数理解析研究所講究録
第527巻 1984年 44-54

Noncausal 確率積分の L^2-理論 (II)

富山大·理 関口 健 (Takeshi Sekiguchi)
秋田大·教育 塩田安信 (Yasunobu Shiota)

(I)において，主にE.I.I.について紹介した。ここでは，(I)で得た結果を$*$-積分に応用する。(I)§3.6.Th.によれば，E.I.I.は$L^2(X)$のCONS$\{\varphi_n\}$に依存しない，しかし，$*$-積分は明らかに$\{\varphi_n\}$に，その順序にも，依存している。このことを明確にするために，$\{\varphi_n\}$に関する$*$-積分をJ_φ^*と記す，すなわち，$F\in\mathcal{L}^0(X\times\Omega)$に対し

(1) $$J_\varphi^* F = \lim_{n\to\infty}\int F(x)\int k_n^\varphi(x,y)W(dy)\,\mu(dx) \quad \text{in prob.},$$

ここで $k_n^\varphi(x,y)=\sum_{j=0}^{n}\varphi_j(x)\varphi_j(y)$。またJ$_\varphi^*F$が存在するとき，$F$は$\varphi$-integrableという。更に，すべてのCONS$\{\varphi_n\}$に対しφ-integrableで，J_φ^*Fがすべて一致するとき，Fはuniversally integrableという。

E.I.I.の理論を$*$-積分に応用する場合，(I)§4.2.Th.，すなわち，"$F\in\mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$が$\varphi$-integrableとなるための必要十分条件は，

(2) $$\lim_{n\to\infty}\iint(\mathcal{D}F)(x,y)\,k_n^\varphi(x,y)\,\mu(dx)\,\mu(dy) \quad \text{in prob.}$$

が存在することであり，このとき

(3) $\quad J^*_\varphi F = JF + \lim_{n\to\infty} \iint (\mathcal{D}F)(x,y)\, k^\varphi_n(x,y)\, \mu(dx)\, \mu(dy)$

が成りたつ。" が基本となる。

§1. Universal integrable に関する注意

先ず適当な CONS $\{\varphi_n\}$ について φ-integrable になるが，universally integrable とならない random function F の例を与える。

$X = [0,1]$，$\mu(dx) = dx$ とし，$0<\alpha<1$ に対し

$$g(x,y) = \begin{cases} 1_{[0,\, x+\alpha]}(y) & , \quad 0 \le x < 1-\alpha \\ 1_{[0,\, x+\alpha-1]}(y) & , \quad 1-\alpha \le x \le 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^1 g(x,y)\, W(dy)$$

このとき，$\{\varphi_n\}$ として三角関数系，すなわち $\varphi_0 = 0$，$\varphi_{2k}(x) = \sqrt{2}\cos 2k\pi x$，$\varphi_{2k+1}(x) = \sqrt{2}\sin 2k\pi x$，$k \ge 1$，をとれば，$F$ は φ-integrable となるが，F は universally integrable でない。実際，

$$\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\, \varphi_n(x)\, \varphi_n(y)\, dx\, dy = \frac{\sin 2k\pi\alpha}{2k\pi} \quad , \quad n = 2k,\ k+1,\ k \ge 1,$$

に注意すれば，

$$(2) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi\alpha}{2k\pi} = 1-\alpha$$

となり，(I). §4. 2. Th. から，F は φ-integrable である。

しかし，上式の級数が条件収束だから，$\{\varphi_n\}$の順序を適当に変えたCONS $\{\psi_n\}$については，Fはψ-integrable とならない，すなわち F は universally integrable でない。

次の問は未解決である。

問題　すべてのCONS $\{\varphi_n\}$についてφ-integrableなFは universal integrableか，すなわち，$\mathcal{J}^*_\varphi F$ はすべて一致するか。

