

DS-diagram の基本変形

上智大 理工 横山和夫

東洋大 工 山下正勝

§1. S^2 -graph

有限個の点の集合 $V = \{A_i\}$ と有限個の open arcs の集合 $E = \{\alpha_m\}$ について考える。

定義 $G = (V, E)$ が次の (1) ~ (4) を満たすとき、 G を graph といい、 V の元を G の vertex、 E の元を G の edge と呼ぶ。

(1) $|G| = (\cup_i A_i) \cup (\cup_m \alpha_m)$ は 1-polyhedron である

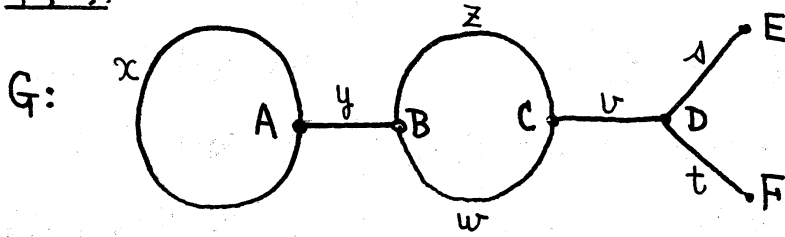
(2) $i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j$

$m \neq n \Rightarrow \alpha_m \cap \alpha_n = \emptyset$

(3) 各 i, m に対して $A_i \cap \alpha_m = \emptyset$

(4) $\alpha_m \in E$ の $|G|$ における closure $cl(\alpha_m)$ は、1 → または 2 → の vertex を含む。これらの vertex を α_m の 端点 と呼ぶ。

例 1.



$$G = (\{A, B, C, D, E, F\}, \{x, y, z, w, u, s, t\})$$

x の端点は A だけ, y の端点は A, B の 2 点 等々.

定義. graph G の各 edge に矢印で向きが指定されているとき, G を oriented graph という.

$x \in E$ の端点を A, B とする. x の向きが図のように与えられているとき A, B をそれぞれ

x の始点 及び x の終点 という.

記号 \overline{AB} を x の境界 と呼び、 $\partial x = \overline{AB}$ と書く. A

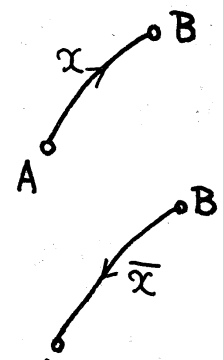
同じ edge を x の向きと反対に向きつけられたものを,

便宜上 \overline{x} と書くことにする. このときは B, A がそれぞれ

\overline{x} の始点及び終点であり, $\partial \overline{x} = \overline{BA}$ が \overline{x} の境界ということになる.

始点と終点が同一の vertex A になるような edge x に対して

その境界 $\partial x = \overline{AA}$ を $\partial x = 1$ と書くことがある.



定義 $G = (V, E)$ を oriented graph とする.

(1) $y_i \in E$ または $\bar{y}_i \in E$ for each $i=1, 2, \dots, n$.

(2) $(y_i \text{ の終点}) = (y_{i+1} \text{ の始点})$ for each $i=1, 2, \dots, n-1$.

を満たす edges の列 $\pi = y_1 y_2 \dots y_n$ を G の path といい、

y_1 の始点を π の始点, y_n の終点を π の終点 といい.

各 y_i を π の edge といい. π の edge の端点を Γ とあら

わける G の vertex を π の vertex といい.

$i \neq j$ のとき y_i の始点 $\neq y_j$ の始点 であるような

path π を simple path といい (注意: π の始点と π の

終点は一致してもよい).

定義 oriented graph G の任意の 2 つの vertex A, B に対し、 A を始点、 B を終点に持つ path がとれるならば、 G は connected である、といわれる.

以下、 $|G|$ が 2-sphere S^2 上に実現されているような connected oriented graph $G = (V, E)$ について考える.

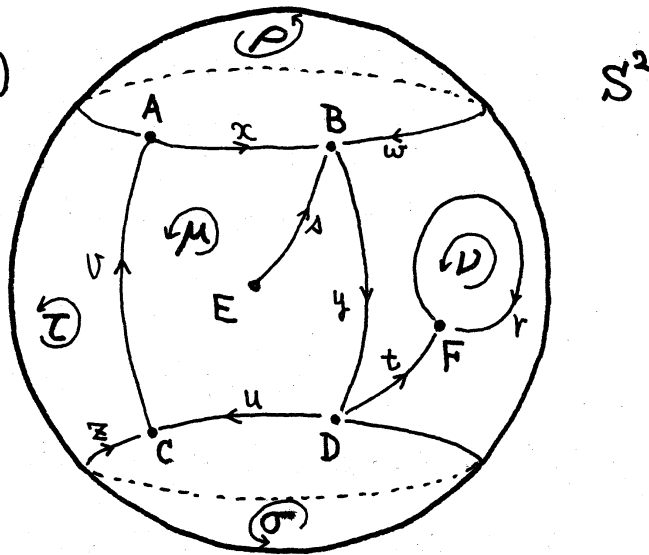
Proposition $S^2 - |G|$ は有限個の互いに disjoint な open 2-disks $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ からなる.

$S^2 - |G|$ の open 2-disks の集合を $F = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ とする. F の各元には矢印で向きを指定する.

定義 E の各元には G からの向きが入り, F の各元には \rightarrow の向きが指定されているとき, $(S^2, G) = (V, E, F)$ を S^2 -graph と呼ぶ. ことにする. V, E, F の各元をそれぞれ (S^2, G) の vertex, edge, face と呼ぶ.

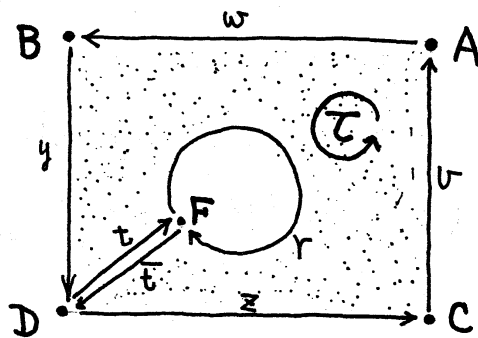
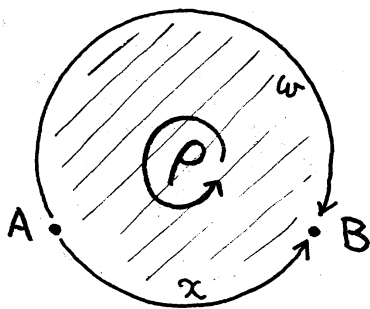
例 2.

S^2 -graph. (S^2, G)



(S^2, G) の各 face に対して τ の境界を定義したい.

例 2 の ρ, τ を用いて説明しよう.



4

あらかじめ与えられている face の向きに沿って、その周を順に読んで得られる path を face の境界 といふ。このときの path の vertex を face の vertex といふ。ρ, τ に対しては

$$\rho = x \bar{w} \quad (\text{または } \bar{w} x)$$

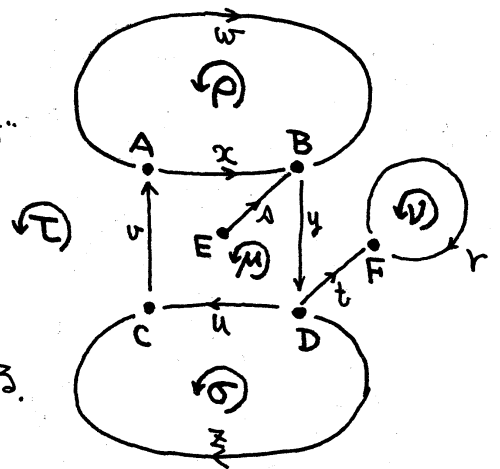
$$\tau = w y t r \bar{t} z v \quad (\text{またはこれを巡回的に読みかえたもの})$$

がその境界である。

定義 S^2 上の ambient isotopy で S^2 -graph (S^2, G) が (S^2, G') に変形されても (S^2, G) と (S^2, G') は S^2 -graph として同じものと見なす。 $(S^2, G) = (S^2, G')$ と書く。

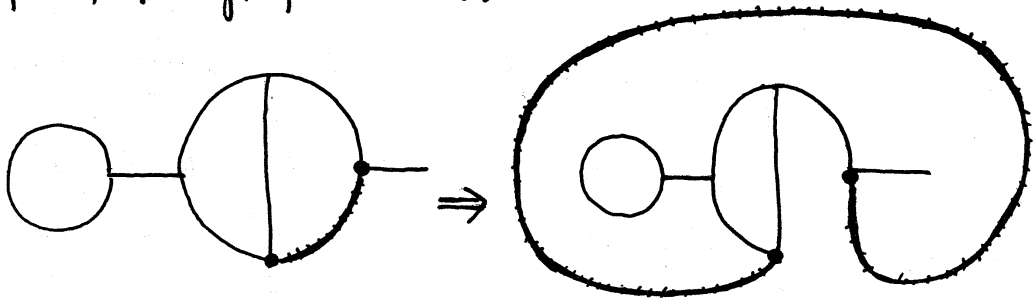
(S^2, G) の 1 つの face 内の 1 点 $*$ を選ぶ。 $S^2 - *$ は R^2 に同相だから、 (S^2, G) は平面 R^2 上に実現することができる。いまそれを簡単に (R^2, G) と書く。

例 3 例 2 においてたとえば τ の内部に $*$ を選んでみる。そのとき例 2 の S^2 -graph の平面 R^2 への実現として右図を得る。

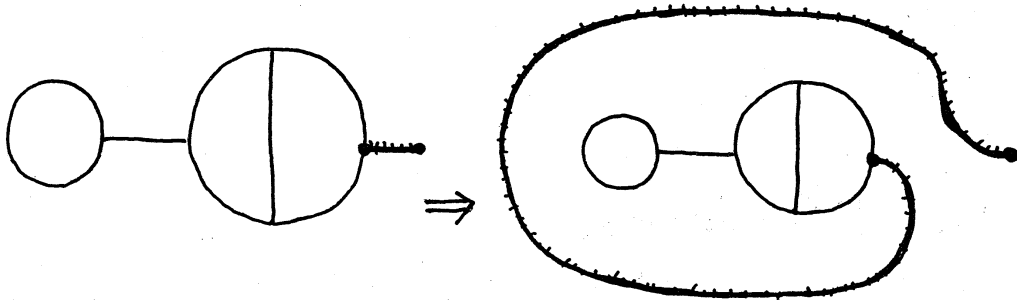


(R^2, G) が R^2 の ambient isotopy によって (R^2, G') に
 移り得るならば勿論 $(S^2, G) = (S^2, G')$ であるが、さらに
 それ以外の変形として下図のような変形も許される。即ち
 R^2 において“一番外側の” edge を、両端点を固定したまま
 勝手な別の“一番外側の” edge におきかえても (S^2, G) の
 方では同一の S^2 -graph である。

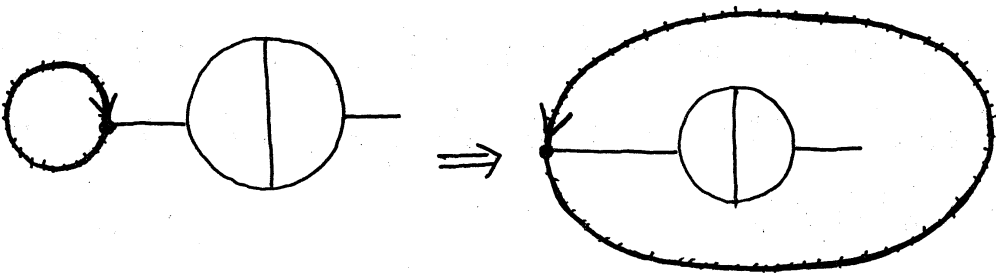
(イ)



(ロ)

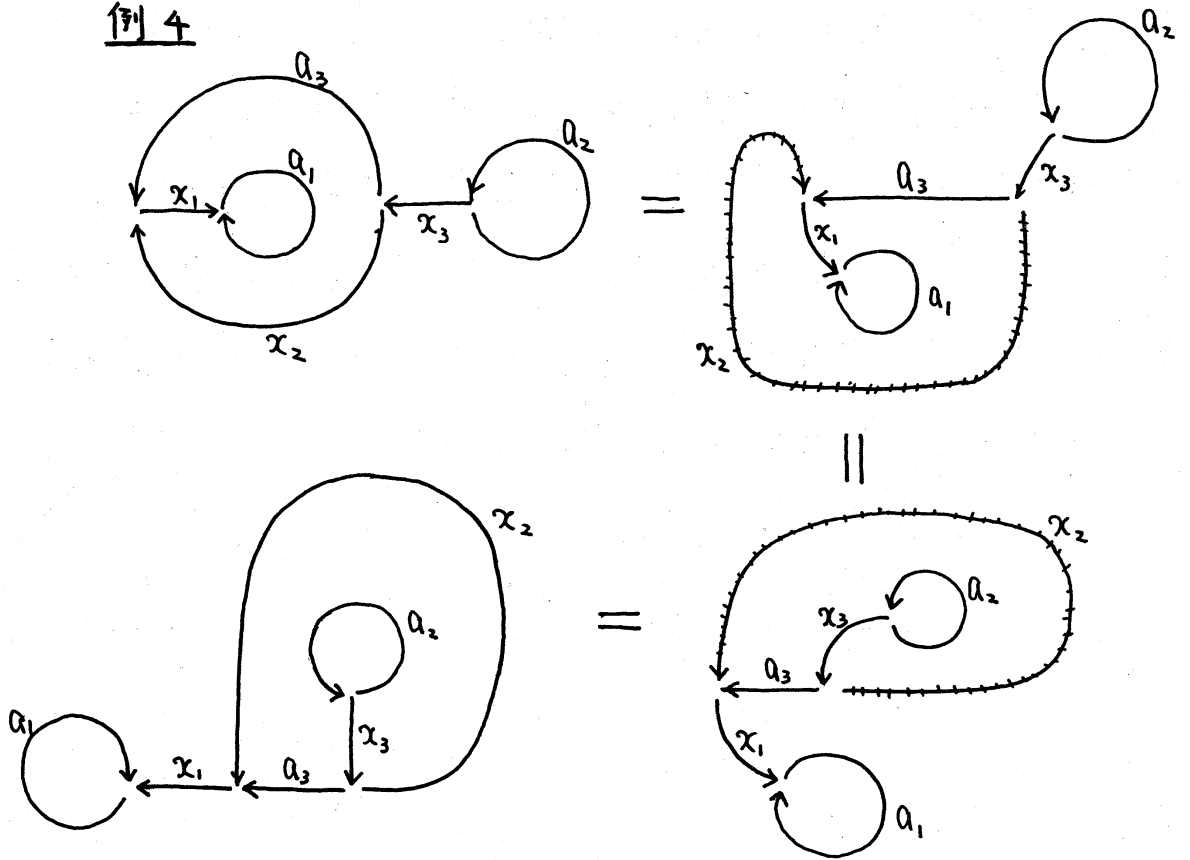


(ハ)



