数理解析研究所講究録
第 525 巻 1984 年 245-252

最大類比と極大類比について

(On Greatest and Maximal Analogies)

原口　誠　(Makoto Haraguchi)

九州大学理学部附属基礎情報学研究施設

概要

G.Polya の言う明確化された類比は，部分同一(Partial Identity)として捉える事ができ，系の適当な原子論理式表現のもとに，原子論理式からの代入の対として捉える事ができる．上記の定式化のもとに，類比間に順序(quasi-order) を定義する事ができるが本論文では類比の改良手続きとしての類比作用素(And,Refine,Merge)を導入しそれによる順序の特徴付けを行なう．特にAnd 作用素は類比の両立性を表現でき，３つの作用素中最も重要になる．さらに，この順序を用いて極大類比と最大類比という２つの最適な類比を定義できるが，極大類比は一般に複数個存在し，唯一に定まらないという意味でのあいまいさを有している．一方，最大類比はもし存在すれば唯一に決定でき，扱い易い場合として興味がある．我々は最大類比が存在する為の必要十分条件を与える．

1．　部分同一としての類比

類比は問題解決において，しばし絶大な力を発揮するにもかかわらず，一般的な類比の定義，使い方の多様性により，情報システムにその機能を取り込む事には困難な面があっ

た．機械的に類比を扱う為には，処理しうる類比のクラスを明確化しておく必要がある．ここでは G.Polya ［1］の言う関係の一致としての『明確化された類比』を考える．

この明確化された類比は関係の一致を関係名の一致と制限して考えれば，P.H.Winston [2] が言う類比の概念と同じものとなり，与えられた２つの系の部分同一(partial identity) とみなす事ができる．

さらに部分同一は，系の適当な述語表現を与えれば，項の部分同一によって得られる恒等な(identical) 原子論理式の対になる事に着目して，類比の一つの定式化を与える事ができる[3].

定義 1 [3]　S_1，S_2 を変数自由な原子論理式（アトム）の集合，Wをアトムの集合，$\sigma=<\sigma_1 , \sigma_2>$を代入の対とする．この時，(W，$\sigma$) は

PIC1：　$W\sigma=\{<A\sigma_1 , A\sigma_2>: A\in W\}\subseteq S_1\times S_2$

は１対１のアトムの関係，　かつ

PIC2：　$Var(W)\ \sigma=\{X\sigma=<X\sigma_1 , X\sigma_2>: X\in Var(W)\}$

は１対１の項の関係

を満たす時,S_1 と S_2 のもとでの類比と言う．またWσを類比（W，σ）の証拠と言う．但し，Var(W) はW中の変数の集合を表わし,S_1 ,S_2 は共通な個別変数を持たないと仮定しておく．

与えられたS_1，S_2 に対し，類比はいくつも存在しうるが，最適な類比を考察する為に類比間に順序を入れる事が必要になる．

定義 2 [3]　（W，σ），（W'，σ'）を S_1，S_2 の二つの類比とする．この時，ある代入ηが存在して

SUBS：　$W'\eta\subseteq W$，　かつ

COMM：　$X\eta\sigma_i=X\sigma'_i$　（$i=1, 2$）　（$X\in Var(W')$）

が成立する時，（W，σ）は（W'，σ'）より，良い類比と言い，

（W，σ）≧（W'，σ'）　と表記する．

定義より明らかに　(W, σ)の証拠　$W\sigma$　は　(W', σ')の証拠　$W'\sigma$　を含み，また　W'　中の変数　X　が与える項対　$X\sigma$　は　代入　η　を介し　(W, σ)の項対で表わせる事に注意したい．

2.　順序と作用素

順序（quasi-order）　≦　は類比の優劣を論じる為に導入した．従って，与えられた類比（W, σ）を『改良』して新たな類比　(W', σ')　を作りだす操作を考えれば，順序　≦　は当然　(W, σ) ≦ (W', σ')　を満たすべきである．本節では，その様な改良操作として基本的なものと考えられる三つの作用素を与え，≦　が類比の順序付けとして妥当な事を示す．

