数理解析研究所講究録
第525巻 1984年 253-271

Topos を用いた意味論モデル

釧路高専　水上達就 (Tatsunari Mizukami)

1. はじめに.

Relational Database の Relation は何らかの表現の意味を構成している。例えば、部品No, 部品の色の2つの属性を持つ Relation は"部品のNoとその色"という意味を構成し、この Relation から作られる赤色の部品の No の Relation は"赤い部品のNo"なる意味を構成する。このような Relation の構成する意味のモデルとして、Codd の Alpha-expression と Relational Algebra の対応[1]がある。しかし、このモデルは first order logic の対応のみで、Sum, Average, Group-by 等を含む、現在用いられている Relational Database の意味モデルとはならない。

Relation を加工する operation、例えば union, intersection, difference, Cartesian product, join, projection, etc と Relation を組合せることで Category の一種である Topos を構成できる。Topos は many sorted higher order intuitionistic logic

と1対1に対応している。[2] 即ちRelationとoperationはTopos を構成し、同時にmany sorted higher order intuitionistic logic を構成する。従って、many sorted higher order intuitionistic logicのformulaはすべてRelationとoperationによって記述可能である。即ち、そのformulaの意味としてのRelationを構成できる。本稿はToposのこの対応をRelationの構成する意味モデルとして用い各formulaとその対応するRelationの構成を考察するものである。

自然言語の意味記述として、Montague Grammar[3]が良く知られている。これはmany sorted higher order logicで自然言語の意味記述を行うものである。従って、Relationが構成するToposによって自然言語の意味記述も可能となる。以下ではまとして、データ・ベースのqueryを一つのformulaと見なし、その意味としてのRelation構成を考察するが、自然言語の意味記述もこの意味モデルで可能である。

以下では、RelationからToposを構成し、queryをformula化し、そのformulaに対応するRelation構成を具体的に記述する。

2、準備

ここではRelationとToposの定義を行う。Relation Ω を属性が真理値のRelation $\{(T), (F)\}$ と定義する。

Rを Relation とする時、$\delta(R)$ をRの属性集合とする。

Relation R がその属性集合 α に関する projection $R|\alpha$ を domain とし $\delta(R)-\alpha$ の属性の属性値集合の Cartesian product を値域とする写像である時、(R) を $R|\alpha$ から $\delta(R)-\alpha$ への写像を属性とする tuple であると定義し、R を写像 Relation と呼ぶ。この定義により集合を要素として持つ tuple の Relation 構成が可能となる。

次に、これらの Relation を用いて Topos を構成する。Relation $R_1, \cdots, R_n$ から作られる Category $PRe(R_1, \cdots, R_n)$ を次のように定義する。(4)

1) (Object)

a) $R_1, \cdots, R_n, \Omega, N$ は $PRe(R_1, \cdots, R_n)$ の object である。

b) R を $PRe(R_1, \cdots, R_n)$ の object とする時、R の部分集合は $PRe(R_1, \cdots, R_n)$ の object である。

c) R, U を $PRe(R_1, \cdots, R_n)$ の object とする時、$R \times U$, $R \wedge U$, $R \vee U$, $R - U$ もまた $PRe(R_1, \cdots, R_n)$ の object である。

d) R が $PRe(R_1, \cdots, R_n)$ の object であり、また写像 Relation である時、$\{(R)\}$ は $PRe(R_1, \cdots, R_n)$ の object である。

2) (morphism)

R, R' を $PRe(R_1, \cdots, R_n)$ の object とする時、$R \to R'$

なる写像はRからR'へのmorphismである。

$PRe(R_1, \cdots, R_n)$のobject全体を$Ob(PRe(R_1, \cdots, R_n))$と表わす。上記定義より、A, Bが$PRe(R_1, \cdots, R_n)$のobjectである時、$A \times B$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A|\alpha$（αはAの属性集合），$A[\alpha\theta\beta]B$, $A[\alpha\theta\beta]$（α, βはA, Bの属性集合で、θはα, β間の関係）はすべて$PRe(R_1, \cdots, R_n)$のobjectとなる。

このCategory $PRe(R_1, \cdots, R_n)$はToposの条件product, terminal object, power object, subobject classifierを持つことより、Toposである。(4) 従って、$PRe(R_1, \cdots, R_n)$はmany sorted higher order intuitionistic logicのformulaの意味構成ができる。

3. <u>Toposとmany sorted higher order intuitionistic logic</u>

$PRe(R_1, \cdots, R_n)$のobject Aに対して、$\hat{A}$を次のように定義する。　$\hat{A} = \{(\{(a, T)\} \cup \{(x, F) : x \in A - \{a\}\}) \; ; a \in A\} \cup \{(\phi)\}$

