数理解析研究所講究録
第 527 巻 1984 年 26-43

Noncausal確率積分のL^2-理論 (I)

富山大・理　関口　健 (Takeshi Sekiguchi)
秋田大・教育　塩田安信 (Yasunobu Shiota)

本稿ではnoncausal確率積分についてのロシア学派の研究(L^2-理論)の解説およびこれらの研究と小川氏によるnon-causal確率積分の関連について述べる。

§1. 準備.

1. $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ を $L^2(X)$ が separable な measure space とし，W を $\mathfrak{X}$ 上の Gaussian random measure で $E[\{W(dx)\}^2] = \mu(dx)$ なるものとする。即ち，

i) $\{W(A); A \in \mathfrak{X}\}$ はある probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の Gaussian random system,

ii) $\forall A \in \mathfrak{X}$ に対して $E[W(A)] = 0$, $E[\{W(A)\}^2] = \mu(A)$,

iii) $A, B \in \mathfrak{X}$ が $A \cap B = \phi$ ならば $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$。

2. normalized Hermite polynomials :

$$H_p(x) = (-1)^p \frac{1}{\sqrt{p!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^p}{dx^p} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad p = 0, 1, 2, \cdots, \ x \in \mathbb{R}.$$

性質.

1) $e^{-\lambda^2+\sqrt{2}\lambda x}=\sum_{p=0}^{\infty}\lambda^p\sqrt{\frac{2^p}{p!}}\,H_p(x)$,

2) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}H_p(x)H_q(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\begin{cases}1, & p=q,\\ 0, & p\neq q,\end{cases}$

3) $H_p(x)H_q(x)=\sqrt{p!q!}\sum_{j=0}^{p\wedge q}\{\sqrt{(p+q-2j)!}/j!(p-j)!(q-j)!\}H_{p+q-2j}(x)$.

3. multiple Wiener integrals. $\{\varphi_n\}$ を CONS in $L^2(X)$ とする。

1) (Cameron-Martin) $\{\prod_{j=1}^{k}H_{p_j}(\int\varphi_{n_j}(x)W(dx))$; $(n_1,\cdots,n_k)$, $(p_1,\cdots,p_k)$, $\sum_{j=1}^{k}p_k=p$, $p=0,1,2,\cdots\}$ は CONS in $L^2(\Omega)$.

2) $\hat{L}^2(X^p)=\{\hat{f}(x_1,\cdots,x_p)=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma}f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(p)})\,;\,f\in L^2(X^p)\}$

とおく。このとき,

$$\Big\{\sqrt{\frac{p!}{p_1!\cdots p_k!}}\,\varphi_{n_1}^{\hat{\otimes}p_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\varphi_{n_k}^{\hat{\otimes}p_k}(x_1,\cdots,x_p)\,;$$
$$(n_1,\cdots,n_k),(p_1,\cdots,p_k),\ \sum_{j=1}^{k}p_j=p,\ p=0,1,2,\cdots\Big\}$$

は CONS in $\hat{L}^2(X^p)$. ここで $\hat{\otimes}$ は tensor 積を表わす。

3) operator を

$$\frac{1}{\sqrt{p!}}\int\cdots\int\sqrt{\frac{p!}{p_1!\cdots p_k!}}\,\varphi_{n_1}^{\hat{\otimes}p_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\varphi_{n_k}^{\hat{\otimes}p_k}(x_1,\cdots,x_p)$$
$$=H_{p_1}\Big(\int\varphi_{n_1}(x)W(dx)\Big)\cdot\cdots\cdot H_{p_k}\Big(\int\varphi_{n_k}(x)W(dx)\Big)$$

で定めるとこの operator は $\hat{L}^2(X^p)$ から $L^2(\Omega)$ への operator に拡張される。これを p 次 multiple Wiener integral と呼び

$$\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_p)W(dx_1)\cdots W(dx_p)\quad,\ f\in\hat{L}^2(X^p)$$

で表わす。

4. multiple Wiener integrals の性質.

$\mathcal{H}(\Omega)=L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_p(\Omega)=p$次 multiple Wiener integral 全体,

ただし $\mathcal{H}_0(\Omega)=\mathbb{R}$

とおく。以下のことは良く知られている:

1)(Ito-Wiener 展開) $\mathcal{H}(\Omega)=\sum_{p=0}^{\infty}\oplus\,\mathcal{H}_p(\Omega)$.

