数理解析研究所講究録
第527巻 1984年 1-25

「非因果的問題と確率解析」

京都工繊大　小川重義　(OGAWA Shigeyoshi)

§0. はじめに：　古典解析においては成立することも，確率解析においては（そのままの形では）旨く行かないということがよくある。ところでそのような現象の中には，確率解析に固有の現象と見なされるもの(*)がある反面，確率解析が道具としてまだ整備不十分であるが為に起る不運な現象といえるものもある。

後者の例として，次の"S.D.E. における往復問題"を考えてみよう；　$F(t,x)$ を滑らかな実数値関数とし，終端値問題 "$\frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t))$ $(t \le 1)$，$x(1) = \alpha \in R^1$" の解を $x(t;\alpha)$ とする。次に，初期値問題 "$\frac{d}{dt}y(t) = F(t, y(t))$ $(t \ge 0)$，$y(0) = x(0;\alpha)$" を考え，これの解を $y(t; x(0;\alpha))$ とおけば，等式 $y(1; x(0;\alpha)) = \alpha$ が成

(*) 例えば，山田俊雄氏の論説（本講究録）を見られたい。

り立つことは明らかである。さて問題は，確率微分方程式に対しても同様な議論を展開することができるであろうか？ということであるが，これには大きな原理的難点が伴う； 今確率空間 $(W, \mathcal{F}, P)$ 上の一次元ブラウン運動，$B(t, w)$ ($t \geq 0$, $w \in W$) が与えられたとして，次の終端値問題を考える，

(1)： $dx(t,w) = F(t, x(t,w))dB(t)$ $(t \leq 1)$，$x(1, w) = \alpha$，

ここに，$x(t,w)$ は σ-fields $\mathcal{F}_t^1 = \sigma\{w; B(s,w) - B(1,w), t \leq s \leq 1\}$ に関して adapted な（即ち，anti causal な）ものとし，積分 $\int_t^1 F\,dB$ は（後向き）対称積分の意味でとるものとする。(1)の解を $x(t;\alpha)$ と記す。次いで，初期値問題，

(2)： $dy(t,w) = F(t, y(t,w))dB(t)$ $(t \geq 0)$，$y(0,w) = \beta \in R^1$，

を考える。ここで，$y(t,w)$ は σ-fields $\mathcal{F}_t = \sigma\{w; B(s,w), s \leq t\}$ に関して adapted な（即ち，causal な）ものとし，積分 $\int^t F\,dB$ は対称積分の意味でとる。話を簡単にする為に，(2)は確率1で (t, β) について連続な解，$y(t,w;\beta)$ をもつものとする。このとき，合成関数，$y(t,w;x(0,w;\alpha))$ を考えれば，$F(t,x)$ の滑らさに関する適当な条件の下で，

等式，$y(1,\omega;x(0,\omega;\alpha))=\alpha$ $(P\text{-a.s.})$，の成立を検証することができる。しかし乍ら，乱関数 $y(t,\omega;x(0,\omega:\alpha))$ $(t\geq 0)$ が果して次の初期値問題，

$$(3);\quad dy(t,\omega)=F(t,y(t,\omega))dB(t),\quad y(0,\omega)=x(0,\omega:\alpha),$$

の解であるかという問は，従来の確率解析の枠組みにおいては意味を為さないのである。実際，(3) の解である可き関数は causal でも，或いは anticausal でもあり得ず，従って積分項 $\int FdB$ に意味を与えることが不可能となるからである。(尚，この問題は [6] において肯定的に解決されている)。

このような非因果的性格をもつ問題は確率解析，特にその応用分野，において数多く見受けられるものである (cf. [3]，[4])。それ故，従来の確率解析の枠組みを拡張して，このような問題をも捉え得るように整備することが望ましく，その為には因果的でない乱関数にも適用可能な確率積分を導入することが必要となる。そのような資格を具えた積分の一つとして提出されたのが非因果的確率積分である。(この名称は余り適切なものとは思えないが，ここではこれまでの習慣に従っておくことにする)。

この確率積分の大きな特徴の一つとして，それがいわゆる対称積分の自然な拡張を与えているということがある。本稿の目的はこの話題に関する最近の結果を（主に[4]，[5]に従って）紹介することである。議論の詳細についてはこれらの文献を参照されたい。