$\hat{A}$はAからΩへの写像全体の集合であるpower object Ω^Aの部分集合より$Ob(PRe(R_1, \cdots, R_n))$の要素となっている。また、$\hat{A}$の各tupleはAのtuple aに関する特性関数となっているためAのtuple集合と特性関数を置換えるならば$\hat{A}$は$\{\{a\} : a \in A\} \cup \{(\phi)\}$となる。この時、$\eta_A : A \to \hat{A}$なる写像を次のように定義する。

Aの要素aに対して、$\eta_A(a) = (\{(a, T)\} \cup \{(x, F) : x \in A - \{a\}\})$

$$= \{a\}$$

定義より、η_A, $\hat{A}$はpartial map classifier(4)を構成する。

上記 object, morphism を用いて、$PRe(R_1,\cdots,R_n)$ の many sorted higher order intuitionistic logic への対応を作成する。

属性 a の属性値集合 E_a を $\prod_{R\in Ob(PRe(R_1,\cdots,R_n))} R|a$ と定義する。この時、R を $PRe(R_1,\cdots,R_n)$ の object とするならば、次の diagram は pull-back [2] となる。

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "Pb"] & \prod_{a\in\delta(R)} E_a \arrow[d, "\chi_R"] \\ \{(T)\} \arrow[r, "t"] & \Omega \end{tikzcd}$$

、但し、i, χ_R, t は各々次の morphism である。

x を R の要素とすると　　$i(x)=x$,

x を $\prod_{a\in\delta(R)} E_a$ の要素とすると　　$\chi_R(x)=\begin{cases} x\in R \text{ の時、} (T) \\ x\notin R \text{ の時、} (F), \end{cases}$

$t((T))=(T)$

また、pull-back と Topos の定義より、R の特性関数である χ_R と t から作られる pull-back diagram は上記 object R と morphism i を持ち、これは χ_R に対して unique に決定される。[7] 従って、ここでの pull-back とは $\chi_R(x)=(T)$ を満たす x の集合(即ち $R=(\chi_R)^{-1}((T))$)と inclusion map i を作ることである。

$PRe(R_1,\cdots,R_n)$ の object R 上の predicate F は $\prod_{a\in\delta(R)} E_a$ 上の predicate と見なすことができ、さらに、次のような pull-back diagram の morphism $\widetilde{\varphi}_R$ に対応する。[2]

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\xi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & \prod_{a\in\sigma(R)} E_a \arrow[r, "\eta_{\prod E_a}"] \arrow[d, "\varphi_R"] \arrow[dr, phantom, "pb"] & \widetilde{\prod_{a\in\sigma(R)} E_a} \arrow[d, "\widetilde{\varphi_R}"] \\
\{(T)\} \arrow[r, "t"] & \Omega \arrow[r, "id"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

但し、φ_R は $\prod_{a\in\sigma(R)} E_a \to \Omega$ なる morphism であり、$\widetilde{\varphi_R}$ は $\widetilde{\varphi_R}\circ\eta_{\prod_{a\in\sigma(R)} E_a} = \varphi_R$ を満たす $\widetilde{\prod_{a\in\sigma} E_a} \to \Omega$ なる morphism である。

この時、φ_R は $\prod_{a\in\sigma(R)} E_a$ から Ω への morphism より $\prod_{a\in\sigma(R)} E_a$ 上の特性関数とみなすことができる。従って、上記 pull-back の議論と Topos の定義[2] より、Y は $\varphi_R^{-1}(T)$，ξ は $\varphi_R^{-1}(T)$ から $\prod_{a\in\sigma(R)} E_a$ への inclusion map とみなすことができる。故に、R 上の predicate F は $\varphi_R^{-1}(T)$ なる $PRe(R_1,\cdots,R_n)$ の object，即ち Relation に対応する。

logic の formula は論理記号 $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$ を predicate に付加して作られる。以下では、$PRe(R_1,\cdots,R_n)$ の object A, B 上の formula F_A, F_B に対応する morphism $\varphi_A : \prod_{a\in\sigma(A)} E_a \to \Omega$，$\varphi_B : \prod_{a\in\sigma(B)} E_a \to \Omega$ を用いて、各論理記号を F_A, F_B に付加してできる formula に対して、対応する morphism と $PRe(R_1,\cdots,R_n)$ の object を考察する。φ_A, φ_B は次の diagram を pull-back とする。

$$\begin{tikzcd}
R_A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & \prod_{a\in\sigma(A)} E_a \arrow[d, "\varphi_A"] \\
\{(T)\} \arrow[r, "t"] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R_B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & \prod_{a\in\sigma(B)} E_a \arrow[d, "\varphi_B"] \\
\{(T)\} \arrow[r, "t"] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad \cdots\cdots (1)$$

