための必要十分条件は $g \in bmo_\psi(\mathbb{T}^n) \cap L^\infty(\mathbb{T}^n)$ である。ただし

$$\psi(r) = \phi(r) / \int_r^1 \phi(t) t^{-1} dt.$$

これを $\mathbb{R}^n$ 上に拡張するために，あらたに次のような函数空間を導入する。

$$w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ ,$$

$$\|f\|_{BMO_w} = \sup_{I(a,r)\subset\mathbb{R}^n} MO(f, I(a,r))/w(a,r) ,$$

$$\|f\|_{bmo_w} = \|f\|_{BMO_w} + |f_{I(0,1)}| ,$$

$$bmo_w(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) ; \|f\|_{bmo_w} < \infty \}.$$

この函数空間を用いて次の結果を得た。

定理 1. $\phi(r)/r$ が almost decreasing ならば，g が $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier であるための必要十分条件は $g \in bmo_{w_\phi}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。ただし

$$w_\phi(x,r) = \phi(r) / \left(\left| \int_r^1 \phi(t)t^{-1}dt \right| + \int_1^{2+|x|} \phi(t)t^{-1}dt \right).$$

$\mathbb{T}^n$ のように有界な場所で定義される空間 bmo_ϕ は，$r = 0$ の近傍での ϕ の挙動で決定される。しかし $\mathbb{R}^n$ のように有界でない場合には，ϕ の ∞ での挙動にも左右される。そのため pointwise multiplier であるための条件も，$|x|$ が大なるときは $w_\phi(x,r)$ という形で影響をうける。

部分空間 $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)$ については，次の結果が得られる。

定理２．(1) $1\le p<\infty$ とする。$\phi(r)/r$ が almost decreasing ならば，g が $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)$ から $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier であるための必要十分条件は $g\in bmo_\psi(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。ただし

$$\psi(r)=\phi(r)\Big/\int_{\min(1,r)}^{2}\phi(t)t^{-1}dt\,.$$

(2) $\phi(r)/r$ が almost decreasing ならば，g が $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ から $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier であるための必要十分条件は $g\in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。

証明は，§２の準備と§3の補題を用いて§4で行う。

尚，$\phi(r)/r$ が almost decreasing ならば，ϕ と同値な growth function で concave なものが存在する。

§２．準備．

growth function ϕ は，以後 $\phi(r)/r$ が almost decreasing

であるものとする。ϕに対して

$$\Phi^*(r)=\begin{cases}\int_1^r \phi(t)t^{-1}dt & 2\le r\\ \int_1^2 \phi(t)t^{-1}dt & 0<r<2,\end{cases}$$

$$\Phi_*(r)=\begin{cases}\int_r^2 \phi(t)t^{-1}dt & 0<r<1\\ \int_1^2 \phi(t)t^{-1}dt & 1\le r\end{cases}$$

とおくと,

$$C^{-1}w_\phi(x,r)\le\frac{\phi(r)}{\Phi_*(r)+\Phi^*(r)+\Phi^*(|x|)}\le C\,w_\phi(x,r).$$

また次のことが知られている（Spanne [4] 等）。

補題2.1. $\Phi^*(|x|),\ \Phi_*(|x|)\in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$.

補題2.2. $|F(x)-F(y)|\le C|x-y|$ ならば
$MO(F(f),I)\le 2C\,MO(f,I)$.

補題2.3. $\rho(f,r)=\sup_{a\in\mathbb{R}^n,\,t\le r} MO(f,I(a,t))$ と書く。$I(a',r')\subset I(a,r)$ ならば,

$$|M(f,I(a',r'))-M(f,I(a,r))|\le C\int_{r'}^{2r}\rho(f,t)t^{-1}dt.$$

§3. 補題.

定理の証明のための補題を述べる。

補題3.1. ある定数 $C>0$ が存在して，任意の $f\in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ と任意の $I(a,r)\subset\mathbb{R}^n$ に対して

$$|M(f,I(a,r))|\le C\,\|f\|_{bmo_\phi}\left(\Phi_*(r)+\Phi^*(r)+\Phi^*(|a|)\right).$$

証明. $r\ge 1$, $|a|\ge r$ の場合. $I(a,r), I(0,1)\subset I(0,r+2|a|)$ であるから補題2.3により

$$
\begin{aligned}
&|M(f,I(a,r))-M(f,I(0,1))|\\
&\le |M(f,I(a,r))-M(f,I(0,r+2|a|))|+|M(f,I(0,1))-M(f,I(0,r+2|a|))|\\
&\le C\int_r^{2(r+2|a|)}\rho(f,t)t^{-1}dt + C\int_1^{2(r+2|a|)}\rho(f,t)t^{-1}dt\\
&\le 2C\int_1^{6|a|}\rho(f,t)t^{-1}dt \le 2C\,\|f\|_{BMO_\phi}\int_1^{6|a|}\phi(t)t^{-1}dt\\
&= 2C\,\|f\|_{BMO_\phi}\Phi^*(6|a|)\le C'\,\|f\|_{BMO_\phi}\Phi^*(|a|).
\end{aligned}
$$