2．1　Merge 作用素

類比　(W, σ) において，もし$X\sigma = Y\sigma$なる異なる変数X，Yが存在すれば両者は全く同じ項対を表わしているから，XとYは同一視できる．これは実祭 {Y ← X} なる代入で簡単に実現できる．

Merge((W, σ)) :

pre-condition : $\exists X \exists Y \in Var(W)$ [$X \neq Y$ and $X\sigma = Y\sigma$]

output　:　($W\eta$, σ)，但し　$\eta = \{Y \leftarrow X\}$．

定義より明らかに　($W\eta$, σ) は類比であり　($W\eta$, σ) ≧ (W, σ) が成立する．

2．2　Refine　作用素

類比　(W, σ) において，例えば　$X\sigma$ = <f(g(a),b),f(g(a'),b')>なる変数Xがあれば，$X\eta = f(g(X_1),X_2)$ として，さらに小さな項対<a,a'> と<b,b'> に分解する事を考えるのは自然である．Refineはこれを行う．

Refine((W, σ), Γ)

input: 類比(W, σ) 及び以下のCONDを満たすWの変数 $X^{(i)}$ の集合 Γ ($1 \leq i \leq m$ とする),

COND: $X^{(i)}\sigma = \langle term^{(i)}(t_1^{(i)}, \ldots, t_{n_i}^{(i)}),$
$term^{(i)}(t_1^{(i)\prime}, \ldots, t_{n_i}^{(i)\prime}) \rangle$ と書ける.

output: ($W\eta$, τ), 但し

$\eta = \{X^{(i)} \longleftarrow term\ (X_1^{(i)}, \ldots, X_{n_i}^{(i)}) : 1 \leq i \leq m\}$

$\tau = \sigma|_{Var(W)\setminus\Gamma}$
$\sqcup \{X_j^{(i)} \sim \langle t_j^{(i)}, t_j^{(i)\prime} \rangle\}$,

ここに $X_j^{(i)}$ は新たに導入された変数とし, $X \sim \langle t, t' \rangle$ は $X \longleftarrow t$ と $X \longleftarrow t'$ なる代入の対を表わす.

定義より $Y \in Var(W) \setminus \Gamma$ なら $Y\sigma = Y\eta\tau$ が成立する. $X \in \Gamma$ なら $X\eta\tau_1 = term\ (X_1, \ldots, X_n)\ \tau_1 = term\ (t_1, \ldots, t_n) = X\sigma_1$, 同様に $X\eta\tau_2 = X\sigma_2$ が成立する. 従って, ($W\eta$, τ) が類比なら($W\eta$, τ) $\geq$(W, σ) となる. 一般には導入されたXがつくる項対 $X\tau$ が ($Var(W) \setminus \Gamma$) σ の1対1性をくずす事があるから, ($W\eta$, τ) は必ずしも類比とはならない.

2.3 And 作用素

二つの類比 (W, σ) と(W', σ')を得ているとき, 両者をまとめて一つの類比にしたい.

And((W, σ), (W', σ')) := ($W \sqcup W'$, η),

但し $\eta = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$,

$\eta_i = \{X \leftarrow X\sigma_i : X \in Var(W)\}$
$\{Y \leftarrow Y\sigma_i' : Y \in Var(W')\}$, また必要ならば名前を変えて $Var(W) \cap Var(W') = \phi$ にしておく.

明らかに($W \sqcup W'$, η) $\geq$(W, σ), (W', σ')が成立するが, Refineのときと同様に ($W \sqcup W'$, η) は類比になるとは限らない. 後者の場合, 二つの類比は両立しない事を意味する.

