数理解析研究所講究録
第 524 巻 1984 年 1-8

4次元多様体のHeegaard分解について.

北大理(教養) 小林一章.

3次元多様体のHeegaard分解と同様にして、4次元多様体にHeegaard 分解を定義し、4次元多様体を研究する。

W^4を向きづけ可能な閉4次元多様体とし

$W^4 = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2 \cup \gamma H^3 \cup H^4$ をW^4 のハンドル分解とする。すると $U \cup \mu H^2$ は $\lambda \# S^1 \times S^2$ から $\gamma \# S^1 \times S^2$ の間のコボルディズムとなり、これを $C(\lambda, \mu, \gamma)$ とかく.

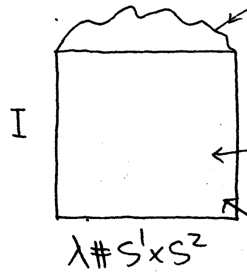
命題.(Montesinos). 全ての微分同相写像 $f: \lambda \# S^1 \times \partial B^3 \longrightarrow \lambda \# S^1 \times \partial B^3$ は拡大 $F: \lambda \# S^1 \times B^3 \longrightarrow \lambda \# S^1 \times B^3$ をもつ.

系. 上のW^4 は $H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2$ で完全に決定される。

系. コボルディズム $C^4(\lambda, \mu, \gamma)$ はW^4 を完全に決定する。

そこで $(W^4, C(\lambda, \mu, \gamma))$ をW^4のHeegaard 分解という。

w を $\lambda \# S^1\times S^2$ 内の framed link とし，$(\lambda \# S^1\times S^2, w)$ に次のコボルディズムを対応させる。



$\lambda \# S^1\times S^2$ を w に沿って (integral) Dehn surgery して得られる 3-manifold M^3

$(\lambda \# S^1\times S^2)\times I$

このcobordism は $(\lambda \# S^1\times S^2)\times I$ に framed curves $w \subset (\lambda \# S^1\times S^2)\times\{1\}$ に沿って 2-ハンドルをつけ加えたもの.

この M^3 が $S^1\times S^2$ の適当な個数の連結和に微分同相のとき，$(\lambda \# S^1\times S^2, w)$ を閉4次元多様体の Heegaard diagram という。

問題. どんな pair $(\lambda \# S^1\times S^2, w)$ が Heegaard diagram になるか.

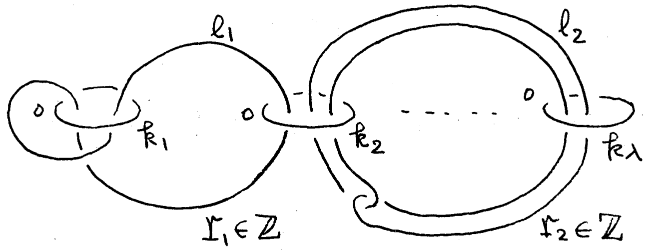
☆「先ず Heegaard diagram $(\lambda \# S^1\times S^2, w)$ が与えられたとき，それに対応する4次元多様体 W^4 の基本群 $\pi_1(W^4)$ の表示について」

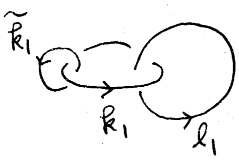
$W^4 = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2 \cup \gamma H^3 \cup H^4$ をハンドル分解とし，その2-ハンドルの部分迄 $H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2$ を V とすると，

$\pi_1(W^4) \cong \pi_1(V^4)$ である。

$u = k_1 \cup \cdots \cup k_\lambda$ を λ個の成分をもつS^3内の自明なリンクとし，その framing の係数は全て 0 とする。

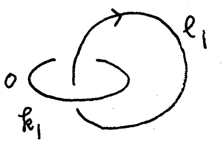
w を $\lambda \# S^1 \times S^2$ 内のリンクとし，その成分は μ 個とする。今 u に沿って S^3 を Dehn surgery すると $\lambda \# S^1 \times S^2$ となるので $(\lambda \# S^1 \times S^2, w)$ を考える事は $(S^3, u \cup w)$ を考えるのと同じ事である。そこで w を S^3 内で考えたとき framing が考えられるから，この framing をそのまゝ $\lambda \# S^1 \times S^2$ 内で考えることにする。そして w の framing は全て整数とする。先ず $k_1, \ldots, k_\lambda$ に向きをつけ，$k_1, \cdots\cdots, k_\lambda$ に non-singular disjoint discs $B_1^2, \cdots\cdots, B_\lambda^2$ を張り，B_i^2 に k_i と coherent に向きをつける。$l_1, \ldots, l_\mu$ に向きをつける。$\widetilde{k}_1, \ldots, \widetilde{k}_\lambda$ を $k_i \cup \widetilde{k}_i$ が Hopf link で $\underbrace{k_1 \cup \widetilde{k}_1} \cup \underbrace{k_2 \cup \widetilde{k}_2} \cup \cdots\cdots \cup \underbrace{k_\lambda \cup \widetilde{k}_\lambda}$ が λ 個の Hopf link の union でこれらの Hopf links は completely splittable になっているようなものとする。$\widetilde{k}_j$ の向きは右手系で $\mathrm{Int}(\widetilde{k}_i, B_j) = \delta_{ij}$ となるように取る。今 l_i と $\bigcup_{j=1}^{\lambda} B_j^2$ との intersection を考え，そこでの intersection number を順に $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \ldots, \varepsilon_{ip}$ ($\varepsilon_{ij} = \pm 1$) とする。　$l_i \simeq \widetilde{k}_{i_1}^{\varepsilon_{i1}} \widetilde{k}_{i_2}^{\varepsilon_{i2}} \cdots\cdots \widetilde{k}_{i_p}^{\varepsilon_{ip}}$