とくに (ハ) の場合は向きに注意を要する。(イ)~(ハ)で
 “一番外側の”の意味が了解できるであろう。

例 4



§ 2. DS-diagram

S^2 -graph $(S^2, G) = (V, E, F)$ に対して、 \forall の vertices, edges, faces の間の同一視を指定したものを S^2 -diagram と呼ぶことにする。この S^2 -diagram の作り方を、例 3 を借りて説明する。

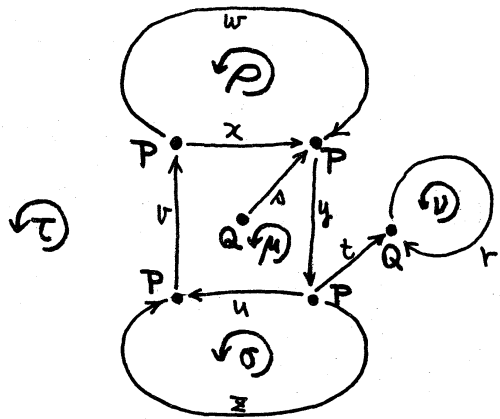
Step 1. (S^2, G) の vertices のいくつか同士を同じ文字でおきかえる。

例5. 例3でたとは

$$A, B, C, D \rightarrow P$$

$$E, F \rightarrow Q$$

とおきかえれば右図になる。



Step 2. step 1 の同一視によ, τ oriented edges

(または $\bar{\tau}$ の逆向きの edges) のうちいくつかは (巡回的表示を適当に選べば $\bar{\tau}$ の境界が等しくなることがある。境界が等しくなるもののうちのいくつかを同じ記号であらわす。

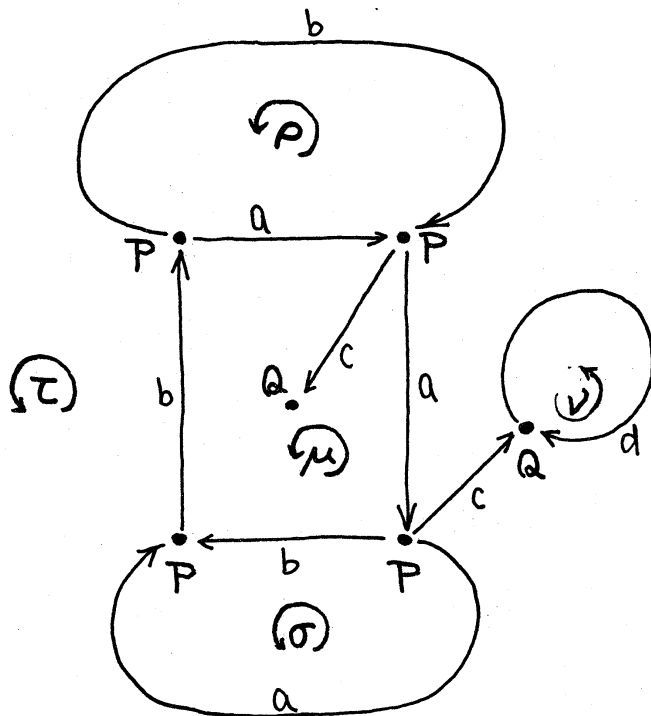
例6. 例5において

$$\begin{cases} \partial x = \partial y = \partial z = \partial u = \partial v = \partial w = \overline{P}P \\ \partial \bar{x} = \partial t = \overline{P}Q \\ \partial r = \overline{Q}Q \end{cases}$$

τ である。 $\bar{\tau}$: たとは

$$\begin{cases} x, y, z \rightarrow a \\ u, v, w \rightarrow b \\ \bar{x}, t \rightarrow c \\ r \rightarrow d \end{cases}$$

とおけば右図になる。



Step 3. step 2 の同一視によつて oriented faces (またはその逆向きの faces) のうちいくつかは (巡回的表示を適当に選べば) その境界が等しくなることがある。境界が等しいような faces のうちのいくつかがすべてを同じ記号であらわす。

例 7. 例 6 において

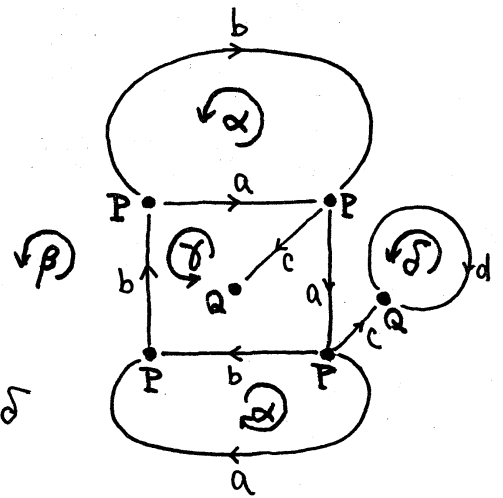
$$\partial \rho = \partial \bar{\sigma} = a\bar{b}, \quad \partial \tau = acd\bar{c}abb$$

$$\partial \mu = acc\bar{c}abb, \quad \partial \nu = \bar{d}$$

である。よつてたとえは

$$\rho, \bar{\sigma} \rightarrow \alpha, \quad \tau \rightarrow \beta, \quad \mu \rightarrow \gamma, \quad \nu \rightarrow \delta$$

とおけば右図を得る。



定義 S^2 -graph から step 1 ~ step 3 の過程を経て得られたものを S^2 -diagram といい。

同一視の指定が済んで得られる open disk を S^2 -diagram の cell と呼ぶ。とくに元の face の境界, vertex を同一視して得られるものを S^2 -diagram の 2-cell の 境界, vertex といい。1 つの cell が S^2 -diagram にあらわれる重複個数を、その cell の multiplicity と呼ぶ; $m(A)$, $m(a)$, $m(\alpha)$ などとあらわす。

例 8 例 7 で示された S^2 -diagram にあられる cells は

0-cells P, Q .

1-cells a, b, c, d .

2-cells $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

2-cells の境界は.

$$\partial\alpha = a\bar{b}, \quad \partial\beta = acd\bar{c}abb, \quad \partial\gamma = ac\bar{c}abb, \quad \partial\delta = \bar{d}$$

cell の multiplicity は.

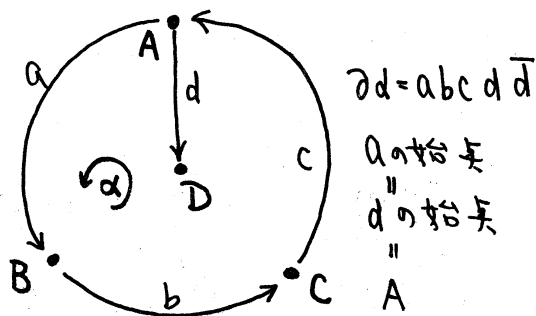
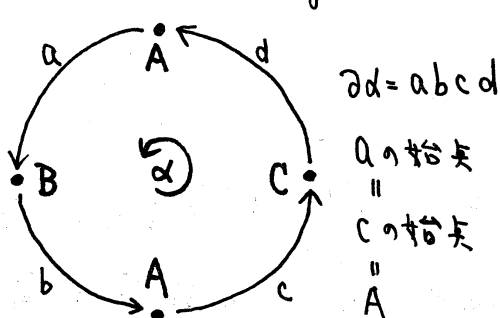
$$0\text{-cell} \dots m(P) = 4, \quad m(Q) = 2$$

$$1\text{-cell} \dots m(a) = m(b) = 3, \quad m(c) = 2, \quad m(d) = 1$$

$$2\text{-cell} \quad m(\alpha) = 2, \quad m(\beta) = m(\gamma) = m(\delta) = 1$$

定義 S^2 -diagram の 2-cell の境界は G を同一視して得られる graph の path になる. この意味でこの境界が simple path であるとき, この 2-cell は non-singular である. とおかれる.

例 9 singular 2-cell の例を 2 つ示しておく.



定義 各 2-cell の multiplicity が 2 であるような S^2 -diagram (S^2, G_{\sim}) を DS-diagram (Dehn-Seifert diagram) と呼ぶことにする。

定義 S^2 を DS-diagram (S^2, G_{\sim}) の指定で同一視して得られる polyhedron を S^2/G_{\sim} とおす。 (S^2, G_{\sim}) から induce される (抽象的) spine と呼ぶ。
DS-diagram の cell をそのまま S^2/G_{\sim} の cell として流用する。

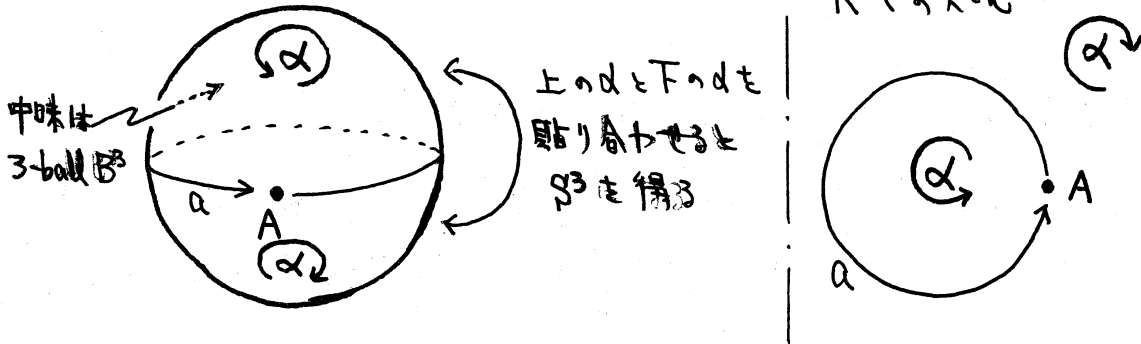
§3. closed 3-manifold.

3-ball B^3 の表面 S^2 に DS-diagram (S^2, G_{\sim}) が与えられているとする。 B^3 の表面を (S^2, G_{\sim}) の指定に従って貼り合わせることによって、 B^3 から得られる polyhedron を B^3/G_{\sim} と書くことにする。 (S^2, G_{\sim}) から induce される spine $P = S^2/G_{\sim}$ の 0-cells, 1-cells, 2-cells の個数をそれぞれ $\#\tilde{V}$, $\#\tilde{E}$, $\#\tilde{F}$ と書くことにする。 次の 2 つの定理はよく知られている。

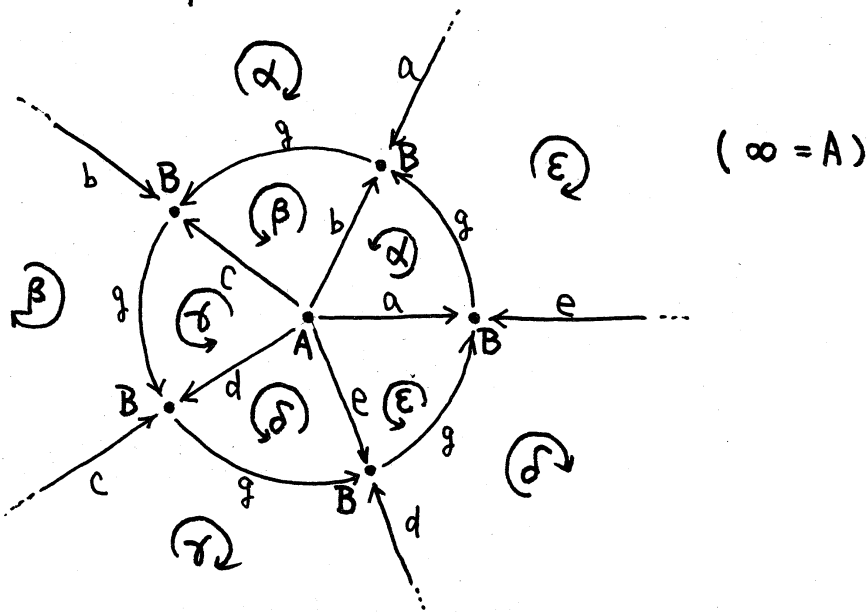
定理 1. $\#\tilde{V} - \#\tilde{E} + \#\tilde{F} = 1$ であるとき、そのときにかぎり、 B^3/G_{\sim} は closed 3-manifold である。

定理 2 任意の closed 3-manifold M に対し $B^3/G \cong M$ となるような DS-diagram (S^2, G) が存在する。

例 10 3-sphere S^3 .



例 11 lens space $L(5, 1)$



表面に DS-diagram (S^2, G) が与えられた 3-ball を (B^3, G) と書くことにする。 B^3/G が closed 3-manifold M^3 になるとき (B^3, G) を M^3 の DS-diagram と呼ぶことにする。

定理 3. (B^3, G_{\sim}) を closed 3-manifold M^3 の DS-diagram, $D^3 \in M^3$ 内の 3-ball とする. そのとき

$$M^3 - \text{Int} D^3 \searrow S^2/G_{\sim} \quad (\text{collapse})$$

§4. DS-diagram の自明な変形

closed 3-manifold M^3 の DS-diagram (B^3, G_{\sim}) について考える. (B^3, G_{\sim}) は (S^2, G_{\sim}) で一意に定まるから, 以下 (S^2, G_{\sim}) の言葉であらわす.

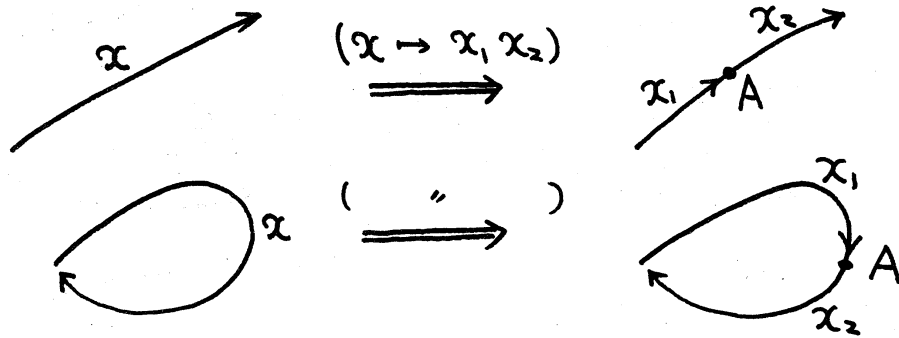
定義 2つの DS-diagram $\underbrace{(S^2, G_{\sim}) \text{ と } (S^2, G'_{\sim})}_{\text{が同じ closed 3-manifold を定めるとき}}$ $(S^2, G_{\sim}) \approx (S^2, G'_{\sim})$ と書く.

(S^2, G_{\sim}) は単に同一視の指定をしているだけだから, 結果として同一視の指定が S^2 全体で変わらない限り, 別の表記法をとってもよい. そのような自明な変形について述べる.

①-変形. (S^2, G_{\sim}) にあらわゆる 1-cell または 2-cell のうち, 1種類の cell の向きを一斉に変える.