同様にして，$1\le r$, $|a|\le r$ の場合は，

$$|M(f,I(a,r))-M(f,I(0,1))|\le C\,\|f\|_{BMO_\phi}\Phi^*(r).$$

$r \le 1,\ 1 \le |a|$ の場合は,

$$|M(f, I(a,r)) - M(f, I(0,1))| \le C\|f\|_{BMO_\phi}(\Phi_*(r) + \Phi^*(|a|)).$$

$r \le 1,\ |a| \le 1$ の場合は,

$$|M(f, I(a,r)) - M(f, I(0,1))| \le C\|f\|_{BMO_\phi}\Phi_*(r).$$

以上あわせて

$$\begin{aligned}|M(f, I(a,r))| &\le |M(f, I(0,1))| + C\|f\|_{BMO_\phi}(\Phi_*(r) + \Phi^*(r) + \Phi^*(|a|)) \\ &\le C'\|f\|_{bmo_\phi}(\Phi_*(r) + \Phi^*(r) + \Phi^*(|a|)).\end{aligned}$$

□

注意 3.1. 補題 3.1 の評価式は sharp である。実際 $\Phi^*(|x|) \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ を考えると,

$$M(\Phi^*(|x|), I(a,r)) \ge C\Phi^*(r)\ ,\ C\Phi^*(|a|).$$

また $\Phi_*(|x-a|)$ を考えると, $\|\Phi_*(|x-a|)\|_{bmo_\phi} \le C_0$ (a によらない) であり, かつ

$$M(\Phi_*(|x-a|), I(a,r)) \ge C\,\Phi_*(r).$$

補題 3.2. $1 \le p < \infty$ とする。ある定数 $C > 0$ が存在して任意の $f \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ と任意の $I(a,r) \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$|M(f,I(a,r))| \le C(\|f\|_{BMO_\phi} + \|f\|_{L^p})\Phi_*(r).$$

証明．$1 \le r$ の場合，Hölder の不等式により

$$|M(f,I(a,r))| \le (|I|^{-1}\int_I |f(x)|^p dx)^{1/p} \le \|f\|_{L^p}$$
$$\le C\Phi_*(r)\|f\|_{L^p}.$$

$0<r<1$ の場合，$I(a,r) \subset I(a,1)$ であるから，補題 2.3 より

$$|M(f,I(a,r))| \le |M(f,I(a,r)) - M(f,I(a,1))| + |M(f,I(a,1))|$$
$$\le C\int_r^2 P(f,t)t^{-1}dt + |M(f,I(a,1))| \le C\Phi_*(r)\|f\|_{BMO_\phi} + \|f\|_{L^p}$$
$$\le C'(\|f\|_{BMO_\phi} + \|f\|_{L^p})\Phi_*(r). \qquad \square$$

注意 3.2．$f(x) = \Phi_*(|x-a|) - \Phi_*(1)$ とおくと，$\|f\|_{L^p} \le C_p$，$\|f\|_{BMO_\phi} \le C_0$（a によらない），かつ

$$M(f,I(a,r)) \ge C\Phi_*(r), \quad r \le 1.$$

補題 3.3．$f \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$，$g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする。$fg \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ であるための必要十分条件は，

$$F(f,g) = \sup_{I(a,r)} |M(f,I(a,r))|\, MO(g,I(a,r))/\phi(r) < \infty$$

である。またこのとき，

$$F(f,g) \le \|fg\|_{BMO_\phi} + 2\|g\|_{L^\infty}\|f\|_{BMO_\phi}.$$

証明. 任意の $I = I(a, r)$ に対して

$$|MO(fg, I) - |f_I| MO(g, I)| \le 2\|g\|_{L^\infty} MO(f, I)$$

が成り立つ(Stegenga [5, P582])。したがって

$$\left| \frac{MO(fg, I)}{\phi(r)} - \frac{|f_I| MO(g, I)}{\phi(r)} \right| \le 2\|g\|_{L^\infty} \|f\|_{BMO_\phi}.$$

$bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ の定義から，補題の主張が成立する。 $\square$

補題 3.4. $1 \le p \le \infty$ とする。g が $bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ から $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier ならば，$g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。