但し、R_A, R_B は $\varphi_A^{-1}(T)$, $\varphi_B^{-1}(T)$ なる $PRe(R_1,\cdots,R_n)$ の object

，即ち Relation である。

F_A，F_B に論理記号を付加して作られる formula に対応する morphism を φ_A，φ_B から，Relation を R_A，R_B から構成する。

(1) (Conjunction) $F_A \wedge F_B$

$F_A \wedge F_B$ の morphism を $\varphi_{A\wedge B} : \prod_{a\in\delta(R_A)\cup\delta(R_B)} E_a \longrightarrow \Omega$ なる写像とする。$\wedge : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ を次のような morphism とする。(2)

a，b が Ω の要素ならば $\wedge(a, b) = \begin{cases} a = b = (T) \text{ の時、} & (T) \\ \text{上記以外の時、} & (F) \end{cases}$

$\pi_A ; \prod_{a\in\delta(R_A)\cup\delta(R_B)} E_a \longrightarrow \prod_{a\in\delta(R_A)} E_a$，$\pi_B : \prod_{a\in\delta(R_A)\cup\delta(R_B)} E_a \longrightarrow \prod_{a\in\delta(R_B)} E_a$

を各々次のような morphism であると定義する。

$\prod_{a\in\delta(R_A)\cup\delta(R_B)} E_a$ の tuple (x_1, x_2, x_3) が $x_1 \in \prod_{a\in\delta(R_A)-\delta(R_B)} E_a$，$x_2 \in \prod_{a\in\delta(R_A)\cap\delta(R_B)} E_a$，$x_3 \in \prod_{a\in\delta(R_B)-\delta(R_A)} E_a$ を満す時、

$$\pi_A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$$

$$\pi_B(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$$

この時、$\varphi_{A\wedge B}$ は $\wedge\circ\langle\varphi_A\circ\pi_A, \varphi_B\circ\pi_B\rangle$ と表わせる。(2) 故に、次の pull-back diagram を構成する。(2)

$$\begin{tikzcd}
\varphi^{-1}_{A\wedge B}(T) \arrow[r, hook] \arrow[dd] & \prod_{a\in\delta(R_A)\cup\delta(R_B)} E_a \arrow[d, "\langle\pi_A, \pi_B\rangle"] \\
 & \prod_{a\in\delta(R_A)} E_a \times \prod_{a\in\delta(R_B)} E_a \arrow[d, "\wedge\circ\langle\varphi_A, \varphi_B\rangle"] \\
\{(T)\} \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}$$

pull back diagram (1) より次の diagram は pull-back である。

$$
\begin{tikzcd}
R_A \times R_B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & \prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a \times \prod_{a\in\sigma(R_B)} E_a \arrow[d, "\wedge\circ\langle\varphi_A,\,\varphi_B\rangle"] \\
\{(T,T)\} \arrow[r, "\langle t,\,t\rangle"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}
$$

故に、$\wedge$ の定義より、$(\wedge\circ\langle\varphi_A,\varphi_B\rangle)^{-1}(T)$ は $R_A \times R_B$ となる。

(t_1, t_2), (t_2', t_3) を各々 $\prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a$, $\prod_{a\in\sigma(R_B)} E_a$ の tuple とし、$t_1 \in \prod_{a\in\sigma(R_A)-\sigma(R_B)} E_a$, $t_2, t_2' \in \prod_{a\in\sigma(R_A)\cap\sigma(R_B)} E_a$, $t_3 \in \prod_{a\in\sigma(R_B)-\sigma(R_A)} E_a$ を満たす時、$t_2 \neq t_2'$ ならば、(t_1, t_2), (t_2', t_3) は $\prod_{a\in\sigma(R_A)\cup\sigma(R_B)} E_a$ からの $\langle\pi_A, \pi_B\rangle$ による像といえず、$t_2 = t_2'$ の時のみ $\langle\pi_A, \pi_B\rangle$ の像となり、$(t_1, t_2, t_3) \in \prod_{a\in\sigma(R_A)\cup\sigma(R_B)} E_a$ となる。