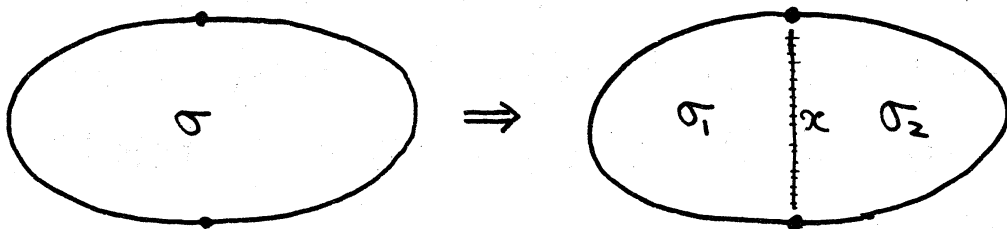
$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} a \nearrow \dots \bigcirc_a \dots \searrow a \end{array} & \xrightarrow{(a \rightarrow \bar{a})} & \begin{array}{c} \swarrow a \dots \bigcirc_a \dots \nwarrow a \end{array} \end{array}$$

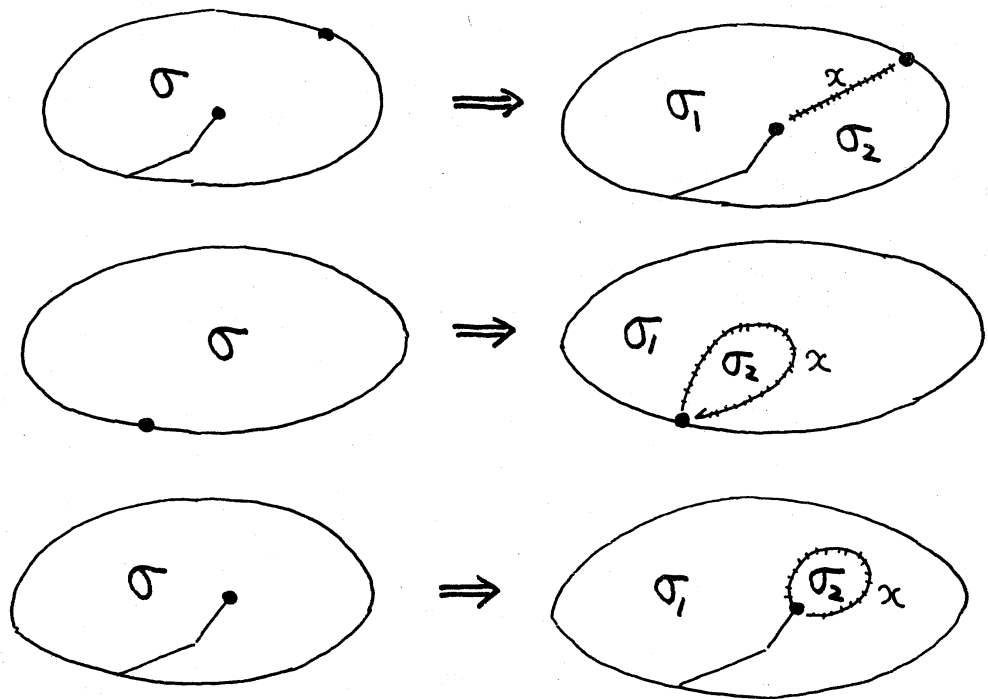
P-変形 (S^2, G_{\sim}) にあられる 1 種類の 1-cell を一斉に 2 種類の 1-cells に分割する。そのとき必然的に、1 種類の 0-cell が添加される。



P-変形 P-変形の逆変形である。1-cells α_1, α_2 が (S^2, G_{\sim}) 内で常に α_1, α_2 の形であられる、0-cell A が α_1 の終点 (= α_2 の始点) 以外の 1-cell の端点になっていないとき、 A を除去し、 α_1, α_2 を新たな 1-cell α におきかえることができる。

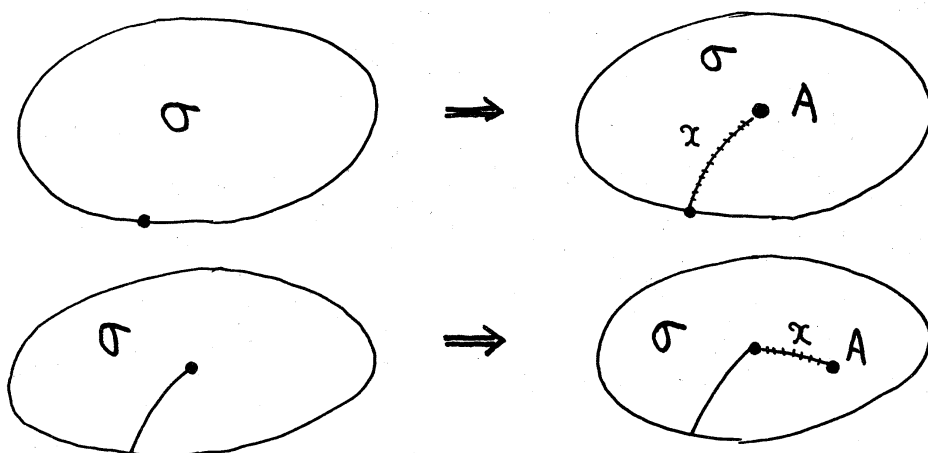
Q-変形 (S^2, G_{\sim}) にあられる 1 種類の 2-cell σ を一斉に 2 種類の 2-cells σ_1, σ_2 に分割する。そのとき必然的に 1 種類の 1-cell α が添加される。





Q-変形 Q-変形の逆変形である。2-cells σ_1, σ_2 が 2 箇所とも 1-cell α を境界に含むように同じ 1-cell でありわかれるとき、 α を除去し、 σ_1, σ_2 を一つの 2-cell σ にまとめる。但し、 α が他の場所にもありわかれる (即ち $m(\alpha) \geq 3$) 場合にはこの変形は許されな $\bar{\bar{}}$ 。

R-変形 (S^2, G_2) にありわかれる 1 種類の 2-cell σ に対し、 σ の内部の 1 点 A を 0-cell に加え、 A と σ の他の vertex を結ぶ arc (の interior) を 1-cell に加える (新たな 2-cell は前の 2-cell の文字 σ を流用してもさ $\bar{\bar{}}$ つかえな $\bar{\bar{}}$ 。

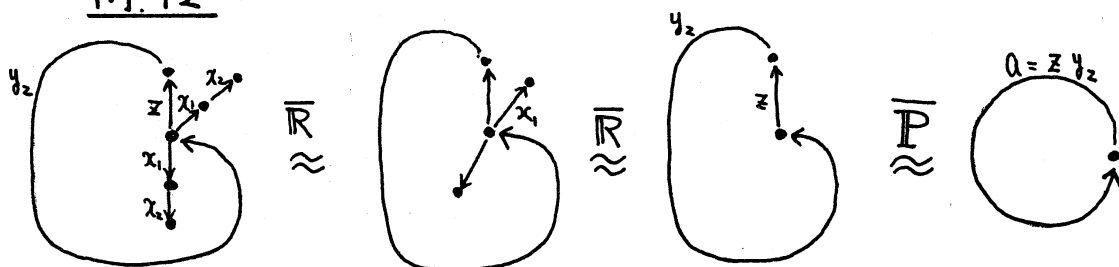


\bar{R} -変形 R -変形の逆変形である。但し、 \bar{Q} -変形の時と同じ注意、即ち $m(x)=2$, $m(A)=2$ を要する。

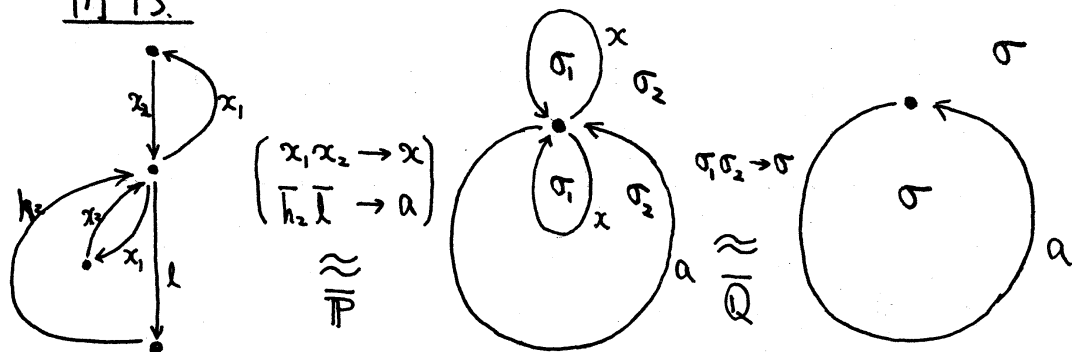
定義 O -、 P -、 Q -、 R - 及びその逆 \bar{O} 、 \bar{P} 、 \bar{Q} 、 \bar{R} - の各変形を総称して、DS-diagram の 自明な変形 という。

定理 4. 自明な変形によつて DS-diagram は “変らない” 即ち、自明な変形を有限回くり返すことによつて (S^2, G_{\sim}) から (S^2, G'_{\sim}) が得られるならば $(S^2, G_{\sim}) \approx (S^2, G'_{\sim})$ 。

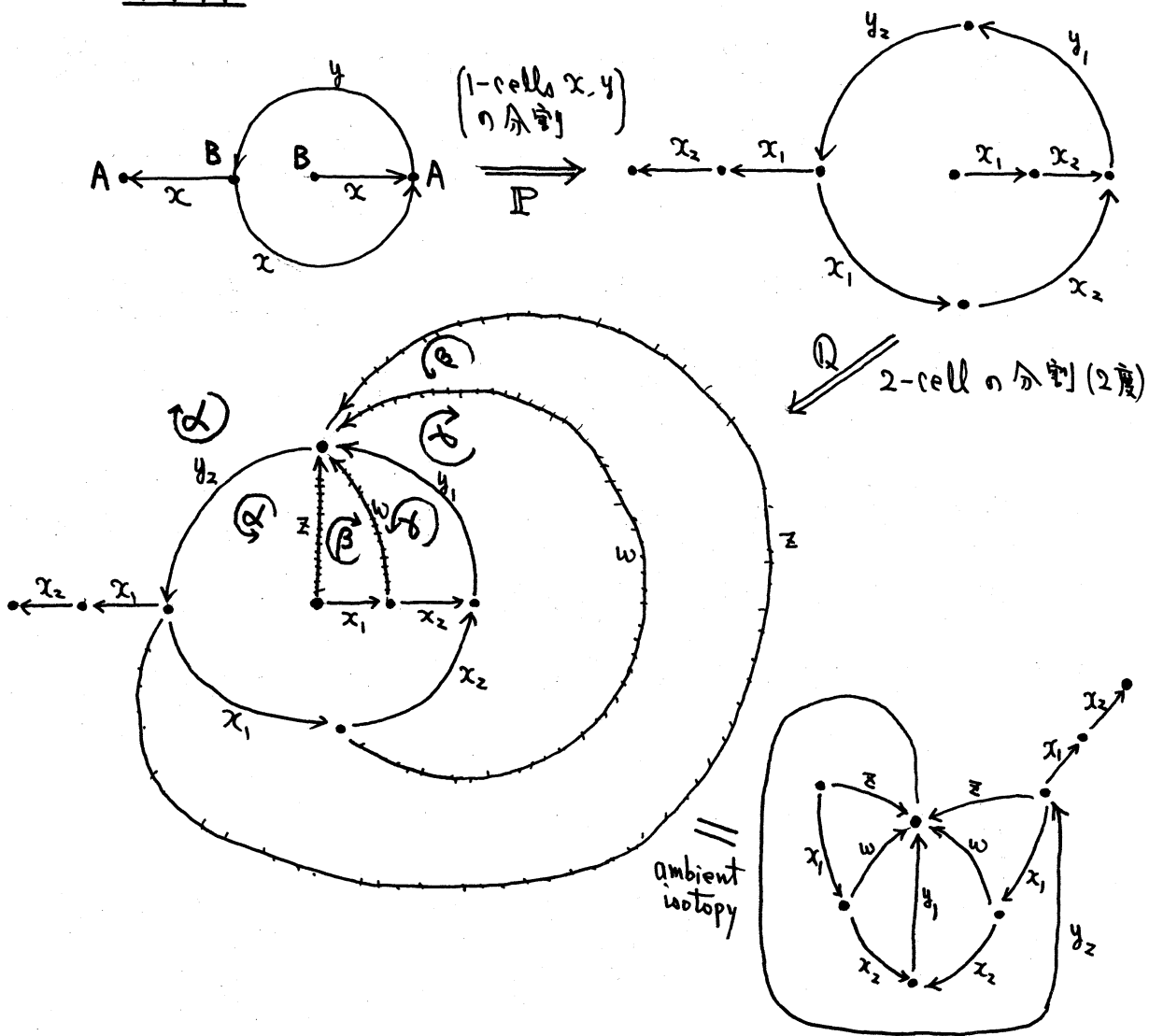
例. 12



例 13.



例 14.



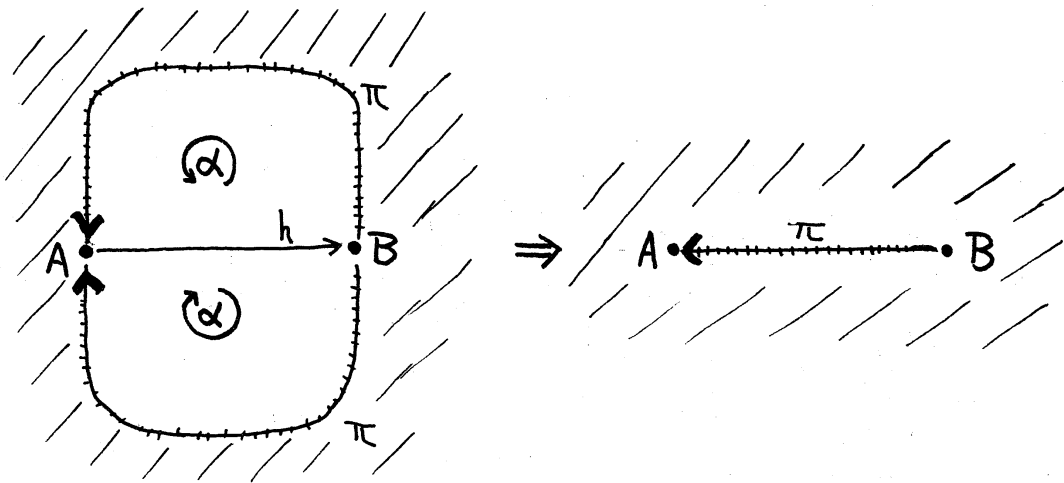
§5. Collapsing

DS-diagram (S^2, G_2) 上に唯一度だけしか現れない
 1-cell h (即ち $m(h) = 1$ なる 1-cell h) について考える。
 h を境界に含む 2-cell は 1 種類しかない。いまその 2-cell
 を α とする。2枚の α は h の両側にあつて互いに隣接している。
 α (または $\bar{\alpha}$) の境界は

$$\partial\alpha = h\pi \quad (\text{または } \partial\bar{\alpha} = h\pi)$$

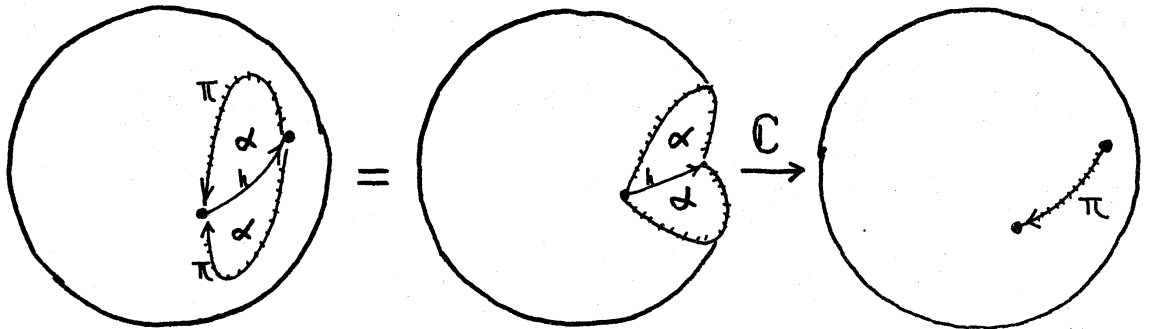
と書ける。但し $\pi = b_1 b_2 \cdots b_n$ で、各 b_i (または \bar{b}_i) は
 (S^2, G_2) の 1-cell である。