2)(Fubini型公式) $f(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_p)\in L^2(X^{k+p})$, $g(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_q)\in L^2(X^{k+q})$ とすると

$$\int\cdots\int\Big[\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma}\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_k,y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(p)})\,g(x_1,\cdots,x_k,y_{\sigma(p+1)},\cdots,y_{\sigma(p+q)})\,\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k)\Big]W(dy_1)\cdots W(dy_{p+q})$$

$$=\int\cdots\int\Big[\int\cdots\int\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma}f(x_1,\cdots,x_k,y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(p)})\,g(x_1,\cdots,x_k,y_{\sigma(p+1)},\cdots,y_{\sigma(p+q)})\,W(dy_1)\cdots W(dy_{p+q})\Big]\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k).$$

3)(積公式) $f\in\hat{L}^2(X^p)$, $g\in\hat{L}^2(X^q)$ とすると

$$\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_p)W(dx_1)\cdots W(dx_p)\cdot\int\cdots\int g(x_1,\cdots,x_q)W(dx_1)\cdots W(dx_q)$$

$$=\sum\frac{p!\,q!}{j!\,(p-j)!\,(q-j)!}\int\cdots\int\Big[\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_j,y_1,\cdots,y_{p-j})\cdot g(x_1,\cdots,x_j,y_{p-j+1},\cdots,y_{p+q-2j})W(dy_1)\cdots W(dy_{p+q-2j})\Big]\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_j).$$

§2. Stochastic derivatives.

1. $k=0,1,2,\cdots$ に対して

$\mathcal{H}(X^k\times\Omega)=L^2(X^k\times\Omega)$,

$\mathcal{H}_p(X^k\times\Omega)=\Big\{\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_p)W(dy_1)\cdots W(dy_p);$

$\quad f\in L^2(X^{k+p}),\ f(x_1,\cdots,x_k;\cdot)\in\hat{L}^2(X^p)\Big\}$,

$$\mathcal{H}_{finite}(X^k \times \Omega) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \oplus \mathcal{H}_p(X^k \times \Omega)$$

とおく。ただし $X^0 \times \Omega = \Omega$ と考える。Ito-Wiener 展開より

$$\mathcal{H}(X^k \times \Omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_p(X^k \times \Omega).$$

以後，この展開を次のように表わす：$F \in \mathcal{H}(X^k \times \Omega)$ に対して

$$F(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{p=0}^{\infty} F_p(x_1, \cdots, x_k)$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty} \int \cdots \int f_p(x_1, \cdots, x_k; y_1, \cdots, y_p) W(dy_1) \cdots W(dy_p).$$

G も同様に表わされているとすると，$\mathcal{H}(X^k \times \Omega)$ における内積は

$$(F, G)_{\mathcal{H}(X^k \times \Omega)}$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty} E\left[\int \cdots \int F_p(x_1, \cdots, x_k) G_p(x_1, \cdots, x_k) \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_k)\right]$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty} p! \int \cdots \int f_p(x_1, \cdots, x_k; y_1, \cdots, y_p) g_p(x_1, \cdots, x_k; y_1, \cdots, y_p)$$
$$\mu(dx_1) \cdots \mu(dx_k) \mu(dy_1) \cdots \mu(dy_p)$$

となる。

2. *Stochastic derivatives*. $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ とする。μ-a.e. x に対し級数

$$\sum_{p=1}^{\infty} p \int \cdots \int f_p(x, y_1, \cdots, y_{p-1}) W(dy_1) \cdots W(dy_{p-1})$$

が $\mathcal{H}(\Omega)$ で収束するとき，これを F の *stochastic derivative* と言い $\mathcal{D}F$ あるいは $[\mathcal{D}F](x)$ と表わす。$\mathcal{D}$ が *linear* なことは明らか。

また，$F(x_1, \cdots, x_k) \in \mathcal{H}(X^k \times \Omega)$ とすると μ^k-a.e. $(x_1, \cdots, x_k)$ に対して $F(x_1, \cdots, x_k) \in \mathcal{H}(\Omega)$ であり，$\mathcal{D}F$ が定義可能となる。さらに高階の *stochastic derivative* も

$$\mathcal{D}^j F = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{j-1} F) \quad (\mathcal{D}^0 F = F)$$

により定義できる(もちろん右辺が意味をもつときのみ)。このとき $\mathcal{D}^j F$ は次のように表わされる。

$$[\mathcal{D}^j F](x_1,\cdots,x_k;x_{k+1},\cdots,x_{k+j})$$
$$=\sum_{p=j}^{\infty}\frac{p!}{(p-j)!}\int\cdots\int f_p(x_1,\cdots,x_k;x_{k+1},\cdots,x_{k+j},y_1,\cdots,y_{p-j})$$
$$W(dy_1)\cdots W(dy_{p-j}).$$

3. $\ell=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega)=\{F\in\mathcal{H}(X^k\times\Omega):\mathcal{D}^jF\text{ が定義され},$$
$$\mathcal{D}^jF\in\mathcal{H}(X^{k+j}\times\Omega),\ j=0,1,\cdots,\ell\},$$
$$\mathcal{H}^{(\infty)}(X^k\times\Omega)=\bigcap_{\ell=0}^{\infty}\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega).$$