証明. はじめに，$bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ は $\|f\|_{BMO_\phi} + \|f\|_{L^p}$ をノルムとして Banach 空間になる。$bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ は $\|f\|_{bmo_\phi}$ をノルムとして Banach 空間であるから，閉グラフ定理により

$$\|gf\|_{bmo_\phi} \le C(\|f\|_{BMO_\phi} + \|f\|_{L^p}),$$

$$f \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n).$$

次に $r<1$ であるような $I(a,r)$ に対して，函数 $h \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ を次のように定義する。

$$h(x) = \begin{cases} 0 & r \le |x-a| \\ \exp(i\Phi_*(|x-a|)) - \exp(i\Phi_*(r)) & |x-a| < r. \end{cases}$$

補題 2.2 により，$\|h\|_{BMO_\phi} \le C_0 \|\Phi_*(|x|)\|_{BMO_\phi}$．また $|h(x)| \le 2$，$\mathrm{supp}\, h \subset I(a,2)$ により，$\|h\|_{L^p} \le C_p$．よって $\|gh\|_{bmo_\phi} \le C(\|h\|_{BMO_\phi} + \|h\|_{L^p}) \le C_1$（$I$ によらない）．したがって

$$(3.1) \qquad MO(gh, I(a,4r)) \le C_1 \phi(4r).$$

C_2, C_3 を次のような定数とする：$\log C_2 = \pi/\phi(1)$，$1 < C_2C_3 < C_2$．また $L_r = \{x;\ r/C_2 \le |x-a| \le r/C_2C_3\}$ とおく。もし $x \in L_r$ ならば，$\phi(r)/r$ が almost decreasing であることを使って，

$$\frac{\phi(r)}{AC_2C_3} \log C_2C_3 \le \phi\left(\frac{r}{C_2C_3}\right) \log C_2C_3 \le \int_{r/C_2C_3}^{r} \phi(t)t^{-1}dt$$

$$\le \Phi_*(|x-a|) - \Phi_*(r) \le \int_{r/C_2}^{r} \phi(t)t^{-1}dt \le \phi(1)\log C_2 = \pi.$$

不等式 $|e^{i\theta} - 1| \ge 2\theta/\pi$ $(0 \le \theta \le \pi)$ により，$x \in L_r$ ならば $|h(x)| \ge C_4 \phi(r)$．$\sigma = M(gh, I(a,4r))$ とすれば

$$MO(gh, I(a,4r))\,|I(a,4r)| = \int_{I(a,4r)} |gh(x)-\sigma|\,dx$$

$$\geq \int_{L_r} |gh(x)-\sigma|\,dx + \int_{I(a,4r)\setminus I(a,2r)} |\sigma|\,dx$$

$$\geq \int_{L_r} (|gh(x)-\sigma| + |\sigma|)\,dx \quad \geq \quad \int_{L_r} |gh(x)|\,dx$$

$$\geq C_4\,\phi(r) \int_{L_r} |g(x)|\,dx .$$

したがって (3.1) とあわせて

$$|L_r|^{-1}\int_{L_r}|g(x)|\,dx \leq C_1\,\phi(4r)\,|I(a,4r)| \,/\, C_4\phi(r)\,|L_r|$$
$$\leq C_5 .$$

ここで $r \downarrow 0$ とすることにより

$$|g(a)| \leq C_5 \qquad a.e. \qquad \square$$

§4. 定理の証明.

定理1の証明. g が $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier であるとする。補題3.4により $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 補題3.3と閉グラフ定理により

$$\sup_{I(a,r)} \frac{|f_I|\,MO(g,I)}{\phi(r)} \leq C\,\|f\|_{bmo_\phi}, \quad f \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n).$$

$f(x)$として $\Phi^*(|x|)$ または $\Phi_*(|x-a|)$ をとると，注意3.1により，

$$\sup_{I(a,r)} (\Phi_*(r)+\Phi^*(r)+\Phi^*(|a|))MO(g,I)/\phi(r) < \infty$$

すなわち

$$\sup_{I(a,r)} MO(g,I(a,r))/w_\phi(a,r) < \infty .$$

逆に $g \in bmo_{w_\phi}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする。補題3.1により，

$$\frac{|f_I|\,MO(g,I)}{\phi(r)} \leq C\|f\|_{bmo_\phi}(\Phi_*(r)+\Phi^*(r)+\Phi^*(|a|))MO(g,I)/\phi(r)$$

$$\leq C'\|g\|_{BMO_{w_\phi}}\|f\|_{bmo_\phi} , \quad f \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n),\ I=I(a,r)\subset\mathbb{R}^n.$$

したがって補題3.3により $fg \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$. $\square$