$*$-積分の定義(1)において，"in prob." を "in $L^2(\Omega)$" で置き換えると，上の問は肯定的に解かれる。　実際 $F \in \mathcal{H}^{(2)}(X\times\Omega)$ とし，すべてのCONS $\{\varphi_n\}$について，(1)が $L^2(\Omega)$で収束しているとする。　このことは，すべての$\{\varphi_n\}$について (2)が $L^2(\Omega)$で収束することと同値である。　いま $G \in L^2(\Omega)$ に対し，bilinear form

$$E\left[\iint (\mathcal{D}F)(x,y)\, f(x)\, g(y)\, \mu(dx)\, \mu(dy)\, G\right] \quad ,\ f, g \in L^2(X),$$

を考えれば，これは trace class となることが，上の条件から分る。　したがって，(2)は$\{\varphi_n\}$に依存せず，Fは universally integrable である。

§2　E. I. I. の不定積分の $*$-integrability

quasi-martingale は $*$-integrable で，その $*$-積分は

Stratonovich-Fisk の積分に一致することが, Ogawa により示されている。 ここでは, E.I.I. を用いて noncausal な場合にも類似の結果が成り立つことを示す。

以下 $X=[0,1]$, $\mu(dx)=dx$, $\{\varphi_n\}$ を $L^2([0,1])$ の CONS とし,

$$k^\varphi(x,y)=\sum_{j=0}^{n}\varphi_j(x)\varphi_j(y),\quad u_n^\varphi(x)=\int_0^x k_n^\varphi(x,y)\,dy$$

とおく。 先ずいくつかの補題を準備しておく。

Lem. 1 $G\in\mathcal{H}^{(2)}([0,1]\times\Omega)$ ならば

(4) $$\int_0^a dx\int_0^x(\mathscr{D}G)(z;z)W(dz)=\lim_{n\to\infty}\int_0^a dx\int_0^1\int_0^x(\mathscr{D}G)(z;y)W(dz)k_n^\varphi(x,y)\,dy\quad\text{in } L^2(\Omega),$$

ここで $0\le a\le 1$.

Proof. (I) §3. 3. Prop. 1. Cor. により

$$\int_0^a dx\int_0^x(\mathscr{D}G)(z;z)W(dz)=\int_0^a W(dz)\int_z^a(\mathscr{D}G)(z;z)\,dx,$$

$$\int_0^a dx\int_0^1\int_0^x(\mathscr{D}G)(z;y)W(dz)\,k_n^\varphi(x,y)\,dy=\int_0^a W(dz)\int_z^a dx\int_0^1(\mathscr{D}G)(z;y)k_n^\varphi(x,y)\,dy$$

だから, $H(z)=1_{[0,a]}(z)\int_z^a(\mathscr{D}G)(z;z)\,dx$, $H^{(n)}(z)=1_{[0,a]}(z)\int_z^a dx\int_0^1(\mathscr{D}G)(z;y)k_n^\varphi(x,y)\,dy$

とおくと, (I) §3. 1. Th. より, $H^{(n)}\to H$ in $\mathcal{H}^{(1)}([0,1]\times\Omega)$ を示せば (4) を得る。 Parseval の等式から $H^{(n)}\to H$ $dz\times dP$-a.e. であり, また $\{H^{(n)}(z)\}^2\le\int_0^1(\mathscr{D}G)^2(z;y)\,dy\in\mathcal{H}([0,1]\times\Omega)$ となるから, Lebesgue の収束定理より $H^{(n)}\to H$ in $\mathcal{H}([0,1]\times\Omega)$.

更に $(\mathscr{D}H)(z;u)=1_{[0,a]}(z)\int_z^a(\mathscr{D}^2G)(z;x,u)\,dx$,

$$(\mathscr{D}H^{(n)})(z;u)=1_{[0,a]}(z)\int_z^a dx\int_0^1(\mathscr{D}^2G)(z;y,u)k_n^\varphi(x,y)\,dy$$

に注意すれば，上と同様にして $\mathcal{D}H^{(n)} \to \mathcal{D}H$ in $\mathcal{H}([0,1]^2\times\Omega)$ が示せる。したがって $H^{(n)} \to H$ in $\mathcal{H}^{(1)}([0,1]\times\Omega)$. q. e. d.