とおく。$\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega)$ は内積

$$(F,G)_{\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega)}=\sum_{j=0}^{\ell}(\mathcal{D}^jF,\mathcal{D}^jG)_{\mathcal{H}(X^{k+j}\times\Omega)}$$
$$=\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{p=j}^{\infty}\frac{p!}{(p-j)!}E\left[\int\cdots\int F_pG_p\,\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k)\right]$$
$$=\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{p=j}^{\infty}\frac{p!}{(p-j)!}p!\int\cdots\int f_p\,g_p\,\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k)\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_p)$$

で Hilbert space となる(complete なことは次の Prop. による)。この内積から導かれる norm を $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega)}$ で表わす。

4. <u>Prop.</u> $F\in\mathcal{H}(X^k\times\Omega)$, $F^{(n)}\in\mathcal{H}^{(1)}(X^k\times\Omega)$ $(n=1,2,\cdots)$ とする。$F^{(n)}\to F$ in $\mathcal{H}(X^k\times\Omega)$ $(n\to\infty)$ および $\exists\, G\in\mathcal{H}(X^{k+1}\times\Omega)$: $\mathcal{D}F^{(n)}\to G$ in $\mathcal{H}(X^{k+1}\times\Omega)$ $(n\to\infty)$ とする。このとき, $F\in\mathcal{H}^{(1)}(X^k\times\Omega)$, $\mathcal{D}F=G$ および $F^{(n)}\to F$ in $\mathcal{H}^{(1)}(X^k\times\Omega)$ $(n\to\infty)$ が成り立つ。

Proof. は Ito-Wiener 展開による.

5. Notations.

$P=(P_1,\cdots,P_m)$, $|P|=P_1+\cdots+P_m$, $P!=P_1!\cdots P_m!$

$\mathbb{t}=(t_1,\cdots,t_m)$

$\varphi=\{\varphi_n\}$: CONS in $L^2(X)$

$\varphi^{\otimes P}(x_1,\cdots,x_{|P|})=\varphi_1^{\hat{\otimes}P_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\varphi_m^{\hat{\otimes}P_m}(x_1,\cdots,x_{|P|})$

$\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ として

$$\Phi(\textstyle\int\varphi\,dW)=\Phi(\int\varphi_1(x_1)W(dx_1),\cdots,\int\varphi_m(x_m)W(dx_m)).$$

6. Prop. 1) $\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ を高々多項式の order とすると

$$\Phi(\textstyle\int\varphi\,dW)=\sum_P\frac{1}{P!}\int_{\mathbb{R}^m}\Phi(-\mathbb{t})\frac{\partial^{|P|}}{\partial\mathbb{t}^P}e^{-\frac{(\mathbb{t},\mathbb{t})}{2}}d\mathbb{t}\cdot$$
$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\int\cdots\int\varphi^{\otimes P}(x_1,\cdots,x_{|P|})W(dx_1)\cdots W(dx_{|P|}).$$

2) $\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ および $\frac{\partial}{\partial t_i}\Phi$, $i=1,\cdots,m$, が高々多項式の order とする。このとき $\Phi(\int\varphi\,dW)\in\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathfrak{D}\Phi(\textstyle\int\varphi\,dW)](x)=\sum_{i=1}^m\frac{\partial}{\partial t_i}\Phi(\int\varphi\,dW)\cdot\varphi_i(x).$$

Proof. 1) Ito-Wiener 展開したときの係数を, Hermite 多項式の性質を用いて計算する. 2) 1) と 4. Prop. による.

7. $\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega)$ の dense sets.

Prop. 1) $\{\Phi(\int\varphi\,dW)\,;\,\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ は多項式, $m=1,2,\cdots\}$

は dense in $\mathcal{H}^{(\ell)}(\Omega)$ ($\ell=0,1,2,\cdots$).

2) 1)で $\Phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ としてよい。

3) $\{\psi(x_1,\cdots,x_k)\Phi(\int\varphi dW)$; $\psi\in L^2(X^k)$ は bounded, $\Phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $m=1,2,\cdots\}$ の linear span は dense in $\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega)$.

Proof. 1) 任意の $F\in\mathcal{H}^{(\ell)}(\Omega)$ に対して Hermite 多項式を使うことにより $\mathcal{H}^{(\ell)}(\Omega)$ における近似列が構成できる。2) Φ を多項式とするとき $\Phi_n\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ で $\Phi_n(\int\varphi dW)\to\Phi(\int\varphi dW)$ in $\mathcal{H}^{(\ell)}(\Omega)$ となるものが取れる。3) 明らか。

8. Prop. $\Phi:\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$ および $\frac{\partial}{\partial t_j}\Phi$, $j=1,\cdots,r$ が bounded とし, $F^{(j)}\in\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $j=1,\cdots,r$ とする。このとき $\Phi(F^{(1)},\cdots,F^{(r)})\in\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathcal{D}\Phi(F^{(1)},\cdots,F^{(r)})](x)=\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial}{\partial t_j}\Phi(F^{(1)},\cdots,F^{(r)})\cdot[\mathcal{D}F^{(j)}](x).$$