定義 上の状況の h と α で、さらに α が "non-singular"
 な 2-cell であるとき (S^2, G_2) から 2 つの α , 2 つの π を除去
 し、 h を $\pi = \bar{b}_m \cdots \bar{b}_2 \bar{b}_1$ におきかえる変形を collapsing
 または C-変形 と呼ぶ。



\mathbb{C} -変形は spine S^2/G_\sim の方で見ると、free face h を利用して 2-cell α を collapse することになっている。

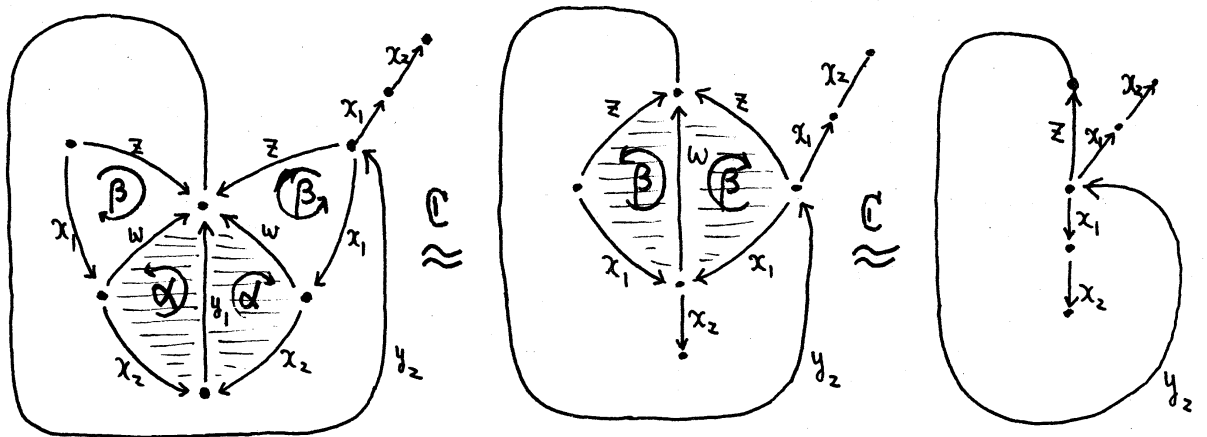
一方 \mathbb{C} -変形を (B^3, G_\sim) の方で見れば



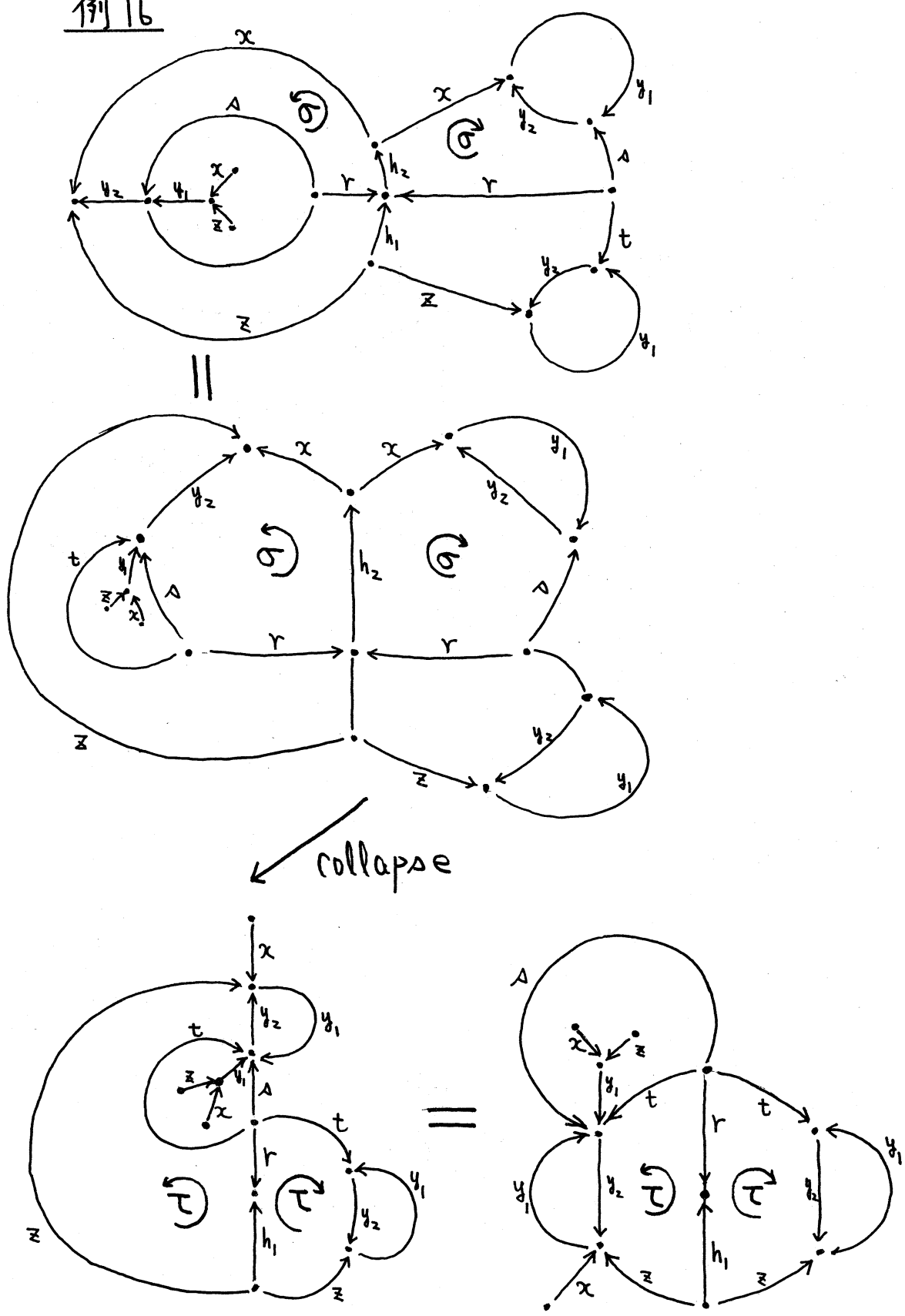
となり、 S^2 全体として見た場合には影響を与えていない。

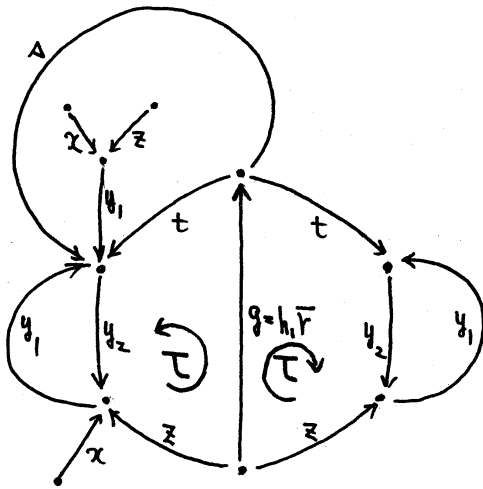
定理 5 \mathbb{C} -変形によつて DS-diagram は“変わらない”
 即ち、 (S^2, G_\sim) から \mathbb{C} -変形によつて (S^2, G'_\sim) が得られるならば、
 $(S^2, G_\sim) \approx (S^2, G'_\sim)$ である。

例 15

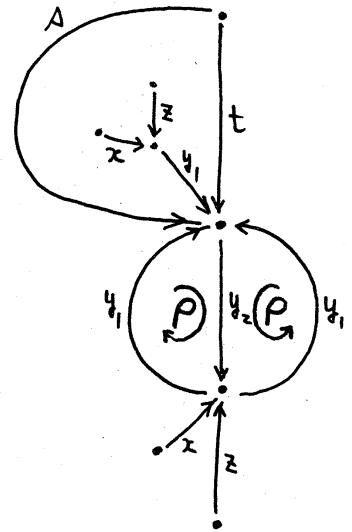


例 16

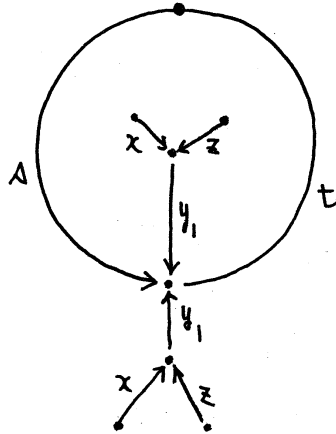




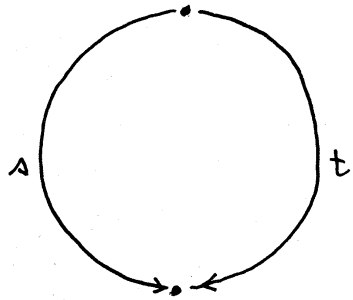
collapse



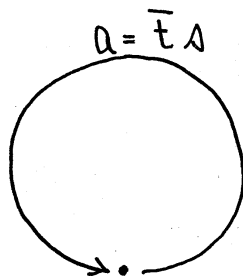
collapse



x, z, y_1 の部分
 \bar{R}



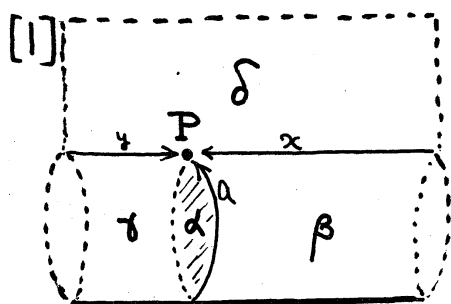
$\bar{t}A$ の部分
 \bar{P}



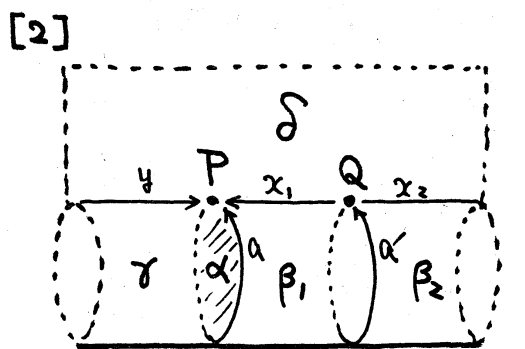
§ 6. $D^2 \times I$ -変形 (その1)

α を (S^2, G_{\sim}) の non-singular 2-cell とする.

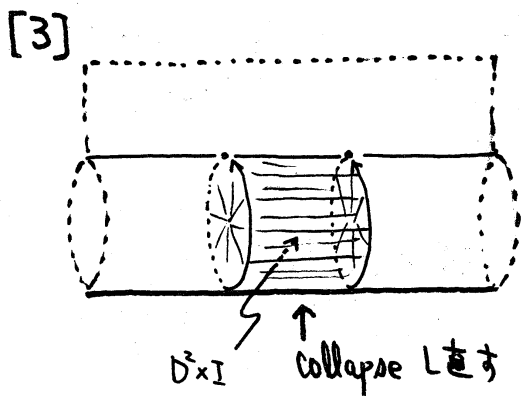
spine S^2/G_{\sim} の方でよく知られたテクニックとして、 α に厚みをつけて collapse の方向を変える方法がある。ここではその特殊な場合について述べ、それを (S^2, G_{\sim}) の言葉へ翻訳することを考える。



α の分割
 β の分割

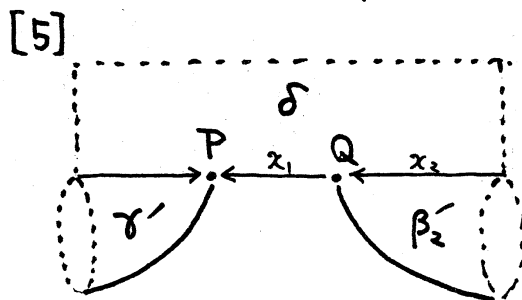
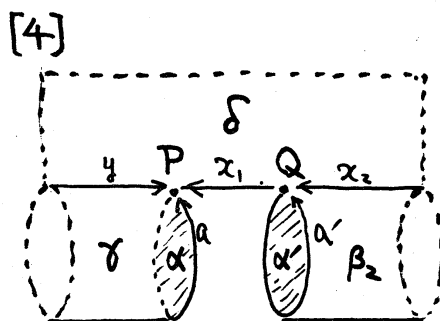


$\uparrow D^2 \times I$ を埋め込む



expanding

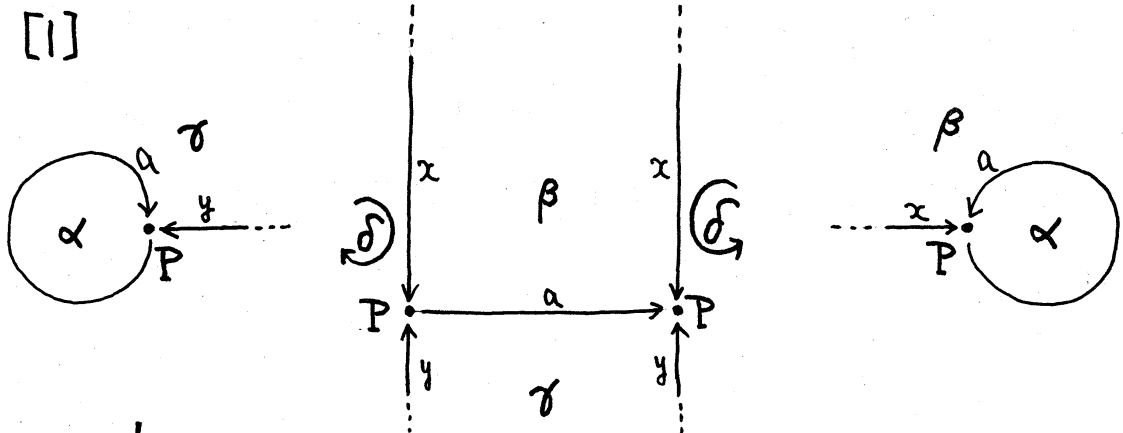
Collapse



ambient isotopy

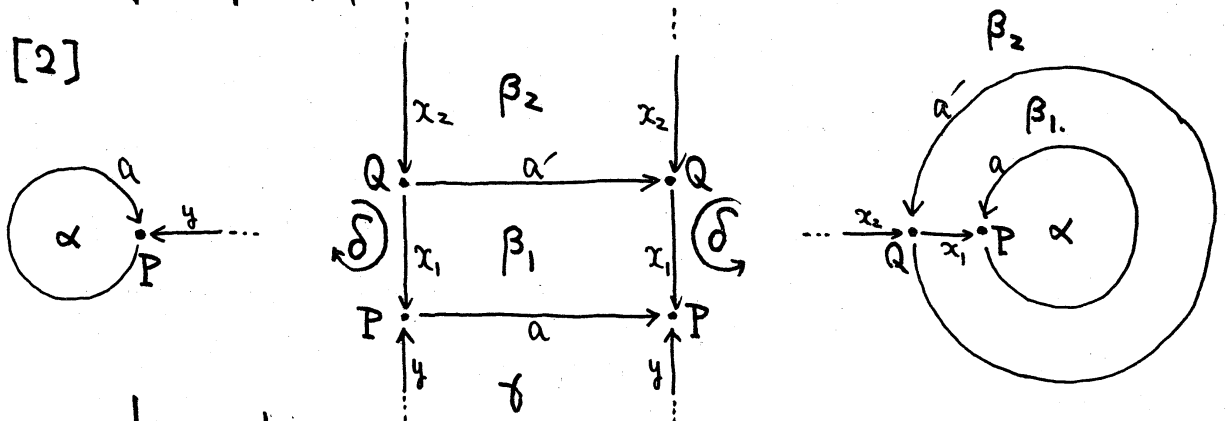
前図に見た Apine の変形 [1] ~ [5] を DS-diagram \wedge 翻訳すると次のようになる。