Lem. 2 $H \in \mathcal{H}^{(3)}([0,1]\times\Omega)$ に対し，$G(x) = \int_0^{x} H(y) W(dy)$ とおけば，$G \in \mathcal{H}^{(2)}([0,1]\times\Omega)$ であり，

(5) $$\frac{1}{2}\int_0^a G(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^a dx \int_0^x G(y)\, k_n^{\varphi}(x,y)\, dy \quad \text{in } L^2(\Omega),$$

ここで $0 \le a \le 1$.

Proof. (I) §3. 1. Th. より $G \in \mathcal{H}^{(2)}([0,1]\times\Omega)$ だから，(5) 式を示す。(I) §3. 3. Prop. 1. Cor. と $k_n^{\varphi}(x,y)$ の対称性から

$$\frac{1}{2}\int_0^a G(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a W(dz)\, H(z) \int_z^a dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^a dx \int_0^x G(y)\, k_n^{\varphi}(x,y)\, dy &= \int_0^a W(dz) H(z) \int_z^a dy \int_y^a k_n^{\varphi}(x,y)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a W(dz) H(z) \int_z^a dy \int_z^a k_n^{\varphi}(x,y)\,dx.\end{aligned}$$

ここで，z について一様に $\int_z^a dy \int_z^a k_n^{\varphi}(x,y)\,dx \to \int_z^a dx$ だから

$1_{[0,a]}(z) H(z) \int_z^a dy \int_z^a k_n^{\varphi}(x,y)\,dx \longrightarrow 1_{[0,a]}(z) H(z) \int_z^a dx$ in $\mathcal{H}^{(1)}([0,1]\times\Omega)$.

したがって，(I) §3. 1. Th. より (5) を得る。q. e. d.

Lem. 3 (Ogawa) $\{u_n^{\varphi}\}$ が $L^2([0,1])$ で強有界となることと，すべての $g \in L^2([0,1])$ に対し

(6) $$\frac{1}{2}\int_0^1 g(y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 dx \int_0^x g(y)\, k_n^{\varphi}(x,y)\, dy$$

となることは同値である。

Lem. 3 から，次の系を得る。

Cor. $\{u_n^\varphi\}$ が $L^2([0,1])$ で強有界ならば，$G \in \mathcal{H}([0,1]\times\Omega)$ に対し (5) が成り立つ。

以上の準備から，次の結果を得る。

Th. (i) $H \in \mathcal{H}^{(3)}([0,1]\times\Omega)$ に対し，$G(x) = \int_0^x H(y)W(dy)$ とおけば，$F(x) = \int_0^x G(y)W(dy)$ は universally integrable で，

(7) $$\int_0^{*a} F(x)W(dx) = \int_0^a F(x)W(dx) + \frac{1}{2}\int_0^a G(x)dx + \int_0^a dx\int_0^x (\mathcal{D}G)(y;x)W(dy)$$

をみたす。ここで $0 \leq a \leq 1$.

(ii) $\{u_n^\varphi\}$ が $L^2([0,1])$ で強有界ならば，$G \in \mathcal{H}^{(2)}([0,1]\times\Omega)$ に対し $F(x) = \int_0^x G(y)W(dy)$ は φ-integrable で，(7) をみたす。

(iii) $G \in \mathcal{H}^{(2)}([0,1]\times\Omega)$ で，$x \mapsto G(x)$ が a.s. に有界変分をもつならば，$F(x) = \int_0^x G(y)W(dy)$ は universally integrable で (7) をみたす。

Proof. (i),(ii),(iii) いずれの場合も，(I) §3. 1. Th., §3. 3. Prop. 2 により，$F \in \mathcal{H}^{(1)}([0,1]\times\Omega)$ であり，

$$(\mathcal{D}F)(x;y) = 1_{[0,x]}(y)G(y) + \int_0^x (\mathcal{D}G)(z;y)W(dz)$$

をみたす。 したがって (I) §4. 2. Th. から，(4) 式と (5) 式を示せば，証明は完了する。 このことは，(i), (ii) については，Lem. 1. Lem. 2. Lem. 3. Cor. ですでに示された。また (iii) については，有界変分関数 g に対し，$\{\varphi_n\}$ の条件なしに (6) が成り立つことに注意すればよい。 q. e. d.