Proof. 7. Prop. 2), 6. Prop. 2) および 4. Prop. による。

Cor. 1 $\Phi\in C^1(\mathbb{R}^r)$ で $F^{(j)}\in\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $j=1,\cdots,r$ が bounded とすれば Prop. と同じことが言える。特に, $F,G\in\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ が bounded ならば $FG\in\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathcal{D}(FG)](x)=[\mathcal{D}F](x)\cdot G+F\cdot[\mathcal{D}G].$$

Cor. 2 Prop. で $F^{(j)}\in\mathcal{H}^{(1)}(X^k\times\Omega)$, $j=1,\cdots,r$ とすれば $\Phi(F^{(1)},\cdots,F^{(r)})\in\mathcal{H}^{(1)}(X^k\times\Omega)$ となり, 同様の公式が成り立つ。

9. Prop. 1) $F, G \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ とし，G, $\int\{[\mathfrak{D}G](x)\}^2\mu(dx) \in L^\infty(\Omega)$ とすると $FG \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathfrak{D}(FG)](x) = [\mathfrak{D}F](x)\cdot G + F\cdot[\mathfrak{D}G](x).$$

2) $F \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ とし，$\int G^2(x)\mu(dx)$, $\iint\{[\mathfrak{D}G](x;y)\}^2\mu(dx)\mu(dy) \in L^\infty(\Omega)$ とすると $FG \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ で

$$[\mathfrak{D}(FG(x))](y) = [\mathfrak{D}F](y)\cdot G(x) + F\cdot[\mathfrak{D}G](x;y).$$

Proof. 1) 7. Prop. 2) より $\exists$ bounded $F^{(n)} \to F$ in $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ $(n\to\infty)$.
$F^{(n)}G \to FG$ in $\mathcal{H}(\Omega)$ で，一方，8. Cor. 1 より

$$[\mathfrak{D}(F^{(n)}G)](x) = [\mathfrak{D}F^{(n)}](x)\cdot G + F^{(n)}\cdot[\mathfrak{D}G](x).$$

右辺第一項 $\to [\mathfrak{D}F](x)\cdot G$，第二項 $\to F\cdot[\mathfrak{D}G](x)$ in $\mathcal{H}(X\times\Omega)$ だから 4. Prop. より．2) も同様．

10. Prop. $f \in L^2(X)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ とすると $\int f(x)G(x)\mu(dx) \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathfrak{D}(\int f(x)G(x)\mu(dx))](y) = \int f(x)[\mathfrak{D}G](x;y)\mu(dx).$$

11. $F \in \mathcal{H}_p(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(\Omega)$ に対して

$$F\hat{\otimes}G = \int\cdots\int \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma} f_p(y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(p)})\, g_q(y_{\sigma(p+1)},\cdots,y_{\sigma(p+q)})\, W(dy_1)\cdots W(dy_{p+q})$$

とおく。$F \in \mathcal{H}_p(X^{k+l}\times\Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(X^k\times\Omega)$ ならば §1. 4. 2) より $\int\cdots\int F(x_1,\cdots,x_{k+l})\hat{\otimes}G(x_1,\cdots,x_k)\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k) \in \mathcal{H}_{p+q}(X^l\times\Omega)$.

<u>Prop.</u> 1) $F \in \mathcal{H}^{(q+r)}(X^{k+\ell} \times \Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(X^k \times \Omega)$ とする。

このとき $\sum_{p=0}^{\infty} \int \cdots \int F_p(x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_k) \hat{\otimes} G(y_1, \cdots, y_k) \mu(dy_1) \cdots \mu(dy_k)$

は $\mathcal{H}^{(r)}(X^\ell \times \Omega)$ で収束する（この和を $\int \cdots \int F(x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_k) \hat{\otimes}$

$G(y_1, \cdots, y_k) \mu(dy_1) \cdots \mu(dy_k)$ で表わす)。さらに，

$$\left\| \int \cdots \int F(x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_k) \hat{\otimes} G(y_1, \cdots, y_k) \mu(dy_1) \cdots \mu(dy_k) \right\|_{\mathcal{H}^{(r)}(X^\ell \times \Omega)}$$

$$\leqq C_{q,r} \|F\|_{\mathcal{H}^{(q+r)}(X^{k+\ell} \times \Omega)} \|G\|_{\mathcal{H}(X^k \times \Omega)}.$$

2) $F \in \mathcal{H}^{(q+r)}(X^\ell \times \Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(\Omega)$ とする。このとき

$$F(x_1, \cdots, x_\ell) G$$
$$= \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} \int \cdots \int [\mathcal{D}^j F](x_1, \cdots, x_\ell ; y_1, \cdots, y_j) \hat{\otimes} [\mathcal{D}^j G](y_1, \cdots, y_j)$$
$$\mu(dy_1) \cdots \mu(dy_j),$$

$$\|FG\|_{\mathcal{H}^{(r)}(X^\ell \times \Omega)} \leqq C_{q,r} \|F\|_{\mathcal{H}^{(q+r)}(X^\ell \times \Omega)} \|G\|_{\mathcal{H}(\Omega)}.$$