故に、

$$
\begin{aligned}
\varphi_{A\wedge B}^{-1}(T) &= (\wedge\circ\langle\varphi_A,\varphi_B\rangle\circ\langle\pi_A,\pi_B\rangle)^{-1}(T) \\
&= \{(t_1, t_2, t_3)\,;\,(t_1, t_2)\in R_A,\ (t_2, t_3)\in R_B\}.
\end{aligned}
$$

この集合は Relational Algebra の operation を用いて、次のように表わせる。

$$
\begin{cases}
\sigma(R_A) = \sigma(R_B) \text{ の時} & R_A \cap R_B \\
\sigma(R_A) \neq \sigma(R_B) \text{ の時} & R_A \times R_B\,[\sigma(R_A)\cap\sigma(R_B) = \sigma(R_A)\cap\sigma(R_B)]\,\big|\,\sigma(R_A)\cup\sigma(R_B)
\end{cases}
$$

故に、次の diagram は pull back となり、$F_A \wedge F_B$ に対応している Relation は $R_A \times R_B\,[\sigma(R_A)\cap\sigma(R_B) = \sigma(R_A)\cap\sigma(R_B)]\,\big|\,\sigma(R_A)\cup\sigma(R_B)$ である。

$$
\begin{tikzcd}
R_A \times R_B\,[\sigma(R_A)\cap\sigma(R_B) = \sigma(R_A)\cap\sigma(R_B)]\,\big|\,\sigma(R_A)\cup\sigma(R_B) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & \prod_{a\in\sigma(R_A)\cup\sigma(R_B)} E_a \arrow[d, "\wedge\circ\langle\varphi_A\circ\pi_A,\,\varphi_B\circ\pi_B\rangle"'] \\
\{(T)\} \arrow[r, "t"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

(2) (Disjunction) $F_A \vee F_B$

$F_A \vee F_B$ の morphism を $\varphi_{A\vee B} : \prod_{a\in\sigma(R_A)\cup\sigma(R_B)} E_a \to \Omega$ なる写像とする。$\vee ; \Omega\times\Omega \to \Omega$ を次のような morphism とする。[2]

$a, b \in \Omega$ ならば $\vee(a, b) = \begin{cases} a=(T) \text{ または } b=(T) \text{ の時} & (T) \\ \text{上記以外の時} & (F) \end{cases}$

(1)と同様に $\varphi_{A\vee B} = \vee\circ\langle\varphi_A\circ\pi_A, \varphi_B\circ\pi_B\rangle$ となり[2]、次の diagram が pull-back となる。[2]

$$\begin{tikzcd}
R_A \times R_B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & \prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a \times \prod_{a\in\sigma(R_B)} E_a \arrow[d, "\vee\circ\langle\varphi_A, \varphi_B\rangle"] \\
\{(T)\} \arrow[r, "t"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

故に、(1)と同様に、$\varphi_{A\vee B}^{-1}(T)$ を次のように構成できる。

$$\varphi_{A\vee B}^{-1}(T) = (\vee\circ\langle\varphi_A\circ\pi_A, \varphi_B\circ\pi_B\rangle)^{-1}(T)$$
$$= \{(t_1, t_2, t_3) ; (t_1, t_2)\in R_A, \text{ または、} (t_2, t_3)\in R_B\}$$

従って、Relational Algebra の operation を用いるならば、$\varphi_{A\vee B}^{-1}(T)$ は次のように表わせる。

$$\varphi_{A\vee B}^{-1}(T) = (R_A \times \prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a)[\sigma(R_A)\cap\sigma(R_B) = \sigma(R_A)\cup\sigma(R_B)] \mid \sigma(R_A)\cup\sigma(R_B)$$
$$(R_B \times \prod_{a\in\sigma(R_B)} E_a)[\sigma(R_A)\cap\sigma(R_B) = \sigma(R_A)\cap\sigma(R_B)] \mid \sigma(R_A)\cup\sigma(R_B)$$

$R_A \times \prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a$ は R_A, R_B から構成できず、$\sigma(R_A)=\sigma(R_B)$ の場合のみ、R_A, R_B から構成可能となり、

$\varphi_{A\vee B}^{-1}(T) = R_A \cup R_B$ となる。さらに、次の diagram を pull-back とする。

$$\begin{tikzcd} R_A \cup R_B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & \prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a \arrow[d, "\vee\circ\langle\varphi_A\circ\pi_A,\ \varphi_B\circ\pi_B\rangle"] \\ \{(T)\} \arrow[r, "t"] & \Omega \end{tikzcd}$$

(3)　(Negation)　$\neg F_A$

$\neg F_A$ の morphism を $\varphi_{\neg A}$; $\prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a \longrightarrow \Omega$ なる写像とする。