G が causal，すなわち $\mathcal{B}_x = \sigma(\int_0^y W(dz) : 0 \leq y \leq x)$ に adapted，である場合，$\int_0^a dx \int_0^x (\mathcal{D}G)(y;x)\, W(dy) = 0$ となり，上の定理は Ogawa の結果と一致する。 しかし，causal な $G \in \mathcal{H}([0,1]\times\Omega)$ についても Ogawa の結果は正しい。 次に示すように，causal な $G \in \mathcal{H}([0,1]\times\Omega)$ で $G \notin \mathcal{H}^{(1)}([0,1]\times\Omega)$ となるものが存在するから，上の定理は Ogawa の結果を完全に含んではいない。

例. τ を定数でない $\mathcal{B}_x$ に関する stopping time とする。 このとき，$G(x,\omega) = 1_{\{\tau \geq x\}}(\omega)$ は causal で $\mathcal{H}([0,1]\times\Omega)$ に属するが，$\mathcal{H}^{(1)}([0,1]\times\Omega)$ には属さない。

上の例は，次の一般的な補題から明らかである。

Lem. 4 $\Lambda \in \mathcal{F}$ に対し，$1_\Lambda \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ ならば，$P(\Lambda)$

0または1である。

Proof. (I) §2.8. Cor.1 より $(\mathcal{D}1_\Lambda)(x) = (\mathcal{D}1_\Lambda^2)(x) = 2\,1_\Lambda(\mathcal{D}1_\Lambda)(x)$ だから、$\mathcal{D}1_\Lambda = 0$ on $X\times\Lambda^c$ $\mu\times P$-a.e. また $\mathcal{D}1_\Lambda = \mathcal{D}(1-1_{\Lambda^c}) = -\mathcal{D}1_{\Lambda^c} = 0$ on $X\times\Lambda$ $\mu\times P$-a.e. したがって $\mathcal{D}1_\Lambda = 0$ $\mu\times P$-a.e. となり、1_Λ は a.s. に定数、すなわち $P(\Lambda) = 0$ または 1. q. e. d.

最後に causal な random function の注目すべき性質を述べておく。

Prop. $G\in\mathcal{H}([0,1]\times\Omega)$ が causal ならば、$\widehat{G}\in\mathcal{H}^{(1)}([0,1]\times\Omega)$, $\widehat{1_{[0,x]}(y)\,G(y)}\in\mathcal{H}^{(2)}([0,1]^2\times\Omega)$, $\widehat{1_{[0,x]}(y)\,1_{[0,y]}(z)\,G(z)}\in\mathcal{H}^{(3)}([0,1]^3\times\Omega)$, …等が成り立つ。

Proof. $G(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\overbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}^{p} g_p(x;x_1,\cdots,x_p)\,W(dx_1)\cdots W(dx_p)$ とすると、G が causal であることから、

$g_p(x;x_1,\cdots,x_p) = 0$ if $x_i > x$ for some $i=1,\cdots,p$,

としてよい。このとき

$\widehat{g}_p(x_1,x_2,\cdots,x_{p+1}) = \frac{1}{p+1}\,g_p(x_1;x_2,\cdots,x_{p+1})$ for $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_{p+1}$,

に注意すれば、

$$\overbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}^{p} \hat{g}_p^2(x_1, \cdots x_{p+1})\, dx_1 \cdots dx_{p+1} = \frac{1}{p+1} \overbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}^{p} g_p(x_1, x_2, \cdots x_{p+1})\, dx_1 \cdots dx_{p+1}$$

となる。したがって $\|G\|_{\mathcal{H}([0,1]\times\Omega)} = \|\hat{G}\|_{\mathcal{H}^{(1)}([0,1]\times\Omega)}$, すなわち $\hat{G} \in \mathcal{H}^{(1)}([0,1]\times\Omega)$ を得る。その他のものについても同様に示せる。 q. e. d.