<u>§3. Extended Ito integrals.</u>

1. <u>Th.</u> $F \in \mathcal{H}^{(\ell+m)}(X^{k+m} \times \Omega)$ $(\ell \geqq 0,\ m \geqq 1,\ k \geqq 0)$ とする。

$$\tilde{f}_p(x_1, \cdots, x_k ; y_1, \cdots, y_{m+p})$$
$$= \frac{1}{(m+p)!} \sum_{\sigma} f_p(x_1, \cdots, x_k, y_{\sigma(1)}, \cdots, y_{\sigma(m)} ; y_{\sigma(m+1)}, \cdots, y_{\sigma(m+p)})$$

とおくと，級数

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int \cdots \int \tilde{f}_p(x_1, \cdots, x_k ; y_1, \cdots, y_{m+p}) W(dy_1) \cdots W(dy_{m+p})$$

は $\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k \times \Omega)$ において収束する。その *limit* を F の *extended Ito integral* (E.I.I.) と言い，$\dot{\int} \cdots \dot{\int} F(x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_m)$

$W(dy_1) \cdots W(dy_m)$，$J_{y_1, \cdots, y_m} F$ などと表わす。さらに，

$$\left\| \dot{\int}\cdots\dot{\int} F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m) \right\|_{\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega)}$$
$$\leqq C_{\ell,m}\|F\|_{\mathcal{H}^{(\ell+m)}(X^{k+m}\times\Omega)}.$$

Proof. 級数の各項の $\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega)$-normを評価する。

2. E.I.I.の性質.

1) 明かにlinear.

2) $\widehat{F}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_m)=\frac{1}{m!}\sum_\sigma F(x_1,\cdots,x_k,y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(m)})$

とすれば

$$\dot{\int}\cdots\dot{\int} F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m)$$
$$=\dot{\int}\cdots\dot{\int} \widehat{F}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m).$$

3) $\ell=0$, $m=1$のとき $C_{0,1}=1$ と取れる。また,この場合に等号が成り立つための必要十分条件は $\forall p$ で

$$f_p(x_1,\cdots,x_k,y_1;y_2,\cdots,y_{p+1})=\widehat{f}_p(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_{p+1})$$

が成り立つこと。

4)(E.I.I.に対するFubini型公式)

$$\dot{\int}\cdots\dot{\int} F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m)$$
$$=\dot{\int}W(dy_1)\dot{\int}W(dy_2)\cdots\dot{\int}F(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_m)W(dy_m).$$

3. $\mathfrak{D}$と$\mathfrak{J}$の関係.

Prop.1 $F\in\mathcal{H}^{(1)}(X^{k+1}\times\Omega)$, $G\in\mathcal{H}^{(1)}(X^k\times\Omega)$とすると

$$\left(\dot{\int} F(\cdot,x_{k+1})W(dx_{k+1}),G\right)_{\mathcal{H}(X^k\times\Omega)}=(F,\mathfrak{D}G)_{\mathcal{H}(X^{k+1}\times\Omega)}.$$

<u>Cor.</u> $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X^2 \times \Omega)$, $g \in L^2(X)$ とすると
$$\dot{\int} W(dy) \int g(x) F(x,y) \mu(dx) = \int \mu(dx) \dot{\int} g(x) F(x,y) W(dy).$$

<u>Prop.2</u> $F \in \mathcal{H}^{(2)}(X^k \times \Omega)$ とすると
$$[\mathcal{D}(\dot{\int} F(x_1, \cdots, x_k) W(dx_k))](x_1, \cdots, x_{k-1}; x)$$
$$= F(x_1, \cdots, x_{k-1}, x) + \dot{\int} [\mathcal{D}F](x_1, \cdots, x_k; x) W(dx_k).$$

4. 部分積分の公式.

<u>Prop.</u> $F \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$, $FG(\cdot) \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$, $F \dot{\int} G(x) W(dx)$, $\int [\mathcal{D}F](x) G(x) \mu(dx) \in \mathcal{H}(\Omega)$ とすると
$$F \dot{\int} G(x) W(dx) = \dot{\int} FG(x) W(dx) + \int [\mathcal{D}F](x) G(x) \mu(dx).$$

<u>Proof.</u> §2, 9. Prop. および 3. Prop. 1 による。

<u>Cor.1</u> $F \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$, F, $\int G^2(x) \mu(dx)$, $\iint \{[\mathcal{D}G](x; y)\}^2 \mu(dx) \mu(dy) \in L^\infty(\Omega)$ とすると
$$F \dot{\int} G(x) W(dx) = \dot{\int} FG(x) W(dx) + \int [\mathcal{D}F](x) G(x) \mu(dx).$$

<u>Cor.2</u> $F, G \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$, $\int F^2(x) \mu(dx)$, $\int G^2(x) \mu(dx)$, $\iint \{[\mathcal{D}G](x; y)\}^2 \mu(dx) \mu(dy) \in L^\infty(\Omega)$ とすると
$$F(y) \dot{\int} G(x) W(dx) = \dot{\int} F(y) G(x) W(dx) + \int [\mathcal{D}F](y; x) G(x) \mu(dx).$$