[1]



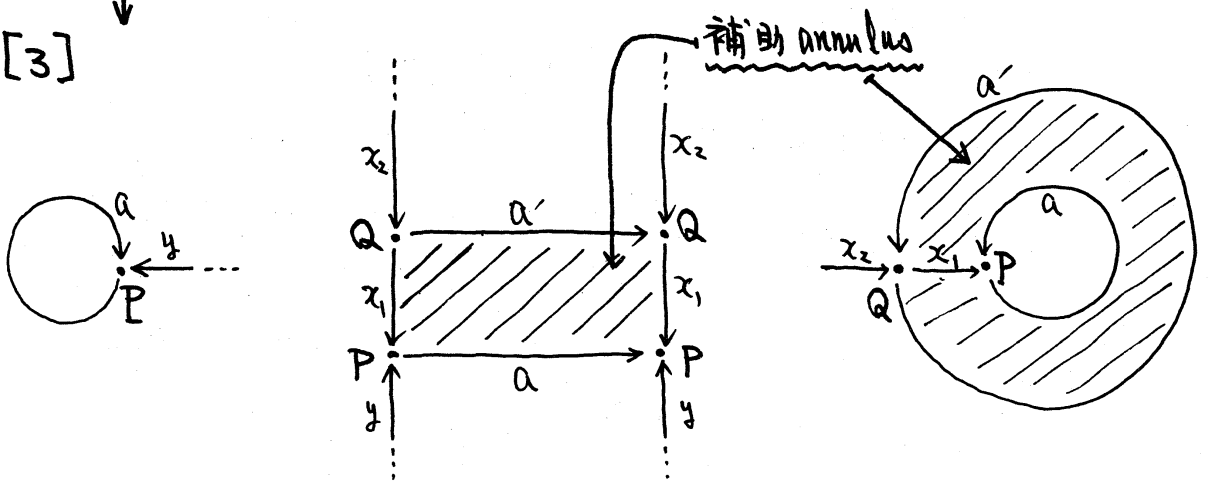
\downarrow $\mathbb{P}: x \rightarrow x_1 x_2$
 \downarrow $\mathbb{Q}: \beta \rightarrow \beta_1 \beta_2$

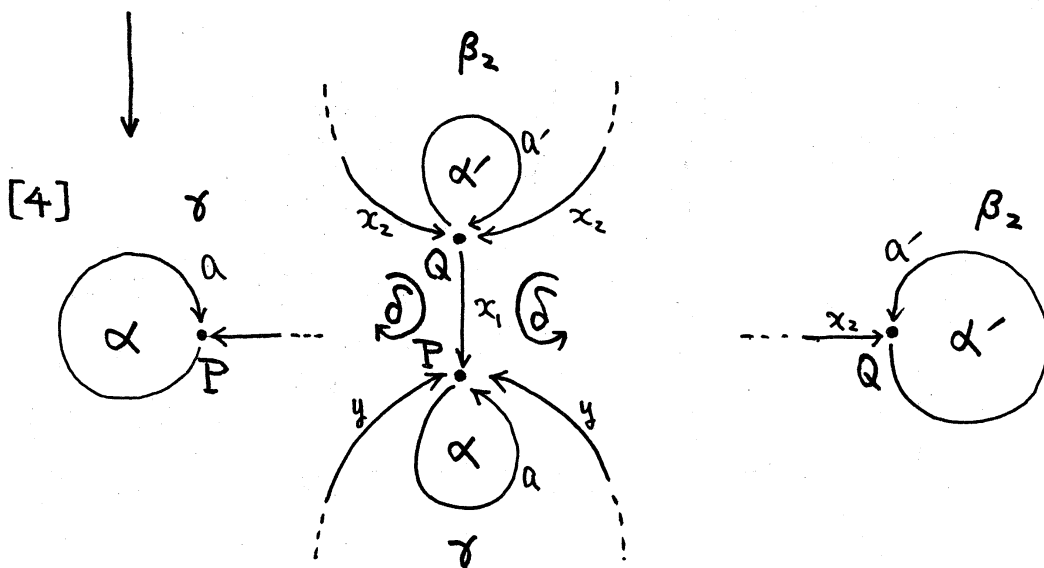
[2]



\downarrow expanding

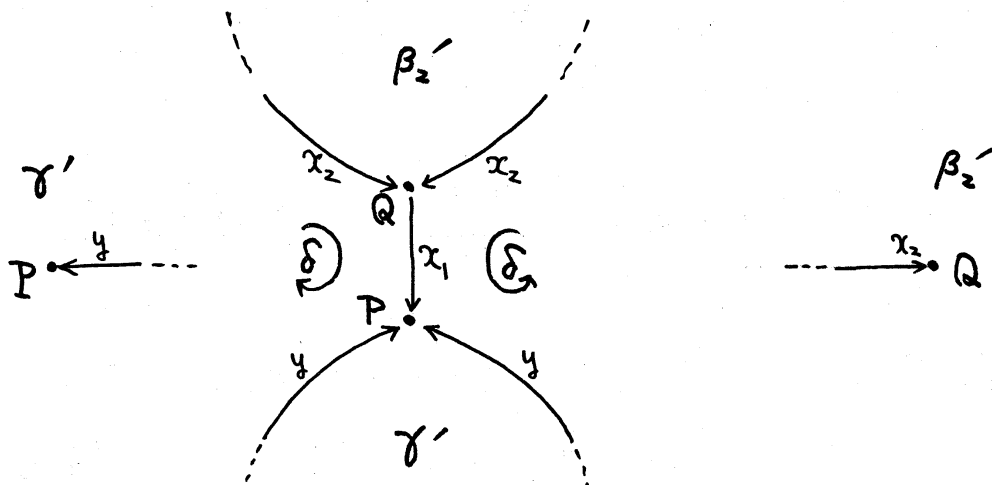
[3]



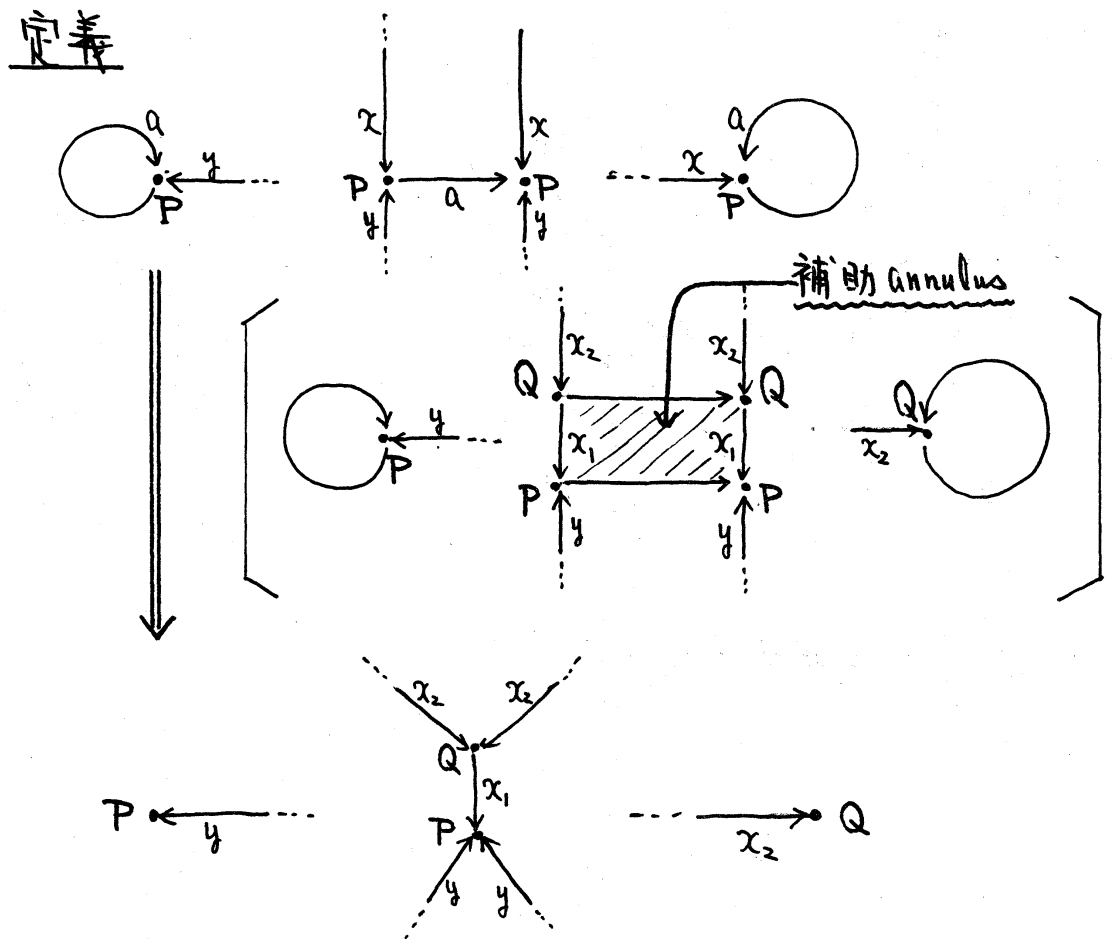


\bar{Q} : 2-cell α, α' の除去

[5]



[1]から[5]の変形で β, γ は消滅してしま、 τ いるから [5]において σ で文字 γ' の代り、 β で文字 β_2' の代りにしてもさしつかえない。このことを利用して次の定義を与えることにする。

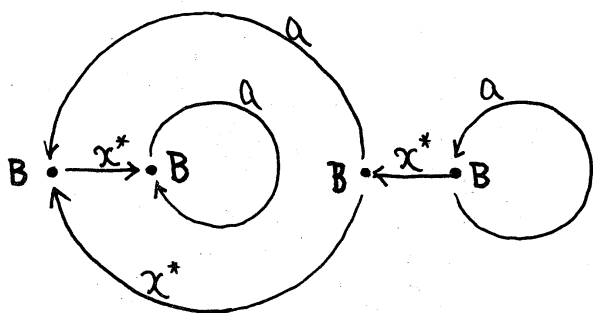


上図の変形を単一種の $D^2 \times I$ -変形 または D_1 -変形と呼ぶ。

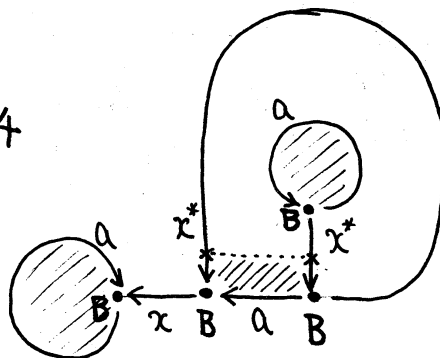
定理 6 D_1 -変形によつて DS-diagram は“変らない。”
 即ち、 (S^2, G_{\sim}) から D_1 -変形によつて (S^2, G'_{\sim}) が得られる
 ならば、 $(S^2, G_{\sim}) \approx (S^2, G'_{\sim})$ である。