Refine及びAnd に対して出力(W, λ) が類比である時，それぞれ，Refineできる，And がとれる，と言う事にする．

定理１　類比(A, σ),(B, τ) に対し，(1),(2) は同値．

(1) $(A, \sigma) \leqq (B, \tau)$

(2) (B, τ) は(A, σ) から，Refine, Merge ，及びAnd 作用素の有限回の適用により作られる．

すなわち，順序がつくのは，類比の改良操作を続けていき，一方から他方が構成できる時に限る事を定理１は主張する．

証明　(1)<=(2)は明らか．

(1)=>(2)：$(A, \sigma) \leqq (B, \tau)$ 故に$A\eta \subseteq B$，$X\sigma = X\eta\tau$　$(X \in Var(A))$ なるηが存在する．まずStep1 で(A, σ) をηでRefineした類比を作り，Step2でMerge により(B, τ) の部分類比を作り，これと残りの部分類比との Andを取って，さらに必要ならばMerge を行い(B, τ) が得られる事を示す．

Step1:　Γを $\{X \in Var(A)\colon X\eta$ は変数でない$\}$ とする．$\Gamma = \phi$ ならStep2 へ進む．

$\Gamma \neq \phi$　なら　$(C, \xi) := Refine((A, \sigma), \Gamma)$ を考える．　$X \in \Gamma$に対し　$X\eta = term(Z_1, \ldots, Z_n)$　$Z_j \in Var(B)$　とする．Z_j　のかわりに導入されたCの変数X_jに対して$X_j\xi = Z_j\tau \in Var(B)\tau$ が成立する．$Y \in Var(A) \setminus \Gamma$ なら$Y\xi = Y\sigma = Y\eta\tau$ だが $Y\eta$は Bの変数だから $Y\xi \in Var(B)\tau$．以上より　$Var(C)\xi \subseteq Var(B)\tau$ で$Var(B)\tau$が１対１な事より$Var(C)\xi$も１対１．また $C\xi = A\sigma$より (C, ξ) は類比となる．　さらに $\eta^* := \{X_j \leftarrow Z_j\} \sqcup \eta|_{Var(B) \setminus \Gamma}$ によって$(C, \xi) \leqq (B, \tau)$ となる事も明らか．ここで　η^*　は変数を変数にかえる代入である事に注意して，(C, ξ) 及び　η^*を改めて (A, σ) ，ηとおく．

Step2: $X\sigma = X\eta\lambda$ $(X \in Var(A))$ だから，もし A中の変数X,Y で $X\eta = Y\eta$なるものがあれば $X\sigma = Y\sigma$だから $\{X \leftarrow Y\}$ なるMerge を行なえる．この操作を $X\eta = Y\eta$なる異なるX,Y の組

がなくなるまで続ければ，$A'\eta'\sqsubseteq B$， $X\xi=X\eta'\tau$ $(X\in Var(A'))$ かつη'は変数を変数にかえる代入でしかもその対応が１対１となる(A',ξ)とη'が得られる．

$A'\eta'\sqsubseteq B$ だからA'は Bの部分集合と同一視できる．さらに $X\xi=X\eta'\tau$ $(X\in Var(A'))$により$(A',\xi|_{Var(A')})$と$(A'\eta',\tau|_{Var(A'\eta')})$が変数の名前代えを除いて一致する．この同一視のもとに，必要ならばMerge をとり，(B,τ)が得られる． ［証明終］

３． 最大類比

［３］において我々は最適類比をその極大性で捉えた．

定義 ３ ［３］ 類比(W,σ)は，任意の類比(W',σ')に対し$(W,\sigma)\leqq(W',\sigma')$ならば$(W,\sigma)\sim(W',\sigma')$となる時，極大類比と言う．但し$(A,\lambda)\sim(B.\ \xi)$とは$(A,\lambda)\leqq(B,\xi)$かつ$(A,\lambda)\geqq(B,\xi)$なる事と定める．

極大類比はそれより優れた類比を持たないという意味で最適性を有するが，一般に極大類比は$\sim$による同一視を除いても複数個存在する．この複数性は類比が一意には定まらない事を意味し，一つのあいまいさと考えられる．

定義 ４ 任意の類比(W',σ')に対し，$(W,\sigma)\geqq(W',\sigma')$が成立する類比$(W,\sigma)$を最大類比と言う．

最大類比が存在する場合は，前述した意味でのあいまいさがなくなり，扱い易い類比として興味がある．そこで，この節では，最大類比が存在する為の必要十分条件を与える．

定理　２　　少なくとも一つの類比が存在するS_1, S_2 に対し，最大類比が存在する為の必要十分条件は，任意の二つの類比に対し必要ならばRefineをとってAnd が取れる事である．