5. $X = [0, 1]$ or $\mathbb{R}$, $\mu(dx) = dx$ とする。$F \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ とすると $a, b \in X$, $a < b$ に対して $1_{(a,b]}(\cdot) F(\cdot) \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ は明らかだから $\dot{\int} 1_{(a,b]}(y) F(y) W(dy)$ が定義される。これを $\dot{\int}_a^b F(y) W(dy)$

で表わす。$a \leq b \leq c$ に対して明かに

$$\dot{\int}_a^c F(y)W(dy) = \dot{\int}_a^b F(y)W(dy) + \dot{\int}_b^c F(y)W(dy)$$

が成り立つ。また，上で述べた諸公式は $\dot{\int}$ を $\dot{\int}_a^b$ でおきかえても成り立つ。

6. E.I.I. を $\widehat{L}^2(X^m)$ における CONS $\{\varphi_n\}$ で近似する。

$$K_n(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_1,\cdots,x_m)\varphi_j(y_1,\cdots,y_m)$$

とおく。このとき，

<u>Th.</u> $F \in \mathcal{H}^{(\ell+m)}(X^{k+m} \times \Omega)$ とする。

$$\lim_{n\to\infty} \int\cdots\int [F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m) \hat{\otimes} \int\cdots\int K_n(y_1,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_m)$$
$$W(dz_1)\cdots W(dz_m)]\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_m)$$
$$= \dot{\int}\cdots\dot{\int} F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m) \quad \text{in } \mathcal{H}^{(\ell)}(X^k \times \Omega).$$

<u>Proof.</u> は次の Lemma による。

<u>Lem.</u> $F \in \mathcal{H}^{(\ell+m)}(X^{k+m} \times \Omega)$ に対して

$$F^{(n)}(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)$$
$$= \int\cdots\int F(x_1,\cdots,x_k,z_1,\cdots,z_m)K_n(z_1,\cdots,z_m,y_1,\cdots,y_m)\mu(dz_1)\cdots\mu(dz_m)$$

とおくと

1) $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(\ell+m)}(X^{k+m} \times \Omega)$ で，その kernel

$$f_p^{(n)}(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m;u_1,\cdots,u_p)$$
$$= \int\cdots\int f_p(x_1,\cdots,x_k,z_1,\cdots,z_m;u_1,\cdots,u_p)K_n(z_1,\cdots,z_m,y_1,\cdots,y_m)$$
$$\mu(dz_1)\cdots\mu(dz_m).$$

2) $\lim_{n\to\infty} F^{(n)} = \tilde{F}(x_1,\cdots,x_k\,;\,y_1,\cdots,y_m)$ in $\mathcal{H}^{(l+m)}(X^{k+m}\times\Omega)$.

3) $\dot{\int}\cdots\dot{\int} F^{(n)}(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m)$

$$= \int\cdots\int [F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)\hat{\otimes}\int\cdots\int K_n(y_1,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_m)$$
$$W(dz_1)\cdots W(dz_m)]\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_m).$$

§4. *-integrals.

1. $\mathcal{L}^0(X\times\Omega)=\{F: X\times\Omega\to\mathbb{R}\,;\,\mathfrak{X}\times\mathcal{F}\text{-meas.}, P(\int F^2(x,\omega)\mu(dx)<\infty)=1\}$ とおく。また $\{\varphi_n\}$ を $L^2(X)$ の CONS とし，

$$K_n(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\varphi_j(y),$$
$$Z_n(x,\omega)=\int K_n(x,y)W(dy)$$

とおく。$F\in\mathcal{L}^0(X\times\Omega)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int F(x,\omega)Z_n(x,\omega)\mu(dx)$$

が *in probability* で存在するとき，F は $\{\varphi_n\}$ に関して *-可積分と言い，この *limit* を $\overset{*}{\int} F(x,\omega)W(dx)$, $\mathcal{J}^*F$ などで表わす。この積分の形式は小川氏により導入されたものである。

2. $F\in\mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ に対して *-可積分であるための条件を調べる。§2, 11. Prop. 2) より

$$\int F(x,\omega)Z_n(x,\omega)\mu(dx)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\int F(x,\omega)\varphi_j(x)\mu(dx)\cdot\int\varphi_j(y)W(dy)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \int F(x,\omega)\varphi_j(x)\mu(dx) \hat{\otimes} \int \varphi_j(y) W(dy)$$
$$+ \iint [\mathcal{D}F](x;y,\omega)\varphi_j(x)\varphi_j(y)\mu(dx)\mu(dy) \Big\}$$
$$\ulcorner \mu(dy).$$
$$= \int F(x,\omega) \hat{\otimes} Z_n(x,\omega)\mu(dx) + \iint [\mathcal{D}F](x;y,\omega) K_n(x,y)\mu(dx)$$

