数理解析研究所講究録
第 526 巻 1984 年 126-135

Connectedness of PBIB Designs

カルガリ大　小川潤次郎
創価大・至　池田貞雄

任意の処理対が connected であるとき，そのデザインが connected であるという．PBIBデザインが connected であるための必要十分条件は，行列 $C = rI_v - k^{-1}NN'$ の階数が $v-1$ であることは，よく知られている．ここでは，connectedness の必要十分条件を，より具体的にデザインあるいはアソシエィションのパラメータに関する条件として求めたい．

いま，m-class PBIBD を考え，その association matrices を $A_0, A_1, \cdots, A_m$ とし，これらによって生成される代数の中における orthogonal idempotents を $A_0 = \frac{1}{v}G_v, A_1^{\#}, \cdots, A_m^{\#}$ とする．そうすると $\sum_{i=0}^{m} A_i^{\#} = I_v$ で，また

(1) $$NN' = \sum_{i=0}^{m} \rho_i A_i^{\#}, \quad \rho_0 = rk$$

であるから

(2) $$C = rI_v - \frac{1}{k}NN' = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}(rk-\rho_i)A_i^{\#}$$

が成立する．

アソシエィションのパラメータ p_{iu}^{j} のつくる行列 $P_u = \| p_{iu}^{j} \|$ の固有根を $z_{0u}, z_{1u}, \cdots, z_{mu}$ とおくと，$u = 0, 1, \cdots, m$ に対して共通な正則行列 Q が存在して，z を適当に配列すれば

(3) $$Q P_u Q = \mathrm{Diag}\,(z_{0u}, z_{1u}, \cdots, z_{mu}), \quad u = 0, 1, \cdots, m.$$

また，$\rho_i = \sum_{u=0}^{m} \lambda_u z_{iu}$, $i = 0, 1, \cdots, m$, であるので，$\rho_0 = rk$, $\rho_1, \cdots, \rho_m$ は行列

(4) $$P = \sum_{u=0}^{m} \lambda_u P_u$$

の固有根であることがわかる．

(5) $$| P - \theta I_{m+1} | = (rk - \theta) \, | P^* - \theta I_m |$$

但し

(6) $$P^* = \| p_{ij}^* \| = \| r\delta_{ij} + \lambda_1 p_{i1}^{j} + \cdots + \lambda_m p_{im}^{j} - n_i \lambda_i \|, \ (\delta_{ij} : \text{Kronecker's } \delta)$$

となるので，$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$ は行列 P^* の固有根であることがわかる．

(2) 式から，同値関係

(7) $$\mathrm{rank}\,(C) = v - 1 \iff \rho_i \neq rk, \ i = 1, \cdots, m$$

が成立するので，

(8) $$| P^* - rk I_m | \neq 0 \iff \text{connectedness}$$

を得る．したがって，$|P^* - rk I_m| = 0$ という条件は，PBIBD が disconnected であるための必要十分条件であることがわかる．

さて，m-class PBIB デザインで，会合数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ がすべて正であれば，デザインが connected であることは明らかであるので

(9) $$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s = 0 < \lambda_{s+1}, \cdots, \lambda_m$$

の場合を考える．このとき，行列式 $|P^* - rk I_m|$ は次のようになる．

(10) $$\begin{vmatrix} \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^1_{1u} - r(k-1) & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^2_{1u} & \cdots & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^s_{1u} & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^{s+1}_{1u} & \cdots & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^m_{1u} \\ \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^1_{2u} & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^2_{2u} - r(k-1) & \cdots & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^s_{2u} & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^{s+1}_{2u} & \cdots & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^m_{2u} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^1_{su} & \cdots & \cdots & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^s_{su} - r(k-1) & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^{s+1}_{su} & \cdots & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^m_{su} \\ \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^1_{s+1u} - n_{s+1}\lambda_{s+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^{s+1}_{s+1u} - r(k-1) - n_{s+1}\lambda_{s+1} & \cdots & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^m_{s+1u} - n_{s+1}\lambda_{s+1} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^1_{mu} - n_m\lambda_m & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^m_{mu} - r(k-1) - n_m\lambda_m \end{vmatrix}$$

そこで，$1 \leqq i \leqq s$ なる任意の i について

(11) $$\sum_{s+1}^{m}\lambda_u p^i_{iu} - r(k-1) = 0$$

とおいてみると，関係式

$$(12)\qquad r(k-1)=\sum_{u=1}^{m}\lambda_u n_u,\quad n_u=\sum_{j=0}^{m}p_{ju}^{i}$$