定理2の証明．(1) gが $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)$ から $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier であるとする。補題3.4により $g\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
補題3.3と閉グラフ定理により

$$\sup_{I(a,r)} \frac{|f_I|\,MO(g,I)}{\phi(r)} \leq C(\|f\|_{BMO_\phi}+\|f\|_{L^p}).$$

$f(x)$として $\Phi_*(|x-a|)-\Phi_*(1)$ をとると，注意3.2により，

$$\sup_{I(a,r),\,r\leq 1} \Phi_*(r)\,MO(g,I)/\phi(r) < \infty .$$

また $r \geq 1$ のときは $\phi(r) \geq \phi(1)$ かつ $\Phi_*(r)$ は定数であり，$MO(g,I) \leq 2\|g\|_{L^\infty}$ であるから

$$\sup_{I(a,r),\, r\geq 1} \Phi_*(r)\, MO(g,I) / \phi(r) < \infty .$$

よって $g \in bmo_\psi(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。

逆は，補題3.1の代わりに補題3.2を用いて定理1と同様に導くことが出来る。

(2) g が $bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ から $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier であるとする。補題3.4により $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. また $f(x) \equiv 1 \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ であるから $fg = g \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$.

逆は，補題3.1の代わりに不等式 $|f_I| \leq \|f\|_{L^\infty}$ を用いて定理1と同様に導くことができる。 $\square$

尚，定理1において，$bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier g の作用素ノルムは $\|g\|_{BMO_{w_\phi}} + \|g\|_{L^\infty}$ と同値であることが開写像定理により示される。定理2においても同様である。すなわち(1)では作用素ノルムは $\|g\|_{BMO_\psi} + \|g\|_{L^\infty}$ と，(2)では作用素ノルムは $\|g\|_{BMO_\phi} + \|g\|_{L^\infty}$ とそれぞれ同値である。

§5. 十分条件および例.

定理にひきつづいて，pointwise multiplier であるための十分条件を述べ，この条件を使って例をあげる。

命題 5.1. g が次の条件をみたすものとする：

(5.1)　ある定数 $M_1>0$ が存在して任意の $x, y\in\mathbb{R}^n$, $|y|\le 1$ に対して

$$|g(x+y)-g(x)|\le M_1\frac{\phi(|y|)}{\Phi_*(|y|)+(1-\operatorname{sgn}\phi(0+))\Phi^*(|x|)}.$$

(5.2)　ある定数 $M_2>0$ と $B\in\mathbb{C}$ が存在して任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$|g(x)-B|\le M_2\frac{1}{\Phi^*(|x|)}.$$

このとき g は $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier である。□

系 5.2. $g=g_1/g_2$ が次の条件をみたすものとする：

(5.3)　g_1 は有界かつリプシッツ連続。

(5.4)　g_2 はリプシッツ連続かつある定数 $C>0$ が存在して

$$|g_2(x)|\ge C\,\Phi^*(|x|),\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

このとき g は $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier である。 $\square$

命題5.3. 有界函数 g が次の条件をみたすものとする。

(5.5)　ある定数 $C>0$ が存在して

$$|g(x+y)-g(x)| \le C\frac{\phi(|y|)}{\Phi_*(|y|)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \ |y| \le 1.$$

このとき g は $bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ から $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier である。 $\square$

これらの命題は，定理 1 および 2 を用いて示される。

例. 系 5.2 により

$$\frac{1}{\Phi^*(|x|)}, \frac{\sin|x|}{\Phi^*(|x|)}, \frac{1}{1+|x|}, \frac{\sin\Phi^*(|x|)}{1+|x|}$$

等は $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier である。もし $\phi(0+)>0$ ならば， $\sin|x|^2/(1+|x|)$ も同様である。また $\phi(r)/(r\Phi_*(r))$ が almost decreasing ならば

$$\Psi_*(r) = \int_{\min(r,1)}^{2} \phi(t)/(t\Phi_*(t))\,dt$$

とおくと， $\sin\Psi_*(|x|)/\Phi^*(|x|)$ は $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier である。

References

1. R.R. Coifman and Y. Meyer, Fourier analysis of multilinear convolutions, Calderón's theorem, and analysis on Lipschitz curves, Lecture Notes in Math. No. 779 (1980), 109-122, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
2. S. Janson, On functions with conditions on the mean oscillation, Ark. Mat. 14 (1976), 189-196.
3. R. Johnson, Behaviour of BMO under certain functional operations, preprint.
4. S. Spanne, Some function spaces defined using the mean oscillation over cuves, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), 593-608.
5. D.A. Stegenga, Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of the duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation, Amer. J. Math. 98 (1976), 573-589.