§1，非因果的確率積分，定義と注意：　以下において，乱関数とは $\mathcal{B}_{[0,1]}\times\mathcal{F}$ －可測な実数値関数 $f(x,w)$ （$(x,w)\in[0,1]\times W$）で条件，$P[w:\int_0^1 f^2(x,w)dx<+\infty]=1$ をみたすものを意味するものとする。σ-fields $\{\mathcal{F}_t\}$（或いは $\{\mathcal{F}_t^*\}$，既出）に関して adapted な乱関数は causal（或いは anti-causal）であるといい，そのような乱関数の全体を $\mathcal{M}$（或いは $\tilde{\mathcal{M}}$）と表わすことにする。$\mathcal{M}$（或いは $\tilde{\mathcal{M}}$）の元 g に対して，$\int g\,d^{\circ}B$（$\int g\,d_{\circ}B$）で以って通常の（或いは後向きの）Itô積分を表わすものとする。$h(x,w)+\int_0^x g(y,w)\,d^{\circ}B(y)$（$g\in\mathcal{M}$）なる形の乱関数を quasi martingale と呼ぶことにする，但し $h(x,w)$ は殆んど全ての見本関数が $[0,1]$ 上で有界変動な乱関数である（causal なものとは限らない）。

次に非因果的確率積分の定義を記しておく。話の都合上，乱関数の変数 x が一次元の場合について与えておくが，その内容はより一般の場合においても有効なものである。

定義1 (i) $\{\varphi_n\}$ を実ヒルベルト空間 $L^2([0,1])$ の正規直交底，A を [0,1] 内の可測集合とする。乱関数 f が A 上で，$\{\varphi_n\}$ に関して可積分（略して φ-可積分）であるとは，級数 $\sum_n Z(\varphi_n)\int_A f(x,\omega)\varphi_n(x)dx$ （但し，$Z(\varphi_n)=\int_0^1\varphi_n(x)dB$ ）が確率収束することであるとし，その和を $\int_A f\, d_\varphi B$ と記す。[0,1] 上で φ-可積分であることを単に，φ-可積分であるという。

(ii) 乱関数 f が全ての c.o.n.s $\{\varphi_n\}$ に関して可積分であり積分 $\int f\, d_\varphi B$ の値が $\{\varphi_n\}$ のとり方に依存しないとき，f は universally integrable（略して，u-可積分）であるという。

上に与えた積分を非因果的積分（或いは，*-積分）と称している。従来の確率積分においてはそれがどのような Riemann 和により導入されたものであるかは本質的な事柄であったが非因果的積分においては直交底の選び方が同様の意味合いをもっており，これについての指定なしには積分の意味が確定しない。また，与えられた乱関数の可積分性は直交底の選び方に依存しておりこのことから諸々の興味深い問題が生じて来るのであるが紙数の都合もありここではそうした話題には触れないことにする。ただ，次の点を注意しておこう；即ち級数 $\sum_n Z(\varphi_n)\int f\varphi_n dx$ の収束性は一般に和をとる順序に依存するものであるから，直交底 $\{\varphi_n\}$ についてはその並び方も

込めて指定する必要があるということである。(例えば、以下の例2を見られたい)。

例1　有界変動関数 $h(x,\omega)$ や、$B^n(x,\omega)$ (n:自然数) なる乱関数は u-可積分である。また、C^2-級の関数 $v(x)$ に対して、$\int_0^1 v(x+y)dB(y)$ で表わされる乱関数も u-可積分である。(後者の事実は $(B)^2$ の研究 [3] に際して利用された)。

例2　$B(x,\omega)$ $(0\le x<1)$ を周期1で周期的に接続した乱関数を $\tilde{B}(x,\omega)$ $(x\ge 0)$ とする。各 $y>0$ に対して、$\tilde{B}(x+y,\omega)$ は三角関数系 $\{1, T_{1,n}(x), T_{2,n}(x) : n\ge 1\}$ (ここに、$T_{1,n}(x)=\sqrt{2}\cos 2\pi nx$, $T_{2,n}(x)=\sqrt{2}\sin 2\pi nx$) に関して可積分であるが、この性質は関数 $T_{i,n}$ の並び具合に依存する。(従って当然 u-可積分ではない)。

さて、非因果的積分が Stratonovich − Fisk の対称積分の自然な拡張になっていることは簡単な例より推察されるが、実際このことは正しくて、1981年に筆者は以下の結果(定理1及び2)を得ている。(*2)