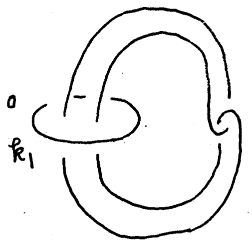


$\widetilde{k}_i$ に a_i，l_j に R_j を対応させると $\pi_1(V)$ は $\langle a_1, \ldots, a_\lambda \mid R_1, \ldots, R_\mu \rangle$ という表示をもつ。

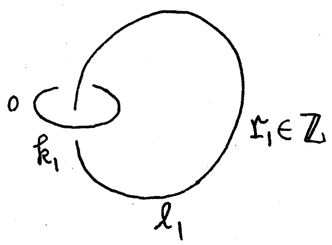
注．$\pi_1(V)$ の計算の時は w の方の framing 係数は関係しない。



例 $\pi_1(V)=\langle a \mid a\rangle=\{1\}$ (この時Wにして考えると3-handleは有り得ない。)



$\pi_1(V)=\langle a\mid aa^{-1}\rangle=\langle a\mid -\rangle\cong\mathbb{Z}$



$$\partial V=(\lambda\# S^1\times S^2-\overset{\dot B^2\times B^2}{\overset{\cong}{\bigcup \mathring{U}(l_i)}})\cup_{h_i}(B^2\times\dot B^2)$$

L_i, M_i をS^3内のl_iのlongitudeとmeridianとしたとき $h_i(B^2\times(*))=\pm L_i+r_iM_i$ によってh_iは定義されているとする(以下の$h_i((*)\times\dot B^2)$も関係している).

∂Vの場合 $\pi_1(\partial V)$の表示のrelator R_jはl_jに対応するのでなく curve $\alpha_j\equiv\pm L_j+r_jM_j\subset\partial U(l_j)$ に対応するものとする。又 $b_i=h_i((*)\times\dot B^2)=\gamma_iL_i+\delta_iM_i$ とする.

ただし $\begin{vmatrix}\pm1 & r_i\\ \gamma_i & \delta_i\end{vmatrix}=\pm1$

するとvan-Kampenの定理より$\pi_1(\partial V)$は次の表示をもつ.

$$\pi_1(\partial V)=\pi_1(S^3-(k_1\cup\cdots\cup k_\lambda\cup l_1\cup\cdots\cup l_\mu))\Big/\langle h_i(\dot B^2\times\{*\})\cup\tilde L_i\rangle$$

ただし $\tilde L_i$はk_iのlongitude.

☆次に W^4 の Heegaard genus が簡単な場合を考察する。

$W^4 = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2 \cup \gamma H^3 \cup H^4$ のとき W^4 の H-genus は (λ, μ, γ) であるという。双対ハンドル分解を考えることにより、三対として $(\lambda, \mu, \gamma) = (\gamma, \mu, \lambda)$ である.

$(0, \mu, 0)$ のとき　$V^4 = H^0 \cup \mu H^2$ とおくと

$V^4 \simeq \underbrace{S^2 \vee \cdots \vee S^2}_{\mu}$ ホモトピー同値.

M_α を次で定義される $\mathbb{Z}$ 上の行列とする. $M_\alpha = (\alpha_{ij})$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} lk(l_i, l_j) & i \neq j \\ \text{framed coefficient} & i = j \end{cases}$$

(各 l_i が 2-handle の attaching sphere という事から $\alpha_{ii} \in \mathbb{Z}$).

注: $a_1, \ldots, a_\mu$ を W^4 のハンドル分解から定まる標準的な $H_2(W^4 : \mathbb{Z})$ の基とすると $lk(l_i, l_j) = \mathrm{Int}(a_i, a_j)$ であり、各 l_i が S^3 の中でみて自明な結び目の時は $V = H^0 \cup \mu H^2$ に plumbing structure が入る.

命題. $\partial V \cong S^3$ であるから $\det M_\alpha = \pm 1$ である.

2-handles のないとき　$W^4 = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \gamma H^3 \cup H^4$.