以下、いくつかの DS-diagram について調べ、それらからすべて S^3 の DS-diagram であることを示す。

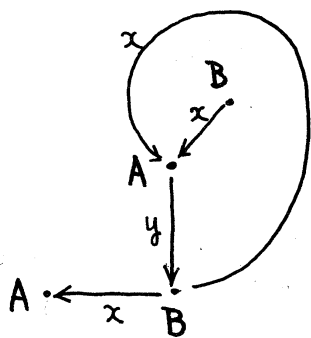
例 17



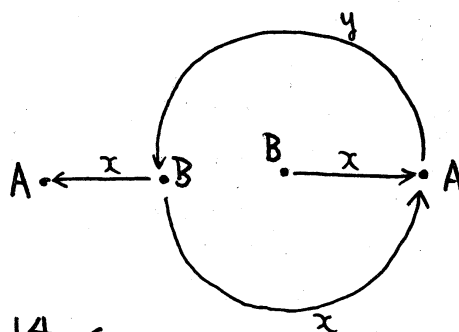
例 4



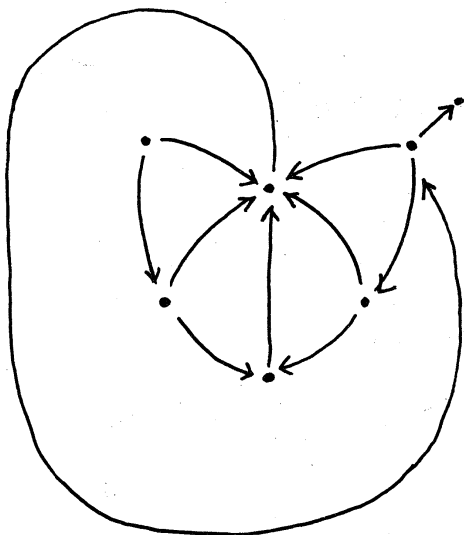
D_1 -变形



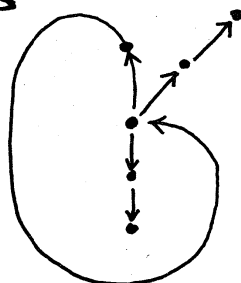
=



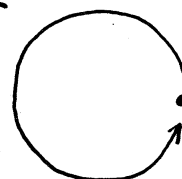
例 14



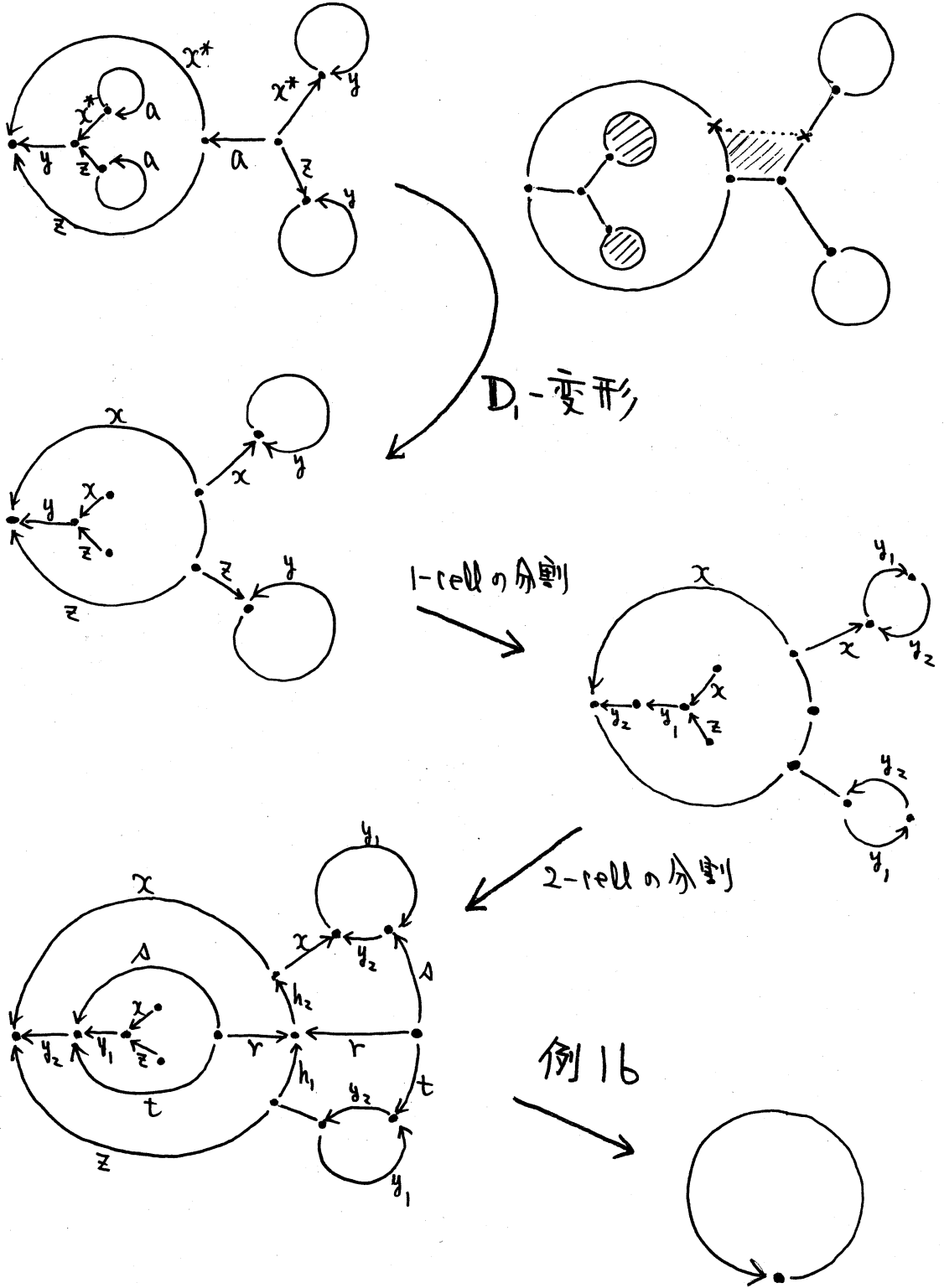
例 15



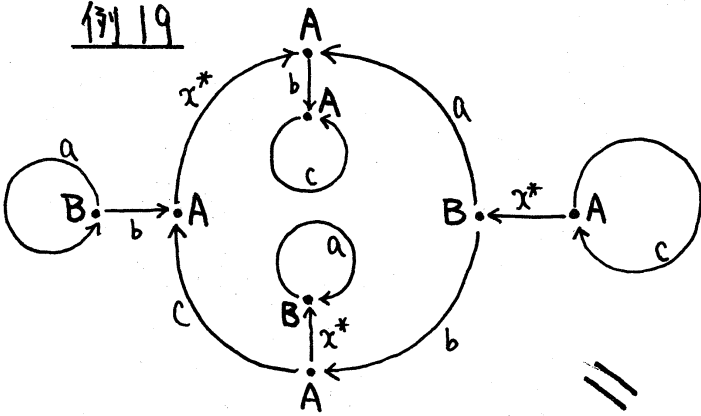
例 12



例 18

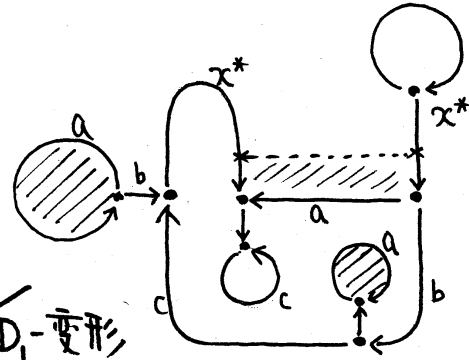


例 19

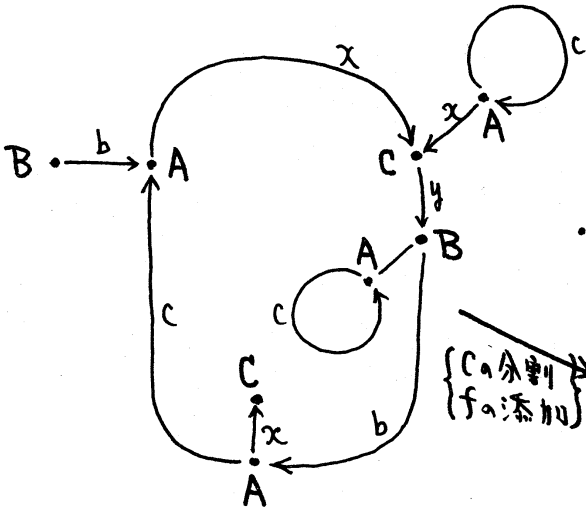


$x^* \rightarrow xy$

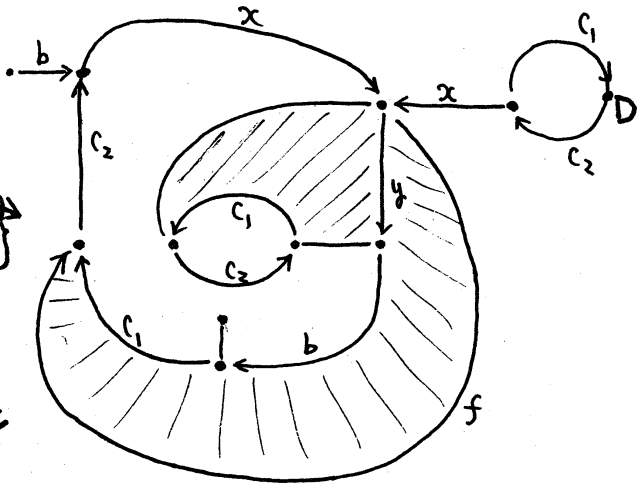
$=$



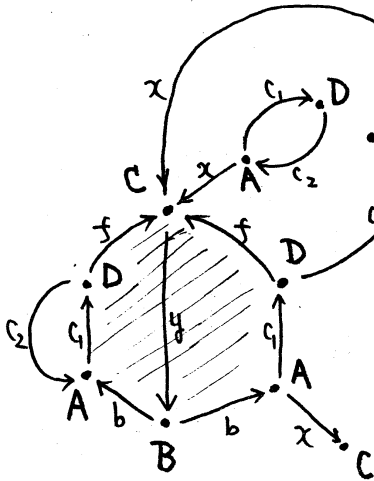
$\swarrow D_1$ -变形



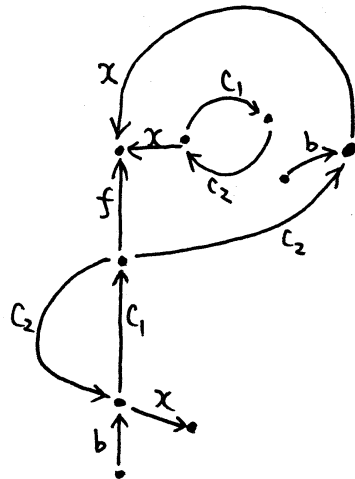
{ C_0 分割
 f_0 添加}



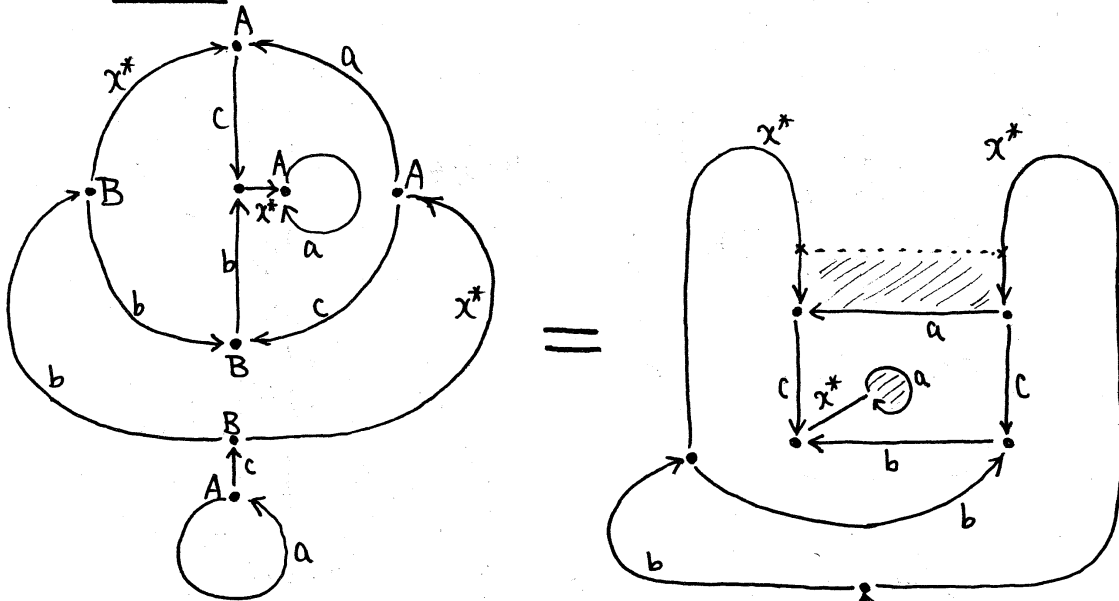
$=$



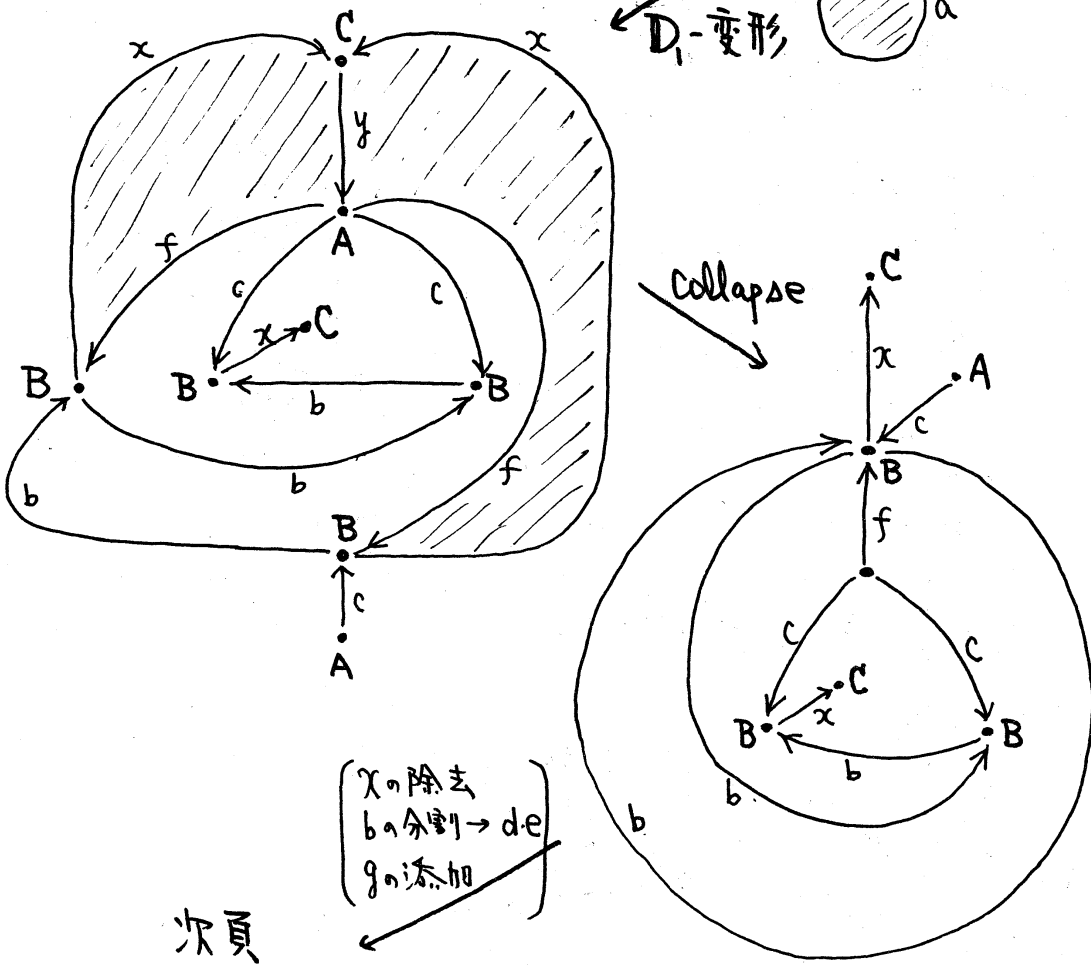
collapse \rightarrow



例 20

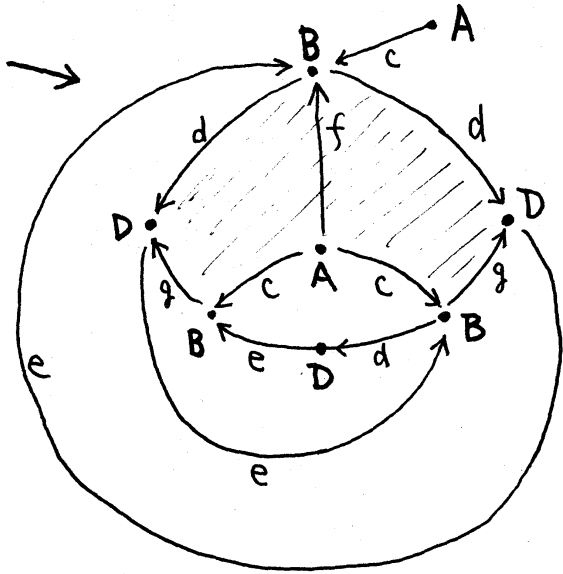


$(x^* = xy)$
 $\leftarrow D_1$ -变形

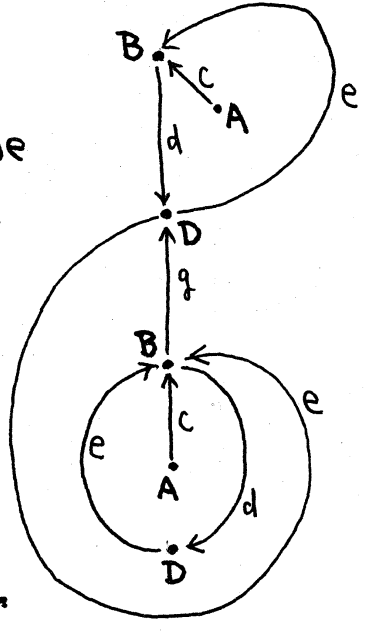


$(x_0$ 除去
 b_0 分割 $\rightarrow de$
 g_0 添加)