(*2)　確率論セミナー"四月シンポジウム"(1981年3月、於神戸大)にて発表。[4] はその講演をまとめたものである。

<u>定理1</u>，(i) 全ての quasi martingale，$f(x,\omega)=h(x,\omega)+\int_0^x g(y,\omega)d^\circ B(y)$ $(g\in \mathcal{M})$ は三角関数系 $\{1, T_{1,n}, T_{2,n} : n\geq 1\}$ に関して可積分であって，(h が causal であれば)，積分 $\int_0^1 f\, d_T B$ は対称積分 $\int f\, dB \ (=\int f\, d^\circ B+\frac{1}{2}\int g\, dx)$ に一致する。

(ii)，(i)において，乱関数 g が再び quasi martingale であるならば，f は u-可積分である。

(注.1)．対称積分の公式において現われる係数 "$\frac{1}{2}$" が，調和解析における Dirichlet の不連続因子に附随する定数 "$\frac{1}{2}$" と同根のものであることが定理1の証明において明らかとなる。(更に，命題1を見られたい)。

定理1の証明と同様にして次の結果を得るが，これは対称積分の対称性から当然予想されるところでもある。

<u>定理2</u> 定理1と同様の主張が，anticausal な quasi martingale，$f(x,\omega)=h(x,\omega)+\int_x^1 g(y,\omega)d_\circ B(y)$ $(g\in \hat{\mathcal{M}})$ に対しても成立する。

以下，§2，§3において上の定理1の様々な拡張を考え，

そのことを通じて非因果的確率積分と対称積分との関係について調べていくことにする。

ところで，対称積分の概念は通常 quasi martingale や B-可微分な乱関数（後出，§3）に適用された形式に依って理解されている傾向があるが，この概念はいうまでもなくより広いクラスの乱関数に対して意味を持ち得るものである。それ故，以後の混乱をさける為にもここでその定義を整理しておくのも無駄ではないように思われる：

区間 $[0,1]$ の分割，$\Delta = \{0 = t_0 \le t_1 < \cdots < t_p = 1\}$ に対して $|\Delta| = \max_i |t_{i+1} - t_i|$，$\Delta_i = [t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \cdots, p-1)$ と記す。乱関数 f 及び数 $k\ (\in [0,1])$ が与えられたとして，Riemann 和 $S_\Delta^k(f)$ を考える，

$$(4);\quad S_\Delta^k(f) = \sum_{t_i \in \Delta} [f(t_i, \omega) + k\Delta_i f]\Delta_i B$$

ここに，$\Delta_i f = f(t_{i+1}, \omega) - f(t_i, \omega)$，$\Delta_i B$ も同様。

<u>定義2</u>　$\lim_{n\to\infty} |\Delta^n| = 0$ となる任意の分割列 $\{\Delta^n\}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}^k(f)$ $(\text{in } P)$ が存在するとき，f は $\mathcal{I}_k$-可積分であるといい，その極限を $\mathcal{I}_k(f)$（或いは，$\int f d^k B$）と記す。特に $k = \frac{1}{2}$ であるとき，$\int f dB$ と記し，これを f の

"対称積分"と称する。

さて，上にも示した如く，乱関数 f の $\mathcal{I}_R$-可積分性については，次の結果が良く知られている；

例3 (イ) (Stratonovich, [9], Fisk, [1]) Quasi martingale は $\mathcal{I}_R$-可積分である。

(ロ) (S. Ogawa, [2]) B-可微分な乱関数は $\mathcal{I}_R$-可積分である。

§2. Quasi martingales の φ-可積分性

定理1の一つの拡張として，ここでは全ての quasi martingales がそれに関して可積分となるような正規直交底 $\{\varphi_n\}$ を特徴づけることを考えてみよう。容易にわかるように，有界変動関数 h は u-可積分であるから，この項の存在は議論において本質的役割を果すものではない，よって $\int_0^t g\, d^{\varphi}B$ なる形の乱関数について調べておけば十分である。

定理3. 全ての quasi martingale f が任意の区間 $[a,b]$ 上で φ-可積分である為には，次の (5) が成立することが必要十分で

あり，このとき，関係 $\int_0^1 f\, d_\varphi B = g_{\frac{1}{2}}(f)$ が成立する。

(5)：$\begin{cases} \sup_n \int_0^1 u_n^2(x)\,dx < +\infty, \\ \text{ここに} \\ u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\tilde{\varphi}_k(x), \quad \tilde{\varphi}_k(x) = \int_0^x \varphi_k(y)\,dy \end{cases}$