§3 *-積分の定義について

以下 $k_n(x,y) \in L^2(X^2)$, $n = 0, 1, \cdots$, は

$$(8) \quad \begin{cases} \left\| \int k_n(x,y) f(y) \mu(dy) \right\|_{L^2(X)} \leq C \|f\|_{L^2(X)} \\ \int k_n(x,y) f(y) \mu(dy) \longrightarrow f(x) \quad \text{in } L^2(X) \end{cases}, \quad f \in L^2(X),$$

をみたすものとする。ここで C は f に無関係な定数とする。CONS $\{\varphi_n\}$ から定義される $\{k_n^\varphi\}$ は (8) をみたすことは明らか。さて *-積分の定義を, $F \in \mathcal{L}^0(X\times\Omega)$ に対し

$$(9) \quad \mathcal{J}_k^* F = \lim_{n\to\infty} \int F(x) \int k_n(x,y) W(dy) \mu(dx) \quad \text{in prob.}$$

と拡張しておく。前と同様に $\mathcal{J}_k^* F$ が存在するとき, F は k-integrable という。このとき, (I) §3. 6. Th., §4. 2. Th. は全く同じ証明で, 次のように拡張される。

Th. 1 $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ ならば

$$(10) \quad \dot{\int} F(x) W(dx) = \lim_{n\to\infty} \int F(x) \hat{\otimes} \int k_n(x,y) W(dy) \mu(dx) \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Th. 2. $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ が k-integrable となるための

必要十分条件は，

(11) $\lim_{n\to\infty} \iint (\mathcal{D}F)(x,y)\, k_n(x,y)\, \mu(dx)\, \mu(dy)$ in prob.

が存在することであり，このとき

(12) $J_k^* F = \mathcal{J} F + \lim_{n\to\infty} \iint (\mathcal{D}F)(x,y)\, k_n(x,y)\, \mu(dx)\, \mu(dy)$

が成り立つ。

すべての $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ に対して，(11)が 0 となる $\{k_n\}$ は存在しないから，次の系を得る。

Cor. E. I. I. $\mathcal{J}$ は $*$-積分 J_k^* の型の積分ではない。

$\{k_n\}$ を適当に選び，causal な F に対し $\mathcal{J}F = J_k^* F$ となるようにすることは，通常の Ito 積分の定義から容易に分る。実際，$X=[0,1]$，$\mu(dx)=dx$ とするとき，$k_n(x,y) = \sum_{j=1}^{2^n-1} 2^n 1_{I_j}(x)\, 1_{I_{j+1}}(y)$，$I_j = (\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$，$j=1,\cdots,2^n$，とおけば，Th. 2. からも明らかである。Berger-Mizel は，$F'(x) = \lim_{y\downarrow x} (\mathcal{D}F)(x;y)$ が存在するとき，$\bar{\int} F(x)\, dB(x) = \dot{\int} F(x)\, W(dx) + \int F'(x)\, dx$ による積分を定義しているが，これは上の $\{k_n\}$ から定義される J_k^* に外ならない。

上の注意からも分るように，$\{k_n\}$ を一般化したことにより，J_k^* は Stratonovich-Fisk 積分の拡張とは限らなく

なった。 言換えれば，§2の結果は成り立つとは限らない。しかし，(8)に $k_n(x,y)$ の対称性を加えれば，§2の結果はそのまま成り立つ。

(I) §6. におけるように，*duality* を用いて $F\in\mathcal{H}^{(-\infty)}(X\times\Omega)$ に *-積分を拡張し，これまでの結果の類似を得ることは易しい。 しかし，その効用には疑問の余地がある。