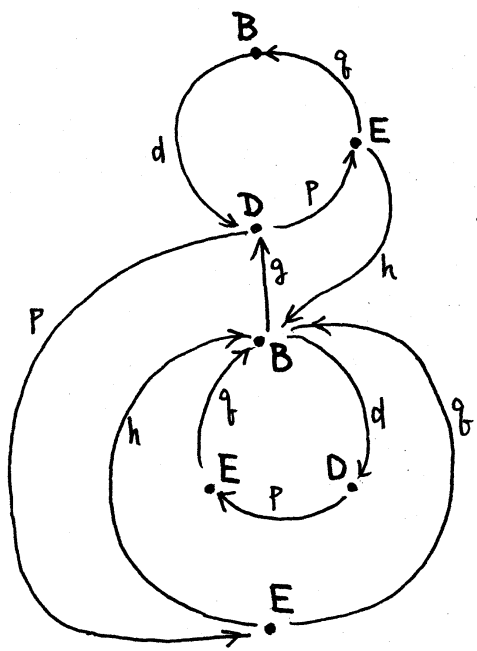
次頁



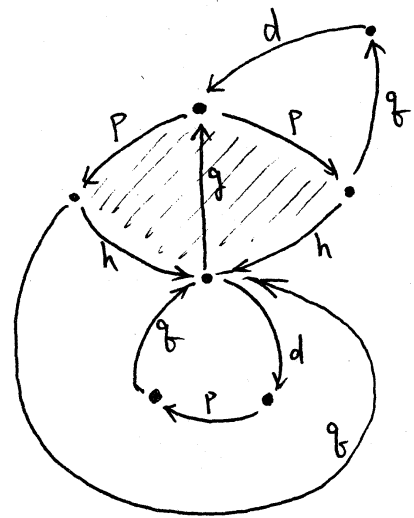
Collapse



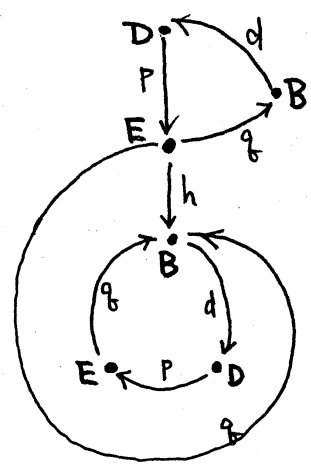
(Cの除去
eの分割 → P, q
hの添加)



=

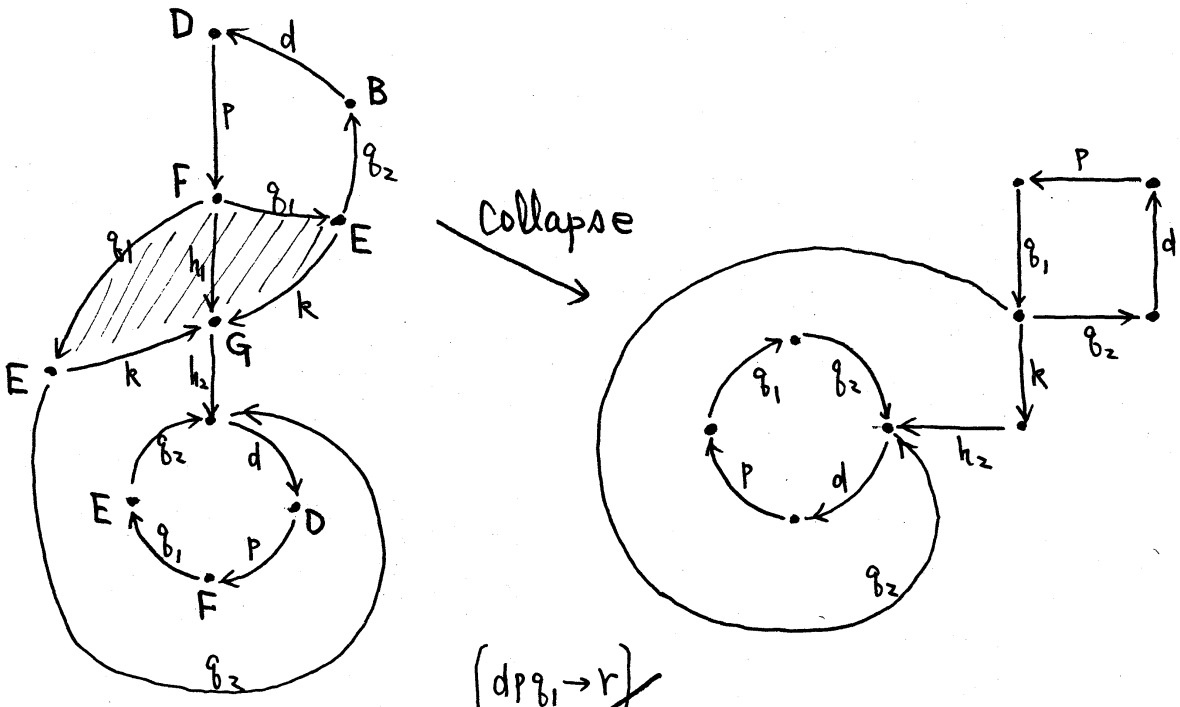


Collapse

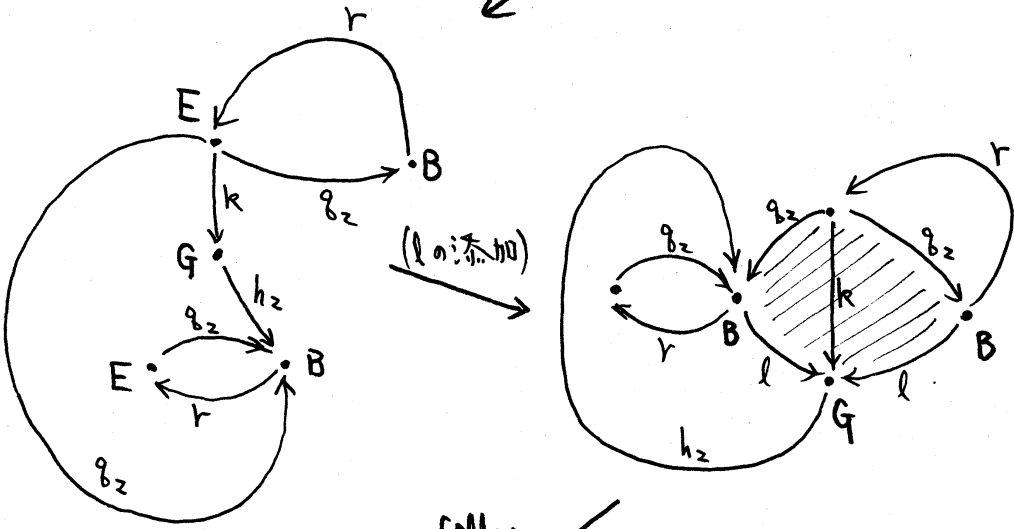


(qの分割 → q₁, q₂
hの分割 → h₁, h₂
kの添加)

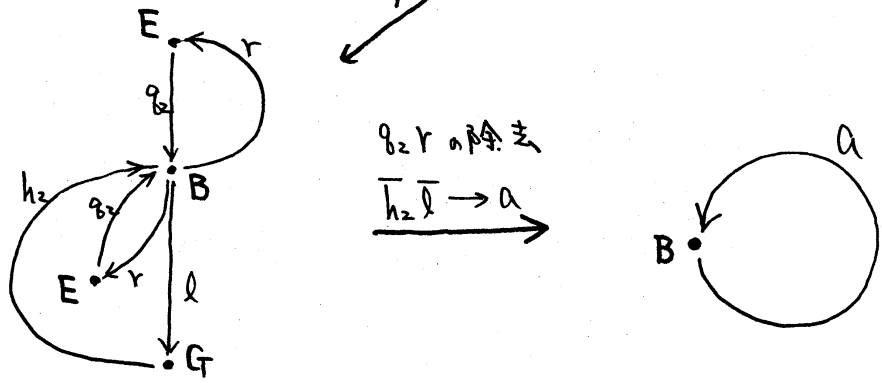
次頁



$(dp g_1 \rightarrow r)$

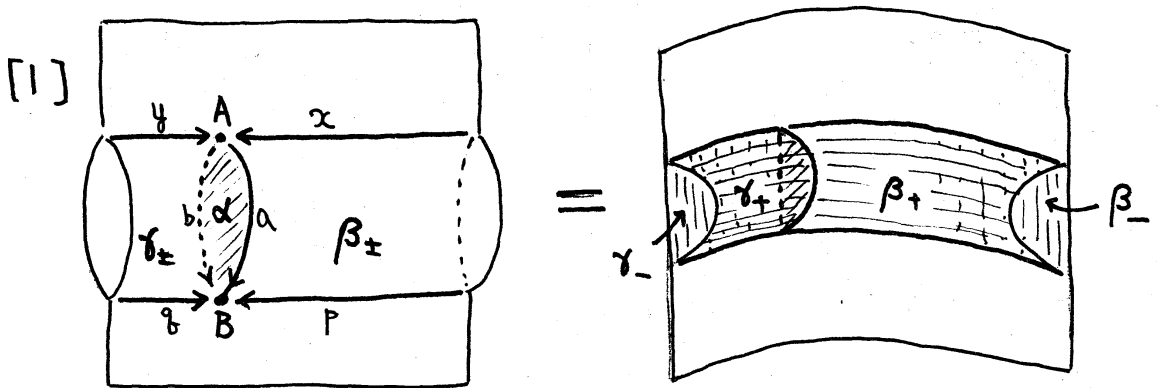


Collapse

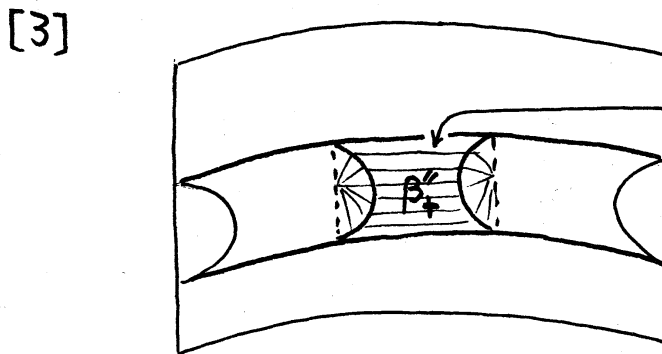
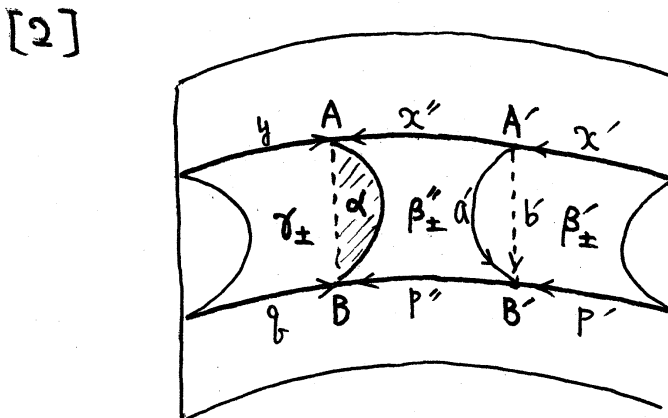


§7. $D^2 \times I$ -変形 (4の2)

§6と同様な議論を行なってみる. 以下は次の spine の変形について考える.

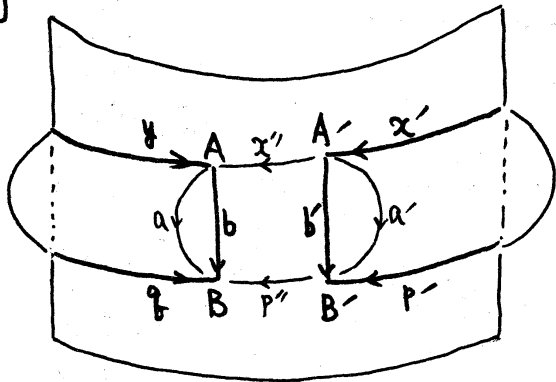


* +は前面, -は背面(右図では平らな方)をあらわすことにする

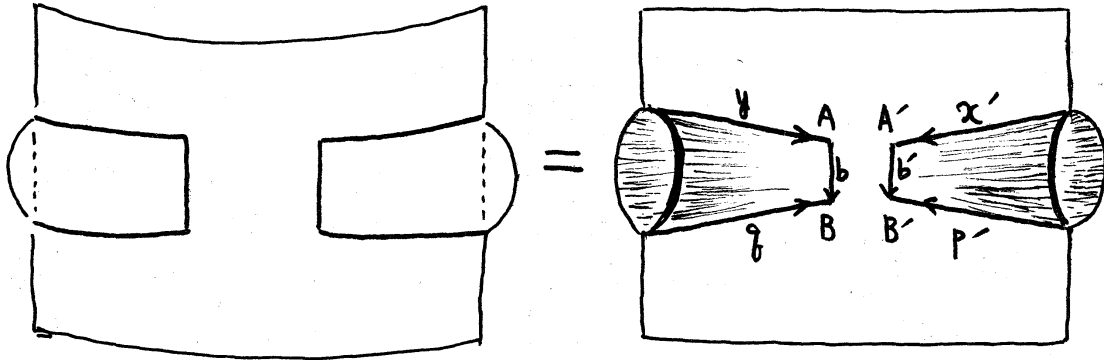


カマボコ状の $D^2 \times I$ を埋め込んで前面 β_+ から collapse 直す.