（注.2） 乱関数 $f(x,\omega) = \int_0^x g(y,\omega)\,d^{\circ}B(y)$ が $x \geq 1$ においても定義されているものとすれば，各固定した $y>0$ 毎に $f(x+y,\omega)$ は u－可積分となることがこの定理の証明と同様の論法で確かめられる。

例4. 三角関数系に対しては，$u_n(x) = x + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{2} T_{i,k}(x)\tilde{T}_{i,k}(x)$

とおけば，$u_n(x) = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2k\pi x}{k\pi}$ となり，$\|u_n\| \leq \frac{1}{2}$

$(\forall n)$ でたしかに条件(5)はみたされている。

例5. Haar 関数系 $\{H_{i,n}(x);\ i \geq 0,\ n \geq 0\}$ を考えてみる。

ここで，$H_{0,0}(x) = 1$，$H_{i,n}(x) = 2^{\frac{n-1}{2}}\{1_{[2^{-n}2i,\ 2^{-n}(2i+1))}(x)$ $-$

$- 1_{[2^{-n}(2i+1),\ 2^{-n}2(i+1))}(x)\}$ $(i = 0, 1, \dots, 2^{n-1}-1,\ n \geq 1)$.

この場合，$u_n(x) = x + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} H_{i,k}(x)\widehat{H}_{i,k}(x)$ とおけば簡単な計算により，$u_n(x) = T^n x \quad (0<x<1)$ となることがわかる。ここに T は x の無限2進展開における"ずらし"変換（[5]）である。従ってこの場合も条件(5)は成立している。

定理3の証明は定理1のそれと同様にして得られるが，異る点は，*Lemme* 1′（[4]）の代りに次の命題1を活用するところである。

<u>命題1</u>．関数列 $\{u_n\}$ が L^2 において弱収束する為の必要十分条件は，$\{u_n\}$ が条件(5)をみたすことである。更にこのとき，任意の $g \in L^2(0,1)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le a\le 1} \left| \int_0^a g(x)\{u_n(x) - \tfrac{1}{2}\}dx \right| = 0$$ が成立する。

さて，f を quasi martingale，$\{\varphi_n\}$ を条件(5)をみたす c.o.n.s. とするとき，非因果的積分 $\int_0^a f(x,\omega)d_\varphi B(x)$ $(0\le a\le 1)$ が a に関して一様収束するかどうかは，応用的見地からも興味のあるところである。これについては，次の結果がある，

命題2: Quasi martingale $f(x,w)=h(x,w)+\int_0^x g(y,w)\,d^\circ B(y)$ において, 乱関数 g が条件: $P[w:\int_0^1 g^4(x,w)dx<+\infty]=1$ をみたしているとき, 非因果的積分 $\int_0^a f(x,w)\,d_\varphi B(x)$ は a に関して一様に確率収束する。

(証明の概略) 有界変動関数 $h(x,w)$ に対しては, Itô–Nishio の定理より直ちに, 積分 $\int_0^a h\,d_\varphi B$ が a に関して一様収束であることがわかる。従って命題1より, 証明は次の級数, $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\,d^\circ B(x)\int_0^x 1_{[0,a]}(y)\,g(y,w)\,\tilde{\varphi}_n(y)\,d^\circ B(y)$ が a に関して一様収束することを確めることに帰着される, そしてこのことは [4] の Lemme 2 と次の補題に依り容易に検証される。

補題 $F_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \varphi_k(x)\,d^\circ B(x)\int_0^x 1_{[0,a]}(y)\,g(y,w)\,\tilde{\varphi}_k(y)\,d^\circ B(y)$

とおく。g が条件, $E\int_0^1 g^4(x,w)\,dx<+\infty$ をみたすとき, 任意の $[a,b]$ ($\subset[0,1]$) 上で次の評価が成立する,

(6)： $E[\{F_n(a)-F_n(b)\}^2]$

$$\leq C(b-a)\left\{E\int_a^b g^4(x,w)dx\right\}\left\{\sup_{0\leq y\leq 1}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\tilde{\varphi}_k^2(y)\right]^2\right\},$$