から

$$(13)\qquad p_{iu}^{i}=n_u,\quad p_{ju}^{i}=0\ (j\neq i;\ j=1,2,\cdots,m)$$

が得られ，$n_i p_{ju}^{i}=n_j p_{iu}^{j}$ が成立することから，行列式(10)の第 i 行目の成分はすべて 0 であることがわかる．したがってこのとき行列式の値は 0 になる．

いま，条件 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ を

$$
(14)\qquad
\begin{array}{ll}
A_1: & p_{2u}^{1}=0,\ p_{3u}^{1}=0,\cdots,p_{su}^{1}=0,\quad p_{s+1u}^{1}=0,\ \cdots,\ p_{mu}^{1}=0,\ (u\geqq s+1)\\
A_2: & p_{1u}^{2}=0,\quad p_{3u}^{2}=0,\cdots,p_{su}^{2}=0,\quad p_{s+1u}^{2}=0,\ \cdots,\ p_{mu}^{2}=0,\ (u\geqq s+1)\\
A_3: & p_{1u}^{3}=0,\ p_{2u}^{3}=0,\quad \cdots p_{su}^{3}=0,\quad p_{s+1u}^{3}=0,\quad ,p_{mu}^{3}=0,\ (u\geqq s+1)\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_s: & p_{1u}^{s}=0,\ p_{2u}^{s}=0,\ \cdots,\quad ,\ p_{s+1u}^{s}=0,\ \cdots,\ p_{mu}^{s}=0,\ (u\geqq s+1)
\end{array}
$$

とおくと，これらの論理和 $\bigcup_{i=1}^{s}A_i$ は disconnectedness の十分条件を与える．したがって，その否定

$$(15)\qquad \overline{\bigcup_{i=1}^{s}A_i}=\bigcap_{i=1}^{s}\overline{A_i}$$

は connectedness の必要条件であることがわかる．これから，

connectedness の必要十分条件は，条件(15)の中から求まることがわかる．

この必要十分条件を一般の m に対して求めることは困難であるので，$m=2,3,4$ の場合について求めてみよう．

(1°) $m=2, s=1$ の場合 ($\lambda_1=0, \lambda_2>0$)

(16) $$A_1 : p_{22}^1 = 0$$

となるので

(17) $$\bar{A}_1 : p_{22}^1 \neq 0.$$

これが，connectedness の十分条件であることはすぐわかるので，(17) は connectedness の必要十分条件を与える．(Mohan (1981), Kageyama (1981))．

(2°) $m=3, s=1$ の場合 ($\lambda_1=0<\lambda_2, \lambda_3$)

このときは，(14) は

(18) $$A_1 : p_{iu}^1 = 0, (i, u \geqq 2)$$

となるので

(19) $$\bar{A}_1 : p_{iu}^1 > 0 \quad (\text{ある } i \text{ と } u \text{ に対して}, (i, u \geqq 2))$$

となり，これが connectedness の必要十分条件を与える．

(3°) $m=3, s=2$ の場合 ($\lambda_1=\lambda_2=0<\lambda_3$)

このときは，(14) は

(20) $$A_1 = B_1 \cap C_1, \quad A_2 = B_2 \cap C_2$$

但し $B_1 : p^1_{33}=0$, $C_1 : p^1_{23}=0$

$B_2 : p^2_{33}=0$, $C_2 : p^2_{13}=0$

となり

(21) $$\overline{A_1 \cup A_2} = (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{C}_2) \cup (\bar{B}_2 \cap \bar{C}_1) \cup (\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2)$$

の各条件は

(22)
$$\begin{aligned} \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 &: p^1_{33}>0,\ p^2_{33}>0 \\ \bar{B}_1 \cap \bar{C}_2 &: p^1_{33}>0,\ p^2_{13}>0 \\ \bar{B}_2 \cap \bar{C}_1 &: p^2_{33}>0,\ p^1_{23}>0 \\ \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 &: p^1_{23}>0\ (\Leftrightarrow p^2_{13}>0) \end{aligned}$$

となる。このうち、最初の3条件は十分条件を与えるが、最後の条件は、これだけでは十分条件を与えない。したがって、$\lambda_1=\lambda_2=0<\lambda_3$ なる 3-class PBIB デザインが connected であるための必要十分条件は、$\{p^1_{33}>0,\ p^2_{33}>0\}$, $\{p^1_{33}>0,\ p^2_{13}>0\}$, $\{p^2_{33}>0,\ p^1_{23}>0\}$ のいずれか1つで与えられることがわかる。