従って, §3, 6. Th. より

<u>Th.</u> $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ が $\{\varphi_n\}$ に関して $*$-可積分となるための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} \iint [\mathcal{D}F](x;y,\omega) K_n(x,y)\mu(dx)\mu(dy)$$

が *in probability* で存在することで, このとき

$$J^*F = JF + \lim_{n\to\infty} \iint [\mathcal{D}F](x;y,\omega) K_n(x,y)\mu(dx)\mu(dy).$$

<u>§5. The Ito formula for E.I.I.</u>

1. $X = \mathbb{R}$, $\mu(dx) = dx$ とする。

<u>Th.</u> $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $F \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}\times\Omega) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}\times\Omega)$ とし

$$L(x) = \xi + \dot{\int_a^x} F(y) W(dy) + \int_a^x G(y)dy$$

とおく。このとき任意の $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(\star)\quad \Phi(L(\ell)) = \Phi(\xi) + \dot{\int_a^\ell} \Phi'(L(x))F(x)W(dx) + \int_a^\ell \Phi'(L(x))G(x)dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int_a^\ell \Phi''(L(x))F^2(x)dx$$
$$+ \int_a^\ell \Phi''(L(x))\Big\{[\mathcal{D}\xi](x) + \dot{\int_a^x} [\mathcal{D}F](y;x)W(dy)$$
$$+ \int_a^x [\mathcal{D}G](y;x)dy\Big\} F(x)dx.$$

<u>*Proof.*</u> は以下の *lemmas* による。

<u>Lem.1</u> $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $F \in \mathcal{H}^{(2)}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \{[\mathcal{D}F](x)\}^2 dx \in L^{\infty}(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}\times\Omega)$とし

$$L(x) = \xi + \int_a^{\bullet x} F\, W(dy) + \int_a^x G(y)\,dy$$

とおく。このとき任意の$\Phi \in C_b^3(\mathbb{R})$に対して、(☆)において$F(x)$を$F$で、$[\mathcal{D}F](y;x)$を$[\mathcal{D}F](x)$でおきかえた式が成り立つ。

<u>Lem.2</u> Lem.1において$\Phi \in C_b^3(\mathbb{R})$は$\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$としてよい。

<u>Lem.3</u> 1) Th.の仮定の下で、(☆)の各項はすべて$\mathcal{H}(\Omega)$に属する。

2) $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}\times\Omega) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}\times\Omega)$, $n = 1, 2, \cdots$, が存在して $F^{(n)} \to F$ in $\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}\times\Omega)$, また各$F^{(n)}$に対して

$$L^{(n)}(x) = \xi + \int_a^{\bullet x} F^{(n)}(y)\, W(dy) + \int_a^x G(y)\,dy$$

とおくとき

$$\begin{aligned}\Phi(L^{(n)}(b)) = \Phi(\xi) &+ \int_a^{\bullet b} \Phi'(L^{(n)}(x)) F^{(n)}(x)\, W(dx) \\ &+ \int_a^b \Phi'(L^{(n)}(x)) G(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b \Phi''(L^{(n)}(x)) (F^{(n)})^2(x)\,dx \\ &+ \int_a^b \Phi''(L^{(n)}(x)) \Big\{ [\mathcal{D}\xi](x) + \int_a^{\bullet x} [\mathcal{D}F](y;x)\, W(dy) \\ &\qquad + \int_a^x [\mathcal{D}G](y;x)\,dy \Big\} F^{(n)}(x)\,dx\end{aligned}$$

が成り立つならば(☆)が成り立つ。

<u>Lem.4</u> Lem.2において$\int_{-\infty}^{\infty} \{[\mathcal{D}F](x)\}^2 dx \in L^{\infty}(\Omega)$の条件は省くことができる。

<u>Lem.5</u> $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $F^{(j)} \in \mathcal{H}^{(2)}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, $j = 1, \cdots, n$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}\times\Omega)$とし,

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} 1_{(x_{j-1}, x_j]}(x)\, F^{(j)} \quad (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$$

$$L(x) = \xi + \int_a^{x} F(y) W(dy) + \int_a^{x} G(y) dy$$

とおく。このとき任意の $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ に対して(☆)が成り立つ。

§6. Duality.