ここに，Cは（a, b, gに無関係な）定数である。

次の例は定理3に対する一つの非因果的アナロジーを与えるものとして興味がある。

例6．f を命題2における条件をみたす quasi-martingale, $\{\varphi_n\}$ を条件(5)をみたすC.O.N.S. また $\{h_1, h_2, \cdots, k_1, k_2\cdots\}$ は全て有界変動な乱関数とする。このとき，命題2より，積分 $\int_0^a f(x,w)h_1(x,w)d_\varphi B(x)$ が $a\in[0,1]$ について一様に（確率）収束することは容易にわかる。そこで，$f_1(x,w)=k_1+\int_0^x f\cdot h_1 d_\varphi B$ とおけば，乱関数 f_1 はU-可積分となる。更に，式；$f_n(x,w)=k_n+\int_0^x f_{n-1}(y,w)h_n(y,w)d_\varphi B$ によって帰納的に導入される乱関数 f_n は全てU-可積分である。

§3．B-可微分関数の φ-可積分性；乱関数 f に対して，次のような $g\in M$ が存在するとき，

$$\sup_{|x-y|\leq h} E\left[\left\{f(x,w)-f(y,w)-\int_y^x g\, d^{\circ}B\right\}^2\right]=o(h)$$

このとき f はB-可微分であるという，例3(12)に見たように，B-

可微分な関数は $\mathcal{I}_k$-可積分である。このような関数の φ-可積分性を調べるのが本節の目的である。その為に，B-可微分性よりも今少し一般的な概念を導入するのが好都合である。

乱関数 f は次の条件をみたすとき B-regular であるという。即ち：$g \in M$ が存在して，$k(x,\omega) = f(x,\omega) - \int_0^x g(y,\omega) d^{\circ}B(y)$ とおくとき $\lim_{n\to\infty} |\Delta^n| = 0$ となる任意の分割列 $\{\Delta^n\}$ に対して，各点 $x \in [0,1]$ 毎に，

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\xi_i = x_i^n, x_{i+1}^n} \left| \sum_{x_i^n \in \Delta^n(x)} \frac{\Delta_i^n B}{|\Delta_i^n|} \int_{\Delta_i^n} \{k(y,\omega) - k(\xi_i,\omega)\} dy \right| = 0 \quad (\text{in } P),$$

ここに，$\Delta^n(x)$ は Δ^n が区間 $[0,x]$ に導入する分割。

<u>例 7</u>　B-可微分関数は B-regular である．また quasi-martingale も B-regular である。

我々は，B-regular 関数の Haar 関数系 $\{H_{i,n}\}$ に関する可積分性を示すことができる。その前に，次の事実に注意しておく：

<u>命題 3</u>　$B^{(n)}$ を次で与えられる，ブラウン運動の折れ線近似列であるとする．

$$B^{(n)}(x,\omega)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\tilde{\chi}_{n,i}(x)\int_0^1\chi_{n,i}(y)\,dB(y),$$

ここに、 $\chi_{n,i}(x)=2^{\frac{n}{2}}\cdot 1_{[2^{-n}i,\ 2^{-n}(i+1))}(x)$.

このとき、乱関数 f が Haar 関数系に関して可積分であることと、 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x,\omega)\,dB^{(n)}$ (in P) が存在することとは同値である。

命題3，定理2及び例3より次の結果を得る。

命題4　B-regular な関数 f が I_0-可積分ならば、f は Haar 関数系に関して可積分であって、このとき、積分 $\int f\,d_H B$ は 対称積分 $I_{\frac{1}{2}}(f)$ に一致する。

この結果と例7より、非因果的積分は（古い意味での）対称積分の拡張を与えていることがわかるのである。

§4. 非因果的確率微分方程式について.