$\neg$; $\Omega \longrightarrow \Omega$ を次のような morphism とする。(2)

$a\in\Omega$ ならば
$$\neg(a) = \begin{cases} a=(F) \text{ の時} & (T) \\ a=(T) \text{ の時} & (F) \end{cases}$$

上記と同様、$\varphi_{\neg A} = \neg\circ\varphi_A$ となる。(2) 従って、$\neg$ の定義より、$\varphi_{\neg A}{}^{-1}(T)$ を次のように構成できる。

$$\varphi^{-1}_{\neg A}(T) = (\neg\circ\varphi_A)^{-1}(T) = \{t\ ;\ t\in \prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a\ ,\ t\notin R_A\}$$
$$= \prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a - R_A$$

disjunction 同様 $\prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a$ は R_A から構成不能である。conjunction を組合せた formula $F_B\wedge\neg F_A$ の formula で $\sigma(R_A)=\sigma(R_B)$ が成立する時のみ R_A, R_B から構成され、$\varphi^{-1}_{B\wedge\neg A}$ は $R_B\cap(\prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a - R_A)$, 即ち $R_B - R_A$ となり、次の diagram を pull-back とする。

$$\begin{tikzcd} R_B - R_A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & \prod_{a\in\sigma(R_A)} E_a \arrow[d, "\wedge\circ\langle\varphi_B\circ\pi_B,\ \neg\circ\varphi_A\circ\pi_A\rangle"] \\ \{(T)\} \arrow[r, "t"] & \Omega \end{tikzcd}$$

(4)　(Universal quantification)　$\forall x\, F_A(a, x)$

tuple a の属性集合を α とする。この時、$\forall x\, F_A(a, x)$ の

morphism を $\varphi_{\forall_x F_A(a,x)} : \prod_{a\in\alpha} E_a \longrightarrow \Omega$ なる写像とする。

morphism $f : R\times Y \to \Omega$ に対して、$(\forall_{y\in Y})(f) : R \to \Omega$ を次のような morphism とする。(α)

$r \in R$ ならば $(\forall_{y\in Y})(f)(r) = \begin{cases} \lambda y.f(r,y) = \lambda y.t_{R\times Y}(r,y) \text{ の時} & (T) \\ \text{上記以外の時} & (F) \end{cases}$

但し、$t_{R\times Y}$ は $R\times Y \longrightarrow \{(T)\} \xrightarrow{t} \Omega$ なる morphism である。

故に、$(\forall_{y\in Y})(f)(r) = (T)$ の時には、すべての $y\in Y$ に対して $f(r,y) = (T)$ が成立し、$(\forall_{y\in Y})(f)(r) = (F)$ の時には、$f(r,y) = (F)$ なる $y \in Y$ が存在する。

この定義を用いるならば、$\varphi_{\forall_x F_A(a,x)} = (\forall_{x\in R_A|\delta(R_A)-\alpha})(\varphi_A)$ となり、次の diagram を pull-back とする。(α)

$$\begin{tikzcd}
\varphi^{-1}_{\forall_x F_A(a,x)}(T) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & \prod_{a\in\alpha} E_a \arrow[d, "(\forall_{x\in R_A|\delta(R_A)-\alpha})(\varphi_A)"] \\
\{(T)\} \arrow[r, "t"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

従って、$(\forall_{x\in R_A|\delta(R_A)-\alpha})(\varphi_A)$ の定義と pull-back diagram (1) より、$\varphi^{-1}_{\forall_x F_A(a,x)}(T)$ は次のように構成できる。

$\{t ; t \in \prod_{a\in\alpha} E_a, (\forall_{x\in R_A|\delta(R_A)-\alpha})(\varphi_A)(t) = (T)\}$

$= \{t ; t \in \prod_{a\in\alpha} E_a, \forall_x (x \in R_A|\delta(R_A)-\alpha)((x,a)\in R_A)\}$

$= R_A[\alpha \div \delta(R)-\alpha](R_A|\delta(R_A)-\alpha)$

(δ) (Existential quantification) $\exists_x F(a,x)$

a の属性集合を α とする時、$\exists_x F(a, x)$ の morphism を $(\exists x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\varphi_A) : \prod_{a \in \alpha} E_a \longrightarrow \Omega$ なる写像とする。この写像は上記写像を用いて、$\neg \circ (\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\neg \circ \varphi_A)$ と表わすことができる。(2)

$\neg \circ (\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\neg \circ \varphi_A)(a) = (T)$ ならば次が成立する。

$$(\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\neg \circ \varphi_A)(a) = (F)$$