(4°) <u>$m=4,\ s=1$ の場合</u> $(\lambda_1=0<\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$

このときは、条件

(23) $$p^1_{iu}>0 \quad (\text{ある } i, u\ (=2,3,4) \text{ に対して})$$

が，必要十分条件を与える．

(5°) m=4. s=2 の場合 $(\lambda_1=\lambda_2=0<\lambda_3, \lambda_4)$

このとき (14) の条件は

(24) $$A_1=B_1\cap C_1,\quad A_2=B_2\cap C_2$$

但し

$$B_1: p^1_{3u}=0,\ p^1_{4u}=0,\quad B_2: p^2_{3u}=0,\ p^2_{4u}=0,$$

$$C_1=C_2: p^1_{2u}=p^2_{1u}=0\ ,\qquad (u\geqq 3)$$

となり，

(25) $$\overline{A_1\cup A_2}=(\bar{B}_1\cap\bar{B}_2)\cup(\bar{B}_1\cap\bar{C}_2)\cup(\bar{B}_2\cap\bar{C}_1)\cup(\bar{C}_1\cap\bar{C}_2).$$

ここで

(26)

$\bar{B}_1\cap\bar{B}_2$: $p^1_{iu}>0,\ p^2_{i'u'}>0$，(ある i, u, i', u' $(=3.4)$ について)

$\bar{B}_1\cap\bar{C}_2$: $p^1_{iu}>0,\ p^2_{1u'}>0$．(ある i, u, u' $(=3.4)$ について)

$\bar{B}_2\cap\bar{C}_1$: $p^2_{iu}>0,\ p^1_{2u'}>0$．(ある i, u, u' $(=3,4)$ について)

$\bar{C}_1\cap\bar{C}_2$: $p^1_{2u}>0$ $(p^2_{1u}>0)$，(ある u $(=3.4)$ について)．

この最初の3条件が connectedness の必要十分条件となることがわかる．

(6°) m=4. s=3 の場合 $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0<\lambda_4)$

この場合は

(27) $$A_1=B_1\cap C_1,\quad A_2=B_2\cap C_2,\quad A_3=B_3\cap C_3$$

但し

$$B_1: p^1_{44}=0,\qquad C_1: p^1_{24}=0,\ p^1_{34}=0$$

$$B_2 : p^2_{44} = 0, \qquad C_2 : p^2_{14} = 0,\ p^2_{34} = 0$$

$$B_3 : p^3_{44} = 0, \qquad C_3 : p^3_{14} = 0,\ p^3_{24} = 0.$$

となり，

$$\begin{aligned} \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} &= (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{C}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{C}_2) \\ &\quad \cup (\bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{C}_1) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3) \cup (\bar{B}_2 \cap \bar{C}_1 \cap \bar{C}_3) \\ &\quad \cup (\bar{B}_3 \cap \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) \cup (\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3) \end{aligned} \tag{28}$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned} &\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 : p^1_{44} > 0,\ p^2_{44} > 0,\ p^3_{44} > 0 \\ &\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{C}_3 : p^1_{44} > 0,\ p^2_{44} > 0,\ [p^3_{14} > 0 \text{ or } p^3_{24} > 0] \\ &\bar{B}_1 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{C}_2 : p^1_{44} > 0,\ p^3_{44} > 0,\ [p^2_{14} > 0 \text{ or } p^2_{34} > 0] \\ &\bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{C}_1 : p^2_{44} > 0,\ p^3_{44} > 0.\ [p^1_{24} > 0 \text{ or } p^1_{34} > 0] \\ &\bar{B}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3 : p^1_{44} > 0,\ [p^2_{14} > 0 \text{ or } p^2_{34} > 0],\ [p^3_{14} > 0 \text{ or } p^3_{24} > 0] \\ &\bar{B}_2 \cap \bar{C}_1 \cap \bar{C}_3 : p^2_{44} > 0.\ [p^1_{24} > 0 \text{ or } p^1_{34} > 0],\ [p^3_{14} > 0 \text{ or } p^3_{24} > 0] \\ &\bar{B}_3 \cap \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 : p^3_{44} > 0.\ [p^1_{24} > 0 \text{ or } p^1_{34} > 0],\ [p^2_{14} > 0 \text{ or } p^2_{34} > 0] \\ &\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3 : [p^1_{24} > 0 \text{ or } p^1_{34} > 0].\ [p^2_{14} > 0 \text{ or } p^2_{34} > 0],\ [p^3_{14} > 0 \text{ or } p^3_{24} > 0] \end{aligned} \tag{29}$$