非因果的解析の適用例として、確率微分方程式の初期値問題をとり上げ、得られている結果と問題点を紹介しておくことにしよう（この節の議論の詳細については [6] を参照されたい）。

次のような初期値問題を考える

$$
(7)\quad \begin{cases} dX(t,\omega) = a(t,X(t))dt + b(t,X(t))dB(t) & (t \geq 0) \\ X(0,\omega) = \alpha(\omega). \end{cases}
$$

ここに，$\alpha(\omega)$ は $\mathcal{F}$-可測な実確率変数，$a(t,x)$，$b(t,x)$ は $[0,1] \times R^1$ 上の適当に滑らかな実数値関数である．

我々の目的はこの問題を非因果的解析の視点から捉え直すことである。初期値 $\alpha(\omega)$ がブラウン運動 $B(\cdot)$ に独立な変数である場合には，上の問題は因果的解析の枠内でも取扱い可能なものとなる。ところが，従来の因果的理論においては解となり得る乱関数は因果的なものに限られており，これに対して，最初からそうした制限を設定しないというのが非因果的理論の立場である。この意味で，非因果的理論は因果的な理論を含むものであることを注意しておこう。

さて，(7) の "解" の定義であるが，様々な与え方が可能である。ここでは，非因果的積分の特徴に応じて次のように与えることにする，（この点で，[6] における記述とは少し異っている）。

<u>定義3</u> 乱関数 $X(t,\omega)$ が (7) の解であるとは，適当な正規直交底 $\{\varphi_n\}$ が存在して，X が次の非因果的積分方程式を

みたすものであることとする。

$$(8):\quad X(t,\omega)-\alpha(\omega)=\int_0^t a(s,X(s))\,ds+\int_0^t b(s,X(s))\,d_\varphi B(s)\qquad (0\le t\le 1).$$

このような解を φ-solution と呼ぶことにし、その全体を Σ_φ と記す。$\bigcup_{\{\varphi\}}\Sigma_\varphi$ が空でないとき、問題(7)は解をもつということにする。

(注)、解の一意性については、次の二通りの規定の仕方が考えられる。本稿においては一意性についての議論は行わないので、このうちのどちらを採用するかは指定の必要がない。

(i) $\bigcup_{\{\varphi\}}\Sigma_\varphi\neq\phi$ かつ、各 $\{\varphi\}$ 毎に Σ_φ が空か或いは一点集合である場合。

(ii) $\bigcup_{\{\varphi\}}\Sigma_\varphi$ が一点集合である場合。

以下において、初期値問題(7)の解の存在について調べていくことにしよう。その際の議論を簡単にする為に次の二つの仮定を設けておく。

(H.1) $a(t,x)$, $b(t,x)$ はそれぞれ C^1-級及び C^2-級であり、更に $b(t,x)$ は x について C^3-級であるとする。

(H.2)：次の対称積分方程式

$$(9)\qquad \tilde{X}(t,\omega)-\alpha=\int_0^t a(s,\tilde{X}(s))ds+\int_0^t b(s,\tilde{X}(s))dB(s)$$

の解を $\tilde{X}(t,\omega:\alpha)$ とするとき，$\tilde{X}$ は $(t,\alpha)\in[0,1]\times\mathbb{R}^1$ について連続で，α については C^1- 級の乱関数となっている。

初期値 $\alpha(\omega)$ がブラウン運動に関して独立なものである場合は簡単である。実際，これを初期値とする対称積分方程式(9)の解が，($\{\mathcal{F}_t\}$ として条件(5)をみたすものをとれば)，方程式(8)をみたしていることは定理3より直ちにわかる。ところで，解の一意性については未解決であるが，この場合は通常の因果的初期値問題が非因果的解を持ち得るものであるか否かを調べることに帰着し，これは極めて重要かつ興味深い問題である。

初期値が一般の確率変数である場合にも，基本的には定理3によって，解の存在を示すことができる。

$\{f(t,\omega,\alpha)\,;\,\alpha\in[-M,M]\}$ を次のような quasi-martingales の族とする。

(10)(イ) $f(t, w, \alpha) - f(0, w, \alpha)$

$$= \int_0^t g(s, w, \alpha)\, d^\circ B(s) + \int_0^t h(s, w, \alpha)\, ds$$

ここに，g，h は (t, w, α) について $\mathcal{B}_{[0,1]} \times \mathcal{F} \times \mathcal{B}_{R^1}$-可測で，

(10).(ロ) 各 $\alpha \in [-M, M]$ 毎に，因果的な乱関数で次の条件をみたしているものとする，

$$P\left[\int_{-M}^{M} d\alpha \int_0^1 \{ g^2(s, w, \alpha) + h^2(s, w, \alpha) \} ds < +\infty \right] = 1.$$