故に、$(\neg \circ (\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\neg \circ \varphi_A))^{-1}(T)$ は $((\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\neg \circ \varphi_A))^{-1}(F)$ となり、$((\exists x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\varphi_A))^{-1}(T)$ は次のように構成される。

$$\{t \,;\, t \in \prod_{a \in \alpha} E_a \,,\, (\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\neg \circ \varphi_A)(t) = (F)\}$$
$$= \{t \,;\, t \in \prod_{a \in \alpha} E_a \,,\, \exists x\, (x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(F_A(t, x))\}$$
$$= \{t \,;\, t \in \prod_{a \in \alpha} E_a \,,\, \exists x\, (x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)((x, t) \in R_A)\}$$
$$= R_A | \alpha$$

(6)　$(\theta \,;\, >, =)$　$t_1 \theta t_2$　(θ は $>$, $=$ のいずれかの predicate)

t_1 の属性を α, t_2 の属性を β とする。(6) と同様に predicate θ に対応する morphism $\theta_{\alpha,\beta}$ を次のように定義する。

$(t_1, t_2) \in E_\alpha \times E_\beta$ ならば

$$t_1 \,\theta_{\alpha,\beta}\, t_2 = \begin{cases} t_1 \theta t_2 \text{ の時} & (T) \\ \neg t_1 \theta t_2 \text{ の時} & (F) \end{cases}$$

故に、$\theta_{\alpha,\beta}^{-1}(T) = \{(t_1, t_2) \,;\, (t_1, t_2) \in E_\alpha \times E_\beta \,,\, t_1 \theta t_2\}$

$= E_a \times E_b \; [a \theta b]$

(3)と同様、$t_1 \theta t_2$ が $F_A(t_1) \wedge F_B(t_2) \wedge (t_1 > t_2)$ なる形で使用されるならば、その意味となる Relation は R_A, R_B のみで構成可能である。(1)より、そのRelationは次のようになる。

$\sigma(R_A) \cap \sigma(R_B) \neq \phi$ の時

$((R_A \times R_B \, [\sigma(R_A) \cap \sigma(R_B) = \sigma(R_A) \cap \sigma(R_B)] \, | \, \sigma(R_A) \cup \sigma(R_B)) \times (E_a \times E_b \, [a \theta b])) \, [\{a, b\} = \{a, b\}] \, | \, \sigma(R_A) \cup \sigma(R_B)$

$= (R_A \times R_B \, [\sigma(R_A) \cap \sigma(R_B) = \sigma(R_A) \cap \sigma(R_B)] \, | \, \sigma(R_A) \cup \sigma(R_B)) \, [a \theta b]$

$\sigma(R_A) \cap \sigma(R_B) = \phi$ の時

$(R_A \times R_B) \times (E_a \times E_b \, [a \theta b]) \, [\{a, b\} = \{a, b\}] \, | \, \sigma(R_A) \cup \sigma(R_B)$

$= R_A \times R_B \, [a \theta b]$

(7) (Constant) $F_A(t, t_c)$ (t_c ; constant tuple)

t の属性集合を α とする。この時、対応する morphism は $\lambda t . \varphi_A(t, t_c) : \prod_{a \in \alpha} E_a \to \Omega$ となる。(2) 従って、対応する Relation は次のようになる。

$$(\lambda t . \varphi_A(t, t_c))^{-1}(T) = \{ t \, ; \, t \in \prod_{a \in \alpha} E_a, \; \lambda t . \varphi(t, t_c)(t) = (T) \}$$

$$= \{ t \, ; \, t \in \prod_{a \in \alpha} E_a, \; (t, t_c) \in R_A \}$$

$$= R_A \, [\sigma(R_A) = t_c] \, | \, \alpha$$

(8) (Count, Sum, Average, Max, Min) $COUNT(n, F_A)$, $SUM(a, n, F_A)$, $AVR(a, n, F_A)$, $MAX((a, n, F_A)$, $MIN(a, n, F_A)$ ($n \in N$, $a \in \sigma(R_A)$ とする。)

Predicate COUNT, SUM, AVR, MAX, MIN に対応する morphism φ_{count}, φ_{sum}, φ_{avr}, φ_{max}, φ_{min} を各々次のように定義する。