[4]

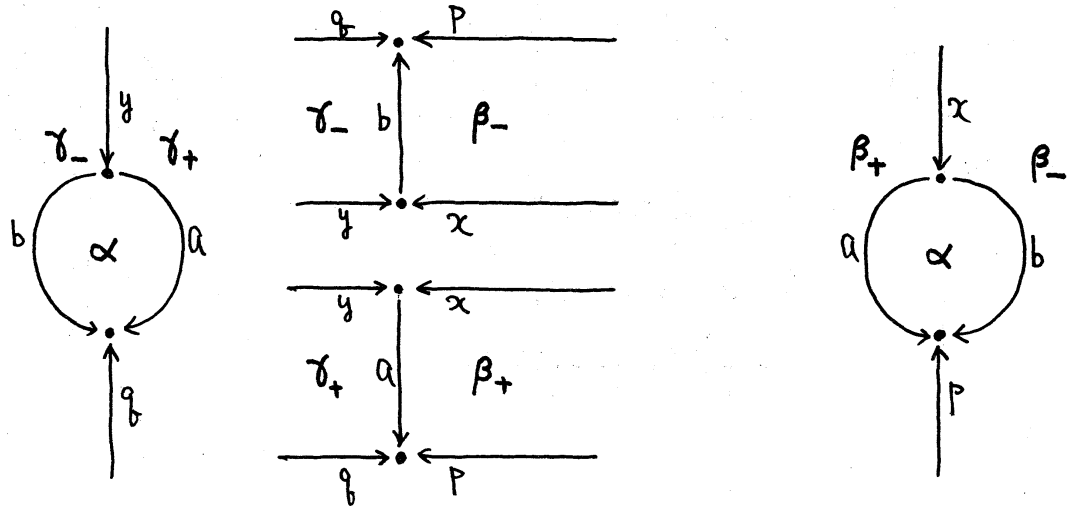


[5]

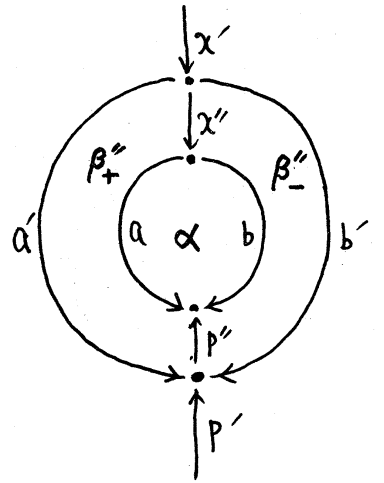
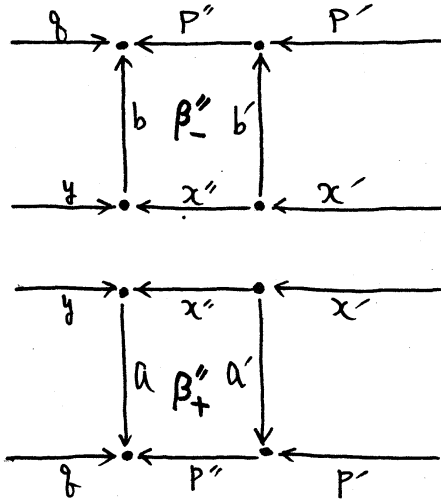
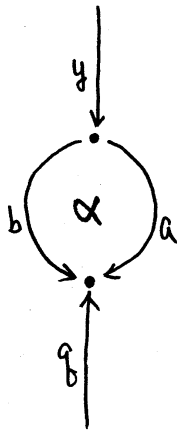


この変形に対応する DS-diagram の変形は以下のようになる。

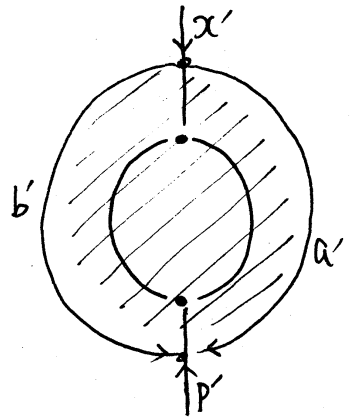
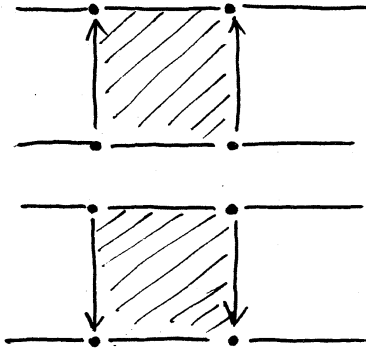
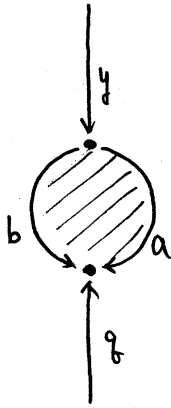
[1]



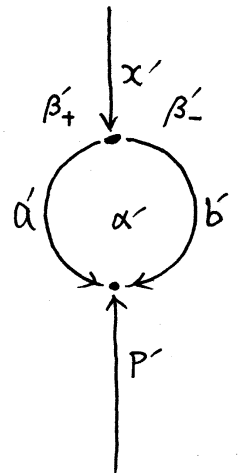
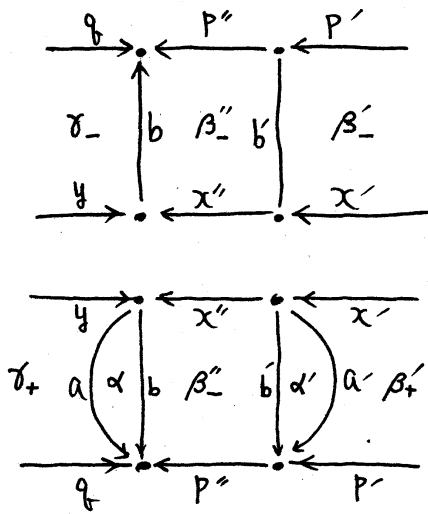
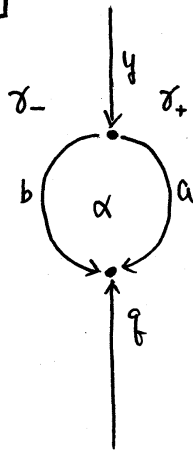
[2]



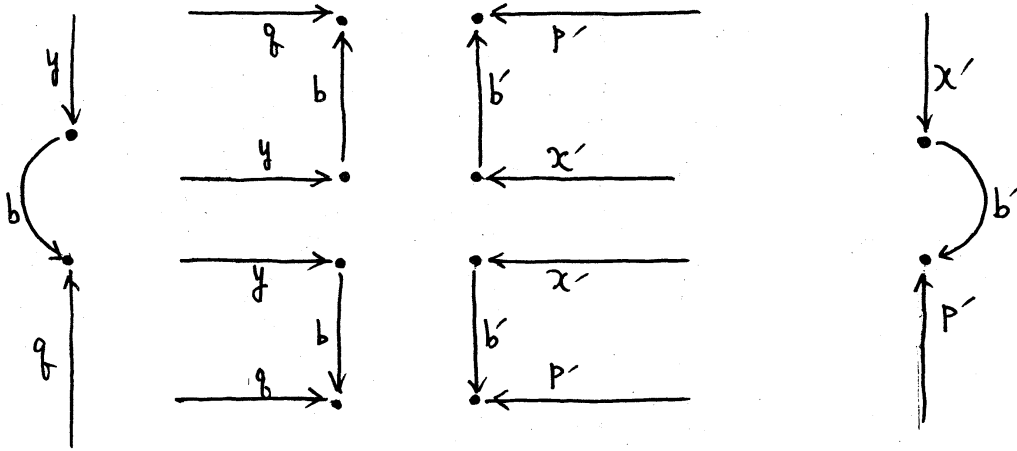
[3]



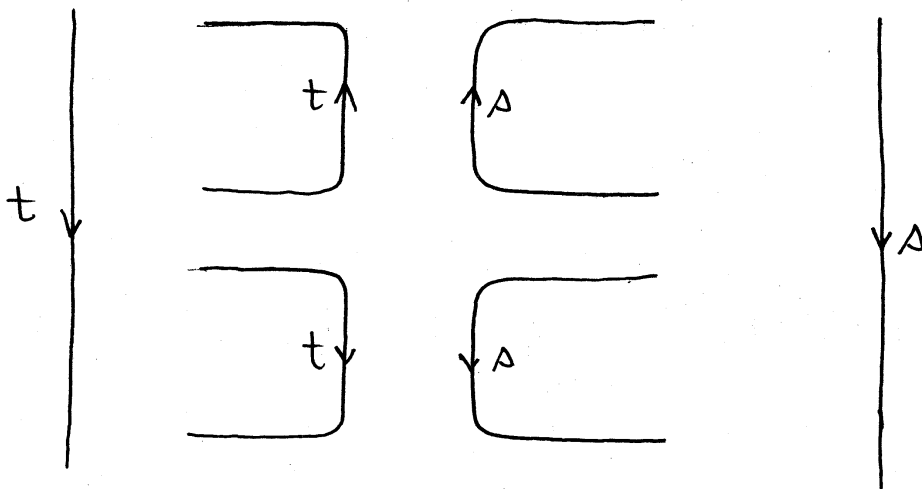
[4]



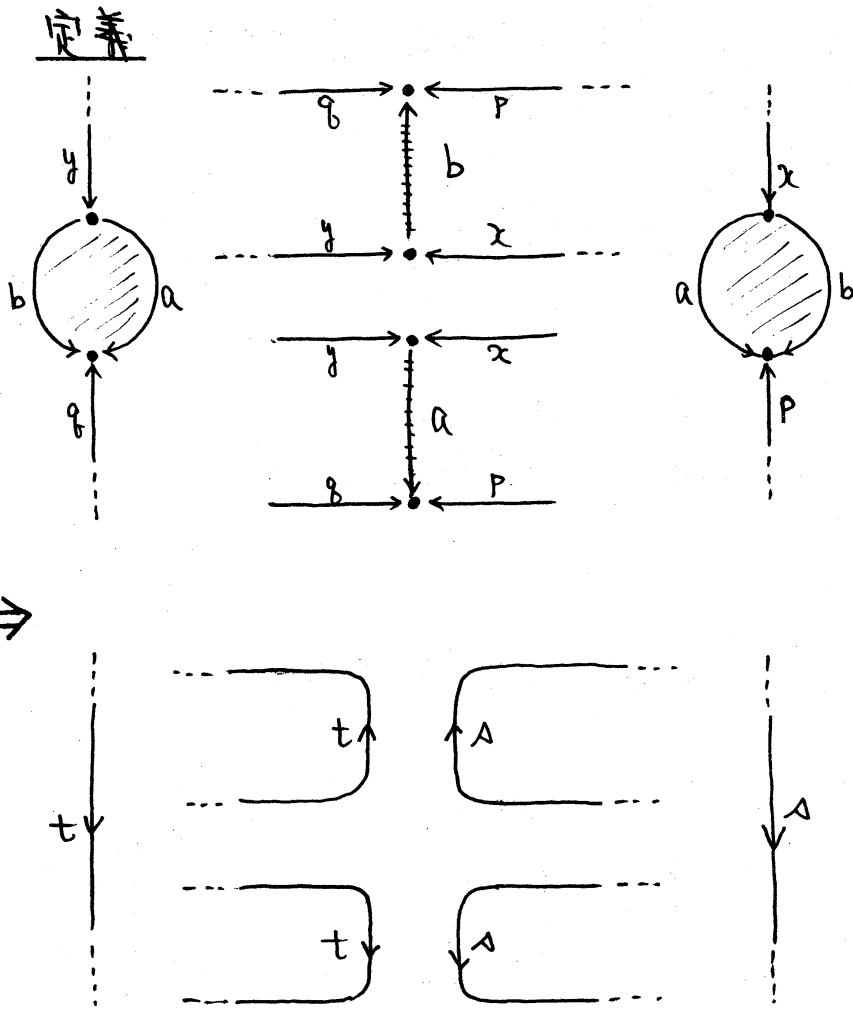
[5] [4] から Q, Q', α, P を除去 (\bar{Q} -変形) すると...



$$\begin{cases} \Delta = \alpha' b' \bar{P}' \\ t = y b \bar{q} \end{cases} \quad \text{で置きかえる (\bar{P} -変形) と.}$$



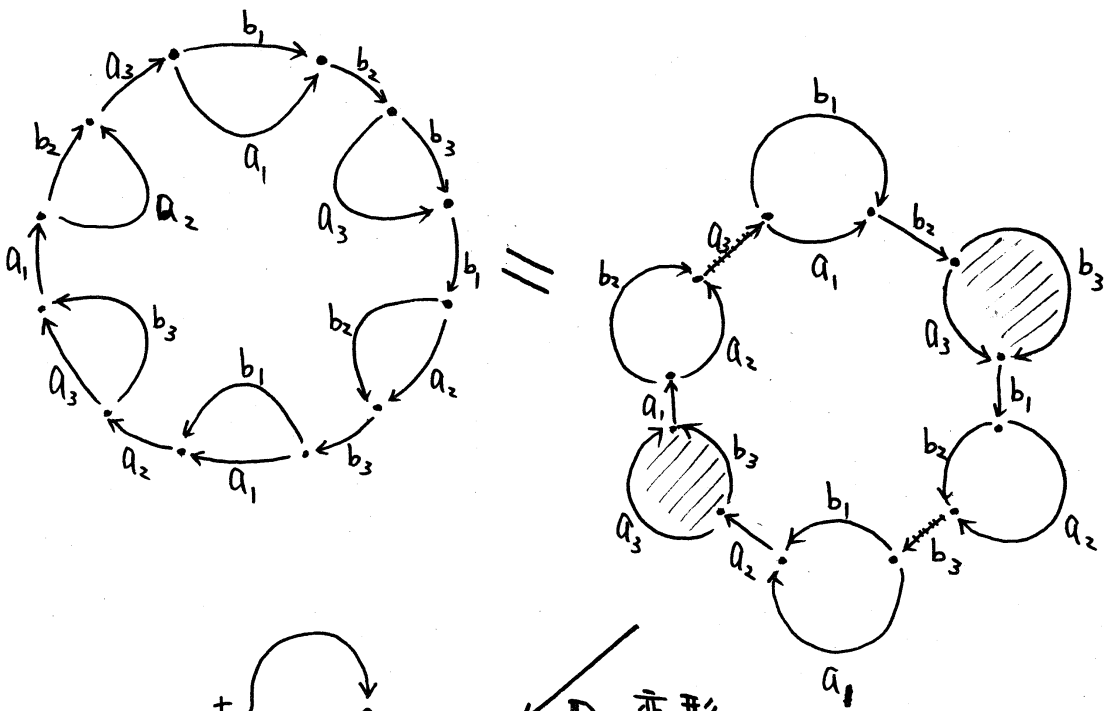
上で見た DS-diagram の [1] から [5] に移る変形を D_2 -変形の定義にした。



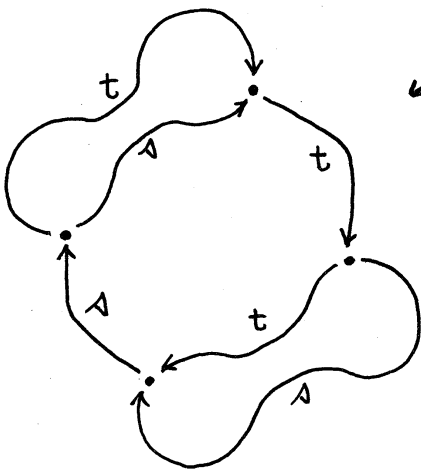
なる変形を第2種の $D^2 \times I$ -変形または D_2 -変形と呼ぶ。

定理 7 D_2 -変形によつて、DS-diagramは“変らない”
 即ち、 D_2 -変形によつて (S^2, G) から (S^2, G') が得られるならば
 $(S^2, G) \approx (S^2, G')$ である。

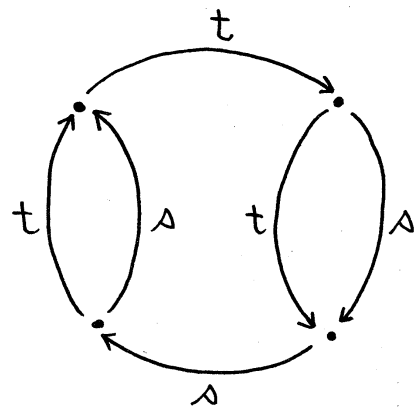
例 21



D_2 -变形



$=$



(完)