このとき，定理3 より次の命題を得る．

<u>命題5</u> (i) $\{\varphi_n\}$ を条件(5)をみたす正規直交底とするとき，

(11) $$\lim_{n \to \infty} \int_{-M}^{M} d\alpha \left[\int_0^1 f(s, w, \alpha) \{ dB_\varphi^n(s) - d_\varphi B(s) \} \right]^2 = 0$$

(in P)，

ここに，$B_\varphi^n(t, w) = \sum_{k=1}^{n} \hat{\varphi}_k(t) Z(\varphi_k)$．

(ii) 更に，g が f と同様の条件をみたす quasi-martingales であるならば，上式(11)は，全ての c.o.n.s. $\{\varphi_n\}$ に対して成立する。

さて，$\tilde{X}(t,w,\alpha)$ を仮定 (H.2) にいうところの (9) の解とし，これに対して次のような近似列を導入する．

$$(12) \quad X_n^{\varphi}(t,w,\alpha) = \alpha + \int_0^t a(s,\tilde{X}(s))ds + \int_0^t b(s,\tilde{X}(s))dB_{\varphi}^n(s).$$

このとき，任意に固定した $M(>0)$ に対して，各 t 毎に

$$\lim_{n\to\infty} \Big[\sup_{-M\leq\alpha\leq M} |\tilde{X}(t,w,\alpha) - X_n^{\varphi}(t,w,\alpha)| \Big] = 0 \quad (\text{in } P.)$$

の成立することが，仮定 (H.1), (H.2) の下で，命題5によって導かれ，このことから次の定理が従う．

定理4．合成関数 $X(t,w) \equiv \tilde{X}(t,w,\alpha(w))$ は問題 (7) の解である，即ち；$\{\varphi_n\}$ として条件 (5) をみたすものをとれば，X は方程式 (8) をみたす。特に，$b(t,x)$ が (t,x) について C^3-級で，x について C^4-級であれば，このことは正規直交底 $\{\varphi_n\}$ のとり方に無関係に成立する．

§5．補足（L^2-関数の φ-可積分性について）．

これまでに我々は，quasi-martingale や B-可微分関数等，応用面において重要な位置を占める乱関数の φ-可積分性について調べてきたのであるが，これ以外の乱関数について

はどうであろうか。おわりに，そのような一般論への試みと可能性について言及しておくことにしよう。

$\mathcal{B}_{[0,1]} \times \mathcal{F}_1$-可測な実関数で，条件 $E\int_0^1 f^2(x,\omega)\,dx < +\infty$ をみたすものの全体を H_0 と記し，このクラスの乱関数の φ-可積分性について考えてみよう。対象をこのように制限することの利点は，Wiener-Ito の分解定理を活用できるところにある：

H_0-クラスの乱関数 $f(x,\omega)$ は次のように多重 Wiener 積分によって展開できる，

(i) $f(x,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_n^f(x;\cdot))$，ここに，$J_n(\cdot)$ は n 次多重 Wiener 積分であり，$\{k_n^f\}$ は次のような L^2-核の列である。

(ii) $k_n^f(x;x_1,\cdots,x_n)$ $(n \geq 0)$ は $(x_1,\cdots,x_n)$ について対称，$(x,x_1,\cdots,x_n)$ については二乗可積分な核で，$\{k_n^f\}$ は全体として，条件 $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,\|k_n^f\|_{n+1}^2 < +\infty$ をみたすものである，ここに $\|\cdot\|_n$ は $L^2([0,1]^n)$-ノルムを表わす。

$\{\varphi_n\}$ を与えられた c.o.n.s. として, $\mathcal{D}_n(x) = \int_0^1 D_n(x,y)\,dB(y)$ とおく, ここに, $D_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\varphi_k(y)$.

乱関数 f が 区間 $[a,b]$ 上で φ-可積分であるということは; $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathcal{D}_n(x) f(x,\omega)\,dx$ が 確率収束の意味で存在することと同値である。

$\mathbb{H}_1 = \{ f \in \mathbb{H}_0 ;\ \sum_{n=1}^{\infty} n\, n!\, \| k_n^f \|_{n+1}^2 < +\infty \}$ とおき,

$\mathbb{H}_1$ の元 $f(x,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_n^f(x;\cdot))$ に対して, f の stochastic derivative を次で導入する, ([7])

$$f'(x;y) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, J_{n-1}(k_n^f(x;y,\cdot)).$$

このとき,

$$E\iint_{[0,1]^2} (f'(x,y))^2\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} n\, n!\, \| k_n^f \|_{n+1}^2$$