このとき $\partial(H^0 \cup \lambda H^1) = \partial(\gamma H^3 \cup H^4) \cong \lambda \# S^1 \times S^2$ より $\lambda = \gamma$ となる. そして Montesinos により $\lambda \# S^1 \times S^2$ の pasting homeomorphism によらず W^4 は unique にきまるから

$$W^4 \cong \lambda \# S^1 \times S^3 \quad \text{である。}$$

3-handles のないとき（双対ハンドル分解を考える事により、これは 1-handles がないのと同じ）.

$W^4 = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2 \cup H^4$ 双対ハンドル分解を考えると W^4 は 1-handles を持たないから，従って $\pi_1(W^4)=\{1\}$.

$W^4 = \bar{H}^0 \cup \mu \bar{H}^2 \cup \lambda \bar{H}^3 \cup \bar{H}^4$ （双対ハンドル分解）

$H^0 \cup \lambda H^1 \cong \lambda \# S^1 \times B^3$ だが $\bar{H}^0 \cup \mu \bar{H}^2$ は 2-handles の attaching sphere に依存し，一般には $\bar{H}^0 \cup \mu \bar{H}^2 \not\cong \mu \# S^2 \times B^2$.

しかし $\bar{H}^0 \cup \mu \bar{H}^2 \cong \mu \# S^2 \times B^2$ が成立する特別な場合は次の定理が成り立つ。

定理（Laudenbach and Poénaru）. $X_p = p \# S^2 \times B^2$, $Y_p = p \# S^1 \times B^3$ とすると貼り付けの微分同相写像 $h : \partial X_p \longrightarrow \partial Y_p$ によらず

$$X_p \cup_h Y_p \cong S^4 \quad \text{となる。}$$

$V = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2$ とおくと $\partial V = \partial H^4 \cong S^3$ である。

$u = k_1 \cup \cdots \cup k_\lambda$ を $\lambda \# S^1 \times S^2$ を作るための $\partial H^0 \cong S^3$ 内の自明な link, $w = l_1 \cup \cdots \cup l_\mu$ を 2-handles μH^2 の attaching spheres とする.

命題 全ての k_α, l_β $(\beta \neq \gamma)$ と linking number が 0 となるような成分 l_γ は存在しない. $(\alpha = 1, 2, \dots, \lambda;\ \beta = 1, \dots, \overset{*}{\gamma}, \dots, \mu)$

証）もしそういう l_γ があるなら $l_\gamma \sim 0$ in $S^3-(k_1\cup\cdots\cup k_\lambda\cup l_1\cup\cdots\cup l_\mu)$．従って l_γ が bound する 2-ハンドルと $l_\gamma\sim 0$ から得られる 2-cycle ($\cong$ surface) があるが，これは ∂V でホモローグゼロでない．従って $H_2(\partial V)\neq 0$ となり，$\partial V\cong S^3$ に矛盾 ⌟

上と同様な議論によって次の事が言える。

命題 l_i の framing $\hat{l}_i$ と l_j の framing $\hat{l}_j$ $(i\neq j)$ が $S^3-(u\cup w)$ の中でホモローグになる事はない。

定理 2-handles の attaching spheres である $\{l_1,\cdots,l_\mu\}$ は次の性質をもつ少なくとも λ個のグループに分かれる。

① $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots, l_{m_1}^{(1)}$

② $l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \ldots, l_{m_2}^{(2)}$

⋮

λ $l_1^{(\lambda)}, l_2^{(\lambda)}, \ldots, l_{m_\lambda}^{(\lambda)}$

λ+1 $l_1^{(\lambda+1)}, l_2^{(\lambda+1)}, \ldots, l_{m_{\lambda+1}}^{(\lambda+1)}$

ここで $m_i \geqq 1$ $(i=1,2,\ldots,\lambda)$，$m_1+m_2+\cdots+m_{\lambda+1}=\mu$．

従って $\lambda>\mu$ という事は起らない。

性質：α $(1\leqq\alpha\leqq\lambda)$ 番目のグループは次の性質をもつ．

$$lk(\langle k_j\rangle, \langle l_1^{(\alpha)}\rangle+\cdots+\langle l_{m_\alpha}^{(\alpha)}\rangle)=\delta_{j\alpha}$$

$$lk(\langle k_\alpha\rangle, \langle l_i^{(\alpha)}\rangle)\neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,m_\alpha).$$

$\lambda+1$ 番目のグループは ①, …, ⓐ 以外のグループ.

この定理の証明は $\partial(H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2) = \partial H^4 \cong S^3$ という事実と k_i の 0-framing $\tilde{k}_i$ が 2-handles をつけ加えることにより, 少なくともホモロジーの段階で消える必要がある事から示される。

注. 最後の $\lambda+1$ 番目のグループに対しては $(0, \mu, 0)$ の場合の行列が適用出来る。

References.

J. M. Montesinos : Heegaard diagrams for closed 4-manifolds (preprint).