証明　　必要性：(W, λ) を最大類比とする．$(W, \lambda) \geq (A, \sigma), (B, \tau)$ だから $W\lambda \sqsupseteq A\sigma, B\tau$ より $A\sigma \sqcup B\tau$は１対１．従って $\mathrm{Var}(A)\sigma \sqcup \mathrm{Var}(B)\tau$が１対１なら $\mathrm{And}((A, \sigma), (B, \tau))$は類比．よって１対１でない時を調べればよい．$\mathrm{Var}(A)\sigma$及び$\mathrm{Var}(B)\tau$は１対１だから

(2-1) $\exists X \in \mathrm{Var}(A) \exists Y \in \mathrm{Var}(B)[(X\sigma_1 = Y\tau_1 \text{ and } X\sigma_2 \neq Y\tau_2) \text{ or}$

$(X\sigma_1 \neq Y\tau_1 \text{ and } X\sigma_2 = Y\tau_2)]$　　が成立する．

$(W, \lambda) \geq (A, \sigma)$ を与える代入をη，$(W, \lambda) \geq (B, \tau)$ を与える代入をθとして，

$\Gamma(A) := \{X \in \mathrm{Var}(A) : X\eta$は変数ではない$\}$

$\Gamma(B) := \{Y \in \mathrm{Var}(B) : Y\theta$は変数ではない$\}$　とおく．

もし　$\Gamma(A) = \Gamma(B) = \phi$なら(2-1) の変数X,Y に対し

$[(X\eta)\lambda_1 = (Y\theta)\lambda_1 \text{ and } (X\eta)\lambda_2 \neq (Y\theta)\lambda_2]$ or

$[(X\eta)\lambda_1 \neq (Y\theta)\lambda_1 \text{ and } (X\eta)\lambda_2 = (Y\theta)\lambda_2]$

が成立するが，$X\eta, Y\theta$は Wの異なる変数となるから $\mathrm{Var}(W)\lambda$の１対１性に反する．従って$\Gamma(A)$，$\Gamma(B)$ の少なくとも一方は空でない．　$\Gamma(A) \neq \phi$，$\Gamma(B) = \phi$ の時を考える．［他の場合も同じ］　定理１のStep1 の議論をそのまま用いて，

$(A', \sigma') := \mathrm{Refine}((A, \sigma), \Gamma(A))$　は $\mathrm{Var}(A')\sigma' \sqsubseteq \mathrm{Var}(W)\lambda$なる類比となる．一方，$\Gamma(B) = \phi$ より明らかに $\mathrm{Var}(B)\tau \subseteq \mathrm{Var}(W)\lambda$．従って $\mathrm{Var}(W)\lambda$の１対１性により　$\mathrm{Var}(A')\sigma'$, $\mathrm{Var}(B)\tau$　共に１対１となる．即ち，(A', σ')と (B, τ) のAnd が取れる．

十分性：［3］において

写像　$\lambda[A \in D].\ A\tau : D \longrightarrow S_1 \times S_2$

が１対１な類比（D，τ）を標準類比(cannonical analogy)と呼び，任意の類比 (A, θ) に対し $(A, \theta) \leq (D, \tau)$ なる標準類比が存在する事を示した．標準類比は変数の名前代

えを除いて高々有限個しか存在しないから，それらの And（必要ならばRefineをとり）をとったものが求める最大類比となる．　[証明終]

系　S_1, S_2 が関数記号を含まず類比を少なくとも一つもつ時，最大類比が存在する為の必要十分条件は類比が Andで閉じている事である．

謝辞

本研究を行なうにあたり励ましと有意義な示唆を与えて頂いた有川節夫先生に深謝いたします．

参考文献

[1] G. Polya: Induction and analogy in mathematics,Princeton Univ. Press (1954).

[2] P.H. Winston : Learning and reasoning by analogy,CACM,23,12,689-703 (1980).

[3] M. Haraguchi: Analogy is a kind of generalization,情報システム研究会資料, Oct.,(1983).