となり, 上の概念は well-defined である。

簡単な計算により, 次の等式を得る.

$$\int_a^b f(x,\omega)\mathcal{D}_n(x)\,dx = \sum_{p=0}^{\infty} J_{p+1}\left(\left(\int_a^b k_p^f(y,\cdot)D_n(\cdot,y)\,dy\right)^{\sim}\right) + \int_a^b\int_0^1 f'(x,y)D_n(x,y)\,dy\,dx$$

ここに，$\{\int_a^b k_p^b(y;x_1,\cdots,x_p)D_n(y,x_{p+1})dy\}^{\sim}$ は $\{\ \}$ 内の関数を $(p+1)$-変数 $(x_1,\cdots,x_p,x_{p+1})$ について対称化したものである。

関数系 $\{\varphi_n\}$ の完全性より，次の等式を得る；

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{\infty}J_{p+1}\left(\left(\int_a^b k_p^b(y;\cdot)D_n(y,\cdot)dy\right)^{\sim}\right)=\sum_{p=0}^{\infty}J_{p+1}\left(\left(1_{[a,b]}k_p^b(\cdot;\cdot)\right)^{\sim}\right)$$

$$(\text{in } L^2)$$

以上のことより，次の結果に到る，

命題6. H_1-クラスの乱関数が，φ-可積分である為の必要十分条件は次の極限，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_a^b f(x;y)D_n(x,y)dxdy$ が（確率収束の意味で）存在することである。

上の結果は，現時点では余り実用的なものではない。例えば以下に記す問題点にも関係することであるが，H_0-クラスの有界変動関数やB-可微分関数が命題の条件を満たしているか否かの判定はそう容易ではない。しかし，この命題を通して我々は，非因果的積分の特徴やこの種の議論の性格を知ることができる。中でも重要なことは，乱関数に課せられる条

件には二種類の典型があるということである。例えば，(イ)：乱関数 f が stochastic derivative f' をもつ，ということと，(ロ)：derivative f' が上に示した意味での"trace"をもつ，という条件は互いに異質のものであろう。(イ)は直接 f の表現核の列 $\{k_n^f\}$ の定量的性質に課せられるものであり，この意味ですぐれて分析的性格をもつ条件である。これに対し(ロ)の方は，そのようにして規定された無限個の表現核により構成される乱関数 f' の可測関数としての定性的性質に関与するものであり，綜合的な性格をもつものである。

この種の議論においては，その成り立ちよりして当然のことであるけれども，分析的な条件のつけ方が主流となっている。一方，確率解析を応用する立場からみれば，諸々の条件は綜合的な性格のものであることが望ましい。ところで現状では，上に指摘したように，一つの型の条件を他方の型のものに翻訳する作業は簡単なものではない。(例えば，H_1-クラスの乱関数はどのような定性的性質をもつものであるかとか，逆に，有界変動関数を表現する核 $\{k_n^f\}$ はどのような性質をもつものであるか，等々)。それ故，こうした一般論をより内容豊富なものとする為には，二つの型の条件（分析的と，綜合的と）相互の対応を明らかにしていくことが必要であり，これが今後の大きな課題となるであろう。（'84，4月）

References :

[1] D.L.Fisk, Quasi-martingales and stochastic integrals, Thesis, Michigan State Univ. (1963).

[2] S.Ogawa, On a Riemann definition of the stochastic integral, (I),(II), Proc.Japan Acad.,46(1970) 153-157, 158-161.

[3] S.Ogawa, Sur le produit direct du bruit blanc par lui-même, C.R.Acad.Sci.,Paris, 288(1979) série A, 359-362.

[4] S.Ogawa, Quelques propriétés de l'integral stochastique du type noncausal, Japan J.of Appl.Math.,(1984).

[5] S.Ogawa, The stochastic integral of nocausal type as an extension of the symmetric integrals, (1984) pré-print.

[6] S.Ogawa, Sur la question d'existence de solutions d'une équation différentielle stochastique du type noncausal, (1983, submitted to Kyoto J. of Math.).

[7] A.Ju.Sevljakov, Stochastic differentiation and integration of functionals of a Wiener process, Teor.Slucainyh Processov Vyp.6(1978) 123-131.

[8] R.L.Stratonovich, Conditional markov processes, Theor.Probability Appl.,5 (1960) 156-178.