まず，最初の条件 $\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3$ は十分条件．また，次の3条件は，合計6個の条件に分解されるが，そのどれも十分条件を与えることが確かめられる．第5の条件 $\bar{B}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3$ は，次の4条件に分解される．

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ p^1_{44} > 0,\ p^2_{14} > 0,\ p^3_{14} > 0, \quad \text{(ii)}\ p^1_{44} > 0,\ p^2_{14} > 0,\ p^3_{24} > 0 \\ &\text{(iii)}\ p^1_{44} > 0,\ p^2_{34} > 0,\ p^3_{14} > 0, \quad \text{(iv)}\ p^1_{44} > 0,\ p^2_{34} > 0,\ p^3_{24} > 0 \end{aligned} \tag{30}$$

この4条件のうち，最初の3条件は十分条件であるが，条件(iv)は十分ではない．同様な考察が $\overline{B}_2 \cap \overline{C}_1 \cap \overline{C}_3$, $\overline{B}_3 \cap \overline{C}_1 \cap \overline{C}_2$ に対してもできる．

最後に $\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3$ は8条件に分解されるが，そのどれも十分であることは云えない．

以上をまとめて，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 < \lambda_4$ なる 4-class PBIBD が connected であるための必要十分条件は，次の条件のどれでもよいことがわかる．

(1) $p^1_{44} > 0$, $p^2_{44} > 0$, $p^3_{44} > 0$.　(2) $p^1_{44} > 0$, $p^2_{44} > 0$, $p^3_{14} > 0$

(3) $p^1_{44} > 0$, $p^2_{44} > 0$, $p^3_{24} > 0$,　(4) $p^1_{44} > 0$, $p^3_{44} > 0$, $p^2_{14} > 0$

(5) $p^1_{44} > 0$, $p^3_{44} > 0$, $p^2_{34} > 0$　(6) $p^2_{44} > 0$, $p^3_{44} > 0$, $p^1_{24} > 0$

(7) $p^2_{44} > 0$, $p^3_{44} > 0$, $p^1_{34} > 0$　(8) $p^1_{44} > 0$, $p^2_{14} > 0$, $p^3_{14} > 0$

(9) $p^1_{44} > 0$, $p^2_{14} > 0$, $p^3_{24} > 0$,　(10) $p^1_{44} > 0$, $p^2_{34} > 0$, $p^3_{14} > 0$

(11) $p^2_{44} > 0$, $p^1_{24} > 0$, $p^3_{14} > 0$　(12) $p^2_{44} > 0$, $p^1_{24} > 0$, $p^3_{24} > 0$

(13) $p^2_{44} > 0$, $p^1_{34} > 0$, $p^3_{24} > 0$　(14) $p^3_{44} > 0$, $p^1_{24} > 0$, $p^2_{34} > 0$

(15) $p^3_{44} > 0$, $p^1_{34} > 0$, $p^2_{14} > 0$,　(16) $p^3_{44} > 0$, $p^1_{34} > 0$, $p^2_{24} > 0$

もちろん，これらの条件は互に排反ではない．

一般の m, s に対しては，まだ必要十分条件の決定的な形は求まっていない．

参考文献

Kageyama, S. (1981) : Connectedness of two-associate PBIB designs, Statist. Res. Group, Hiroshima Univ., Tech. Rep. 54.

Mohan, N. R. (1981) : A criterion for connectedness in two-associate class PBIB designs, J. Statist. Planning Inf., 5 211-2.

Ogawa, J. (1974) : Statistical Theory of the Analysis of Experimental Designs, Marcel Dekker, New York,

---

（註）

一般のm, sに対する必要十分条件は，その後下記の論文で与えられている。

Ogawa, J., Ikeda, S. and Kageyama, S. (1984). Connectedness of PBIB designs with applications. To appear in the Proceedings of the Seminar on Combinatorics and Applications (14-17 Dec. 1982) in honour of Professor S. S. Shrikhande.

Ogawa, J., Ikeda, S. and Kageyama, S. (1983). Connectedness of some 3-associate PBIB designs. Technical Report No. 91, Statistical Research Group of Hiroshima University, June.

（景山三平記）