$n \in N$, $t \in R_A|\alpha$ $(\alpha \in \mathcal{E}(R_A))$, $t_a \in R_A|a$ $(a \notin \alpha)$ ならば、

$$\varphi_{count}(n, (\exists x \in R_A|\mathcal{E}(R_A)-\alpha)(\varphi_A))(t) = \begin{cases} n = |R_A[\alpha = t]| \text{ の時、} & (T) \\ \text{上記以外の時、} & (F) \end{cases}$$

$$\varphi_{sum}(a, n, (\exists x \in R_A|\mathcal{E}(R_A)-\alpha-\{a\})(\varphi_A))(t, t_a) = \begin{cases} \sum_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a} t_a = n \text{ の時} & (T) \\ \text{上記以外の時} & (F) \end{cases}$$

$$\varphi_{avr}(a, n, (\exists x\, R_A|\mathcal{E}(R_A)-\alpha-\{a\})(\varphi_A))(t, t_a) = \begin{cases} \left(\sum_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a} t_a\right) / |R_A[\alpha = t]| = n \text{ の時} & (T) \\ \text{上記以外の時} & (F) \end{cases}$$

$$\varphi_{max}(a, n, (\exists x\, R_A|\mathcal{E}(R_A)-\alpha-\{a\})(\varphi_A))(t, t_a) = \begin{cases} \mathrm{Max}_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a}\, t_a = n \text{ の時} & (T) \\ \text{上記以外の時} & (F) \end{cases}$$

$$\varphi_{min}(a, n, (\exists x\, R_A|\mathcal{E}(R_A)-\alpha-\{a\})(\varphi_A))(t, t_a) = \begin{cases} \mathrm{Min}_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a}\, t_a = n \text{ の時} & (T) \\ \text{上記以外の時} & (F) \end{cases}$$

従って、COUNT, SUM, AVR, MAX, MIN の意味を構成する Relation は次のようになる。

$$(\varphi^{-1}_{count})(T) = \{(n, t)\ ;\ n = |R_A[\alpha = t]|,\ t \in R_A|\alpha\}$$

$$= \{ (|R_A[\alpha = t]|, t) ; t \in R_A|\alpha \}$$

$$(\varphi^{-1}{}_{sum})(T) = \{ (n, t) ; n = \sum_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a} t_a , \; t \in R_A|\alpha \}$$

$$= \{ (\sum_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a} t_a , t) ; \; t \in R_A|\alpha \}$$

$$(\varphi^{-1}{}_{avr})(T) = \{ (n, t) ; \; n = (\sum_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a} t_a) / |R_A[\alpha = t]| ,$$

$$t \in R_A|\alpha \}$$

$$= \{ (\sum_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a} t_a) / R_A[\alpha = t] , t) ; t \in R_A|\alpha \}$$

$$(\varphi^{-1}{}_{max})(T) = \{ (n, t) ; n = \mathrm{Max}_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a} t_a , \; t \in R_A|\alpha . \}$$

$$= \{ (\mathrm{Max}_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a} t_a , t) ; t \in R_A|\alpha \}.$$

$$(\varphi^{-1}{}_{min})(T) = \{ (n, t) ; n = \mathrm{Min}_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a} t_a , \; t \in R_A|\alpha \}$$

$$= \{ (\mathrm{Min}_{t_a \in R_A[\alpha = t]|a} t_a , t) ; t \in R_A|\alpha \}.$$

4. Topos と query

Relation に対する query を many sorted higher order logic の formula と見なし、query の answer をその formula の意味となる Relation とする。今、次の Relation からなる Data base[5] があるとする。

S : Supplier

S#	SNAME	STATUS	CITY
S1	Smith	20	London
S2	Jones	10	Paris
S3	Blake	30	Paris
S4	Adams	30	London

P ; Parts

P# ,	PNAME ,	COLOR	WEIGHT	PCITY
P1	Nut	Red	12	London
P2	Bolt	Green	17	Paris
P3	Screw	Blue	17	Rome
P4	Screw	Red	14	London
P5	Cam	Blue	12	Paris

SP ; Supplier , Parts

SP#	PS#	QTY
S1	P1	300
S2	P1	100
S3	P2	200
S4	P4	300

上記 Relation が対応する Formula を次のように定義する。但し、$t_{S\#}$, … , t_{QTY} は各属性 S#, … , QTY の自由変数，$X_{S\#}$, … , X_{QTY} は各属性 S#, … , QTY の束縛変数とする。

S($t_{S\#}$, t_{SNAME} , t_{STATUS} , t_{CITY}) ,

P($t_{P\#}$, t_{PNAME} , t_{COLOR} , t_{WEIGHT} , t_{PCITY}) ,

SP($t_{SP\#}$, $t_{PS\#}$, T_{QTY}) .