1. $\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k \times \Omega)$ について。§2, 3 のことから $\mathcal{H}^{(\infty)}(X^k \times \Omega)$ は countably Hilbert space となる。$\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k \times \Omega)$ の dual space を $\mathcal{H}^{(-\ell)}(X^k \times \Omega)$ で、そこでの norm を $\| \cdot \|_{\mathcal{H}^{(-\ell)}(X^k \times \Omega)}$ で表わす。

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(X^k \times \Omega) \subset \cdots \subset \mathcal{H}^{(\ell+1)}(X^k \times \Omega) \subset \mathcal{H}^{(\ell)}(X^k \times \Omega) \subset \cdots$$

$$\cdots \subset \mathcal{H}(X^k \times \Omega) \subset \cdots \subset \mathcal{H}^{(-\ell)}(X^k \times \Omega) \subset \mathcal{H}^{(-\ell-1)}(X^k \times \Omega) \subset \cdots$$

で、$\mathcal{H}^{(\infty)}(X^k \times \Omega)$ の dual space

$$\mathcal{H}^{(-\infty)}(X^k \times \Omega) = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{H}^{(-\ell)}(X^k \times \Omega)$$

となることはよく知られている。また，定義より，

$$\|H\|_{\mathcal{H}^{(-\ell)}(X^k \times \Omega)} = \sup_{\|F\|_{\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k \times \Omega)} = 1} \langle H, F \rangle .$$

ここで $\langle H, F \rangle$ は duality に関する bilinear form で，$H \in \mathcal{H}(X^k \times \Omega)$ ならば明かに

$$\langle H, F \rangle = (H, F)_{\mathcal{H}(X^k \times \Omega)} .$$

2. $F \in \mathcal{H}(X \times \Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ とする。$\mathcal{D} : \mathcal{H}^{(1)}(\Omega) \to \mathcal{H}(X \times \Omega)$ は cont. linear だから $G \longmapsto (F, \mathcal{D}G)_{\mathcal{H}(X \times \Omega)}$ は $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ 上の cont. linear functional となる。従って

$${}^{\exists} H \in \mathcal{H}^{(-1)}(\Omega) : (F, \mathfrak{D}G)_{\mathcal{H}(X\times\Omega)} = \langle H, G \rangle,$$

即ち, ${}^{\exists}$ cont. linear op. $J : \mathcal{H}(X\times\Omega) \to \mathcal{H}^{(-1)}(\Omega)$ s.t.

$$(F, \mathfrak{D}G)_{\mathcal{H}(X\times\Omega)} = \langle JF, G \rangle, \quad \forall G \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega).$$

この JF のことを E.I.I. と呼び, $\dot{\int} F(x)W(dx)$ とも表わす。ここで §3 で用いたのと同じ記号を使うことは次の Prop. により正当化される.

<u>Prop.</u> $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ に対しては, 上で定義した E.I.I. と §3 で定義したものは一致する。

3. Ito 積分との関連について述べる。$X = [0,1]$, $\mathfrak{X} = \mathcal{B}([0,1])$ $\mu(dx) = dx$ とする。即ち W は 1次元 B.M. $\{B(x) ; 0 \leq x \leq 1\}$ から導かれるものとする。$\mathcal{F}_x = \sigma\{B(y) ; 0 \leq y \leq x\}$ とおく。

<u>Prop.</u> $F \in \mathcal{H}(X\times\Omega)$ が $\mathcal{F}_x$-adapted ならば $\dot{\int} F(x)W(dx)$ は通常の Ito 積分 $\int_0^1 F(x)dB(x)$ と一致する。

従って, $\dot{\int}_a^b F(x)W(dx) = \dot{\int} 1_{(a,b]}(x)F(x)W(dx)$ に対しても

$$\dot{\int}_a^b F(x)W(dx) = \int_a^b F(x)dB(x)$$

が成り立つ。

§5.1.Th. において $\xi : \mathcal{F}_0$-adapted, $F, G : \mathcal{F}_x$-adapted とする。このとき (☆) において右辺の最終項 $= 0$ となることは容易に示すことができる。従ってこの場合 (☆) は通常の Ito の公式に他ならないことがわかる。

REFERENCES

[1] Yu.Daletskii and S.N.Paramonova, Stochastic integrals with respect to a normally distribted additive set function, Soviet Math. Dokl.,14(1973),96-99.

[2] Yu.Daletskii and S.N.Paramonova, On a formula from the theory of Gaussian measures and on the estimation of stochastic integrals, Theory Prob. Appl.,19(1974),812-817.

[3] M.Hitsuda, Formula for Brownian partial derivatives, Second Japan-USSR symposium on probability theory,Kyoto,(1972), 111-114.

[4] K.Ito, Multiple Wiener integral, J.Math.Soc.Japan,3(1951), 157-169.

[5] S.Ogawa, Quelques proprietes de l'integrale stochastique du type noncausal,(to appear in Japan J. Appl. Math.)

[6] A.Ju.Seveljakov, Stochastic differentiation and integration of functinals of a Wiener process, Teor. Slucainyh Processov,6(1978),123-131.

[7] A.Ju.Seveljakov, The Ito formula for the extended stochastic integral, Theory Prob. and Statist.,22(1981),163-174.

[8] A.V.Skorokhod, On a generalization of a stochastic integral, Theory Prob. Apll.,20(1975),219-233.

[9] M.A.Berger and V.J.Mizel, Theorems of Fubini type for iterated stochastic integrals, Bull.Amer.Math.Soc.,252(1979),249-274.

[10] M.A.Berger and V.J.Mizel, An extention of the stochastic integrals, Ann.of Prob.,10(1982),435-450.