以下で、この Database に対する query とその answer である Topos の object との対応を考察する。

(1) "Get supplier numbers and status for supplier in Paris"[5]
このqueryは次のformulaに対応する。

$\exists X_{SNAME}\ S(t_{S\#}, X_{SNAME}, t_{STATUS}, \text{"Paris"})$

このformulaの意味となるTopos PRe(S, P, SP)のobjectは次のように構成される。

$S(t_{S\#}, t_{SNAME}, t_{STATUS}, \text{"Paris"})$ のobjectは

$S[CITY = \text{"Paris"}]$ となり、故に、

$\exists X_{SNAME}\ S(t_{S\#}, X_{SNAME}, t_{STATUS}, \text{"Paris"})$ のobjectは

$S[CITY = \text{"Paris"}] / S\#, STATUS$ となる。

(2) "Get supplier name for supplier who at least one red part"[5]
このqueryは次のformulaに対応する。

$\exists X_{S\#} X_{STATUS} X_{CITY} X_{SP\#} X_{PS\#} X_{QTY} X_{P\#} X_{PNAME} X_{WEIGHT} X_{PCITY}\ (S(X_{S\#}, t_{SNAME}, X_{STATUS}, X_{CITY}) \wedge SP(X_{SP\#}, X_{PS\#}, X_{QTY}) \wedge P(X_{P\#}, X_{PNAME}, \text{"Red"}, X_{WEIGHT}, X_{QTY}) \wedge (X_{S\#} = X_{SP\#}) \wedge (X_{PS\#} = X_{P\#}))$

このformulaの意味となるobjectは次のように構成される。

$S(t_{S\#}, t_{SNAME}, t_{STATUS}, t_{CITY}) \wedge SP(t_{SP\#}, t_{PS\#}, t_{QTY}) \wedge P(t_{P\#}, t_{PNAME}, \text{"Red"}, t_{WEIGHT}, t_{QTY})$ のobjectは $S \times SP \times P[COLOR = \text{"Red"}]$ となり。

$S(t_{S\#}, t_{SNAME}, t_{STATUS}, t_{CITY}) \wedge SP(t_{SP\#}, t_{PS\#}, t_{QTY}) \wedge P(t_{P\#}, t_{PNAME}, \text{"Red"}, t_{WEIGHT}, t_{QTY}) \wedge (t_{S\#} = t_{SP\#}) \wedge (t_{PS\#} = t_{P\#})$ のobjectは

$S \times SP \times P[COLOR = \text{"Red"}][S\# = SP\#][PS\# = P\#]$ となり、

故に、求める object は次のようになる。

$$S \times SP \times P[COLOR = \text{"Red"}][S\# = SP\#][pS\# = P\#] | SNAME$$

$$= (S[S\# = SP\#]SP)[p\# = pS\#](P[COLOR = \text{"Red"}])$$

(3) " For each part supplied, get the part number and the total quantity supplied of that part "(5)

この query は次の formula に対応する。

$$SUM(QTY, n, \exists x_{sp\#}(SP(x_{sp\#}, t_{ps\#}, t_{QTY}))$$

この formula の意味は $\{(\sum_{t_{QTY} \in (SP[pS\# = t_{pS\#}]|QTY)} t_{QTY}, t_{pS\#}, t_{pS\#} \in SP|pS\#\}$ となる。

5、おわりに、

Topos と many sorted higher order intuitionistic logic の対応のモデルを用いるならば、上記 query の例で示すように SUM の操作が可能となり、higher order logic の query, 即ち formula の意味構成が可能である。従って、自然言語の形容詞，前置詞等の意味記述(6)を Topos の object で行うことが可能である。

Relational Database 以外の Database モデルも Topos 構築が可能ならば本稿で論じたこと、すべてをその Database モデルにおいて成立させることが可能である。

（謝 辞）

本研究に対して有益な御助言をいただいた北海道大学田中

譲講師に深謝の意を表します。

（参考文献）

[1] Codd, E.F., "Relational Completeness of Database Sublanguage", Courant Computer Science Symposia Series, Vol 6, Englewood Cliffs, N.J : Prentice-Hall (1972)

[2] 竹内外史 "層，圏，トポス" 日本評論社 (1978)

[3] Dowty, D.R., Wall, R.E., Peters, S., "Introduction to Montague Semantics" Reidel (1981)

[4] Mizukami, T., "Database Semantics Based on Intuitionistic Logics" 数理解析研究所講究録 (1982)

[5] Date, C.J., "An Introduction to Database Systems" Addison-Wesley (1981)

[6] Tanaka, Y., "Information Space Model" 数理解析研究所講究録 (1981)

[7] Goldblatt, R., "Topoi : The Categorial Analysis of Logics", North-Holland (1979)