数理解析研究所講究録
第 527 巻 1984 年 55-67

確率微分方程式の解の合流・非合流問題と解の逐次近似をめぐる3話題

九州大工学部　山田俊雄　（Toshio Yamada）

(I)　解の合流・非合流について。

常微分方程式の場合と大きく事情が異なって，確率微分方程式（以下，SDEと略記する）においては，解のpathwiseの一意性がなりたつことは解が非合流であることを保障しない。以下にその事情を示す定理と例をのべよう。

定理.

(i)　$\sigma(t,x)$; $[0,\infty)\times R \to R$ を (t,x) について連続で

$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq \rho(|x-y|)$，$x,y\in R$，$t\geq 0$ をみたすとする。こゝに ρ は $\rho(0)=0$ で非負，$u\in[0,\infty)$ で非減少

$$\int_0^1\int_x^1 \frac{dy}{\rho^2(y)}\,dx = \int_0^1 \frac{y}{\rho^2(y)}\,dy = +\infty$$ を満足する関数である。

(ii)　$b(t,x)$，$[0,\infty)\times R \to R$ を (t,x) について連続で　$|b(t,x)-b(t,y)| \leq \kappa(|x-y|)$，$x,y\in R$，$t\geq 0$

をみたすとする。ここに $K(u)$ は $[0,\infty)$ 上の関数で $K(0)=0$，非減少 $\lim_{x\downarrow 0}\left[\sup_{x\le y\le 1} K(y)\int_y^1 \frac{du}{\rho^2(u)} \Big/ \int_x^1\int_y^1 \frac{du}{\rho^2(u)}dy\right]$ $=0$ を満足している。

さて $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ を通常の（増大する σ-加法族 $\mathcal{F}_t$ をもつ）確率空間としておこう。この空間上に

(a) ξ, η を $\mathcal{F}_0$- 可測な確率変数

(b) $x(t,\eta)$, $x(t,\xi)$ を $\mathcal{F}_t$- 可測な確率過程,

(c) B_t は $\mathcal{F}_t$- Brown 運動で $B_0\equiv 0$.

を与え，それらが

$$x(t,\xi)=\xi+\int_0^t \sigma(s,x(s,\xi))dB_s+\int_0^t b(s,x(s,\xi))ds$$

a.s. $(0\le t<\zeta_1)$

$$x(t,\eta)=\eta+\int_0^t \sigma(s,x(s,\eta))dB_s+\int_0^t b(s,x(s,\eta))ds$$

a.s. $(0\le t<\zeta_2)$ をみたしていると仮定する。

ここに $\zeta_1=\sup\{t;\ \sup_{s\in[0,t]}|x(s,\xi)|<+\infty\}$

$\zeta_2=\sup\{t;\ \sup_{s\in[0,t]}|x(s,\eta)|<+\infty\}$.

このとき，もし $\xi(\omega)<\eta(\omega)$ a.s. ならば

$$P(x(t,\xi)<x(t,\eta),\ 0\le t<\zeta)=1$$ がなりたつ。ここに $\zeta=\zeta_1\wedge\zeta_2$. ◢

（注意） (i), (ii) の条件をみたす ρ, K の例として，

(A) $\rho(u)=Ku$, $K(u)=Ku$,（Kは定数）

(B) $\rho(u) = Ku(\log\frac{1}{u})^{1/2}$, $K(u) = Ku(\log\frac{1}{u})$

等がある (A) は σ, 及び b が Lipschitz 条件をみたすことを意味している。◀

[定理の証明] いくつかの段階に分けて証明を与える。 (1°) $1 < L < +\infty$ として $\Omega_L = \{\omega : \frac{1}{L} \le \eta(\omega) - \xi(\omega) \le L\}$ とおく。$\Omega_L \in \mathcal{F}_0$, $P(\Omega_L) \uparrow +\infty$ $(L \to \infty)$ であることは明らか。$\tilde{\sigma}_L = \sup\{t : \sup_{s\in[0,t]} |x(s,\xi)| < L$, $\sup_{s\in[0,t]} |x(s,\eta)| < L\}$ とおくと, $\tilde{\sigma}_L \uparrow \zeta$ $(L \to \infty)$.

$$\sigma_{\frac{1}{m}} = \inf\{0<t<\zeta : x(t,\eta) - x(t,\xi) \le \frac{1}{m}\}$$

(こゝで $\inf(\phi) = \zeta$ とおく)

$$\tau = \inf\{0<t<\zeta ; x(t,\eta) - x(t,\xi) = 0\}$$

(こゝで $\inf(\phi) = \zeta$). とおく. $x(t,\eta) - x(t,\xi)$ が t について連続で $x(0,\eta) - x(0,\xi) = \eta - \xi > 0$. であることより $\sigma_{\frac{1}{m}} \uparrow \tau$ $(m \to \infty)$ が $\{\tau < \zeta\}$ でなりたっている。

(2°) $\phi(x) = \int_x^1 \int_y^1 \frac{du}{\rho^2(u)} dy$ とおく, $x \in (0,\infty)$

$\phi(x)$ は C^2-関数 $x \downarrow 0$ で $\phi(x) \uparrow +\infty$.

$\tilde{t} = t \wedge \sigma_{\frac{1}{m}} \wedge \tilde{\sigma}_L$ とおく. $0 \le t \le \tilde{t}$ で $x(t,\eta) \neq x(t,\xi)$ であるから Itô 公式を用いると

$$\phi(x(\tilde{t},\eta) - x(\tilde{t},\xi)) = \phi(\eta - \xi) +$$

$$+ \int_0^{\tilde{t}} \phi'(x(s,\eta)-x(s,\xi))\{\sigma(s,x(s,\eta))-\sigma(s,x(s,\xi))\}dB_s$$
$$+ \int_0^{\tilde{t}} \phi'(x(s,\eta)-x(s,\xi))\{b(s,x(s,\eta))-b(s,x(s,\xi))\}ds$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\tilde{t}} \phi''(x(s,\eta)-x(s,\xi))\{\sigma(s,x(s,\eta))-\sigma(s,x(s,\xi))\}^2 ds$$
$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ とおく。

$\phi(x)$ は $(0,1]$ で単調減少, $[1,\infty)$ で単調増加であることに注意する。 $L>1$ としよう。

I_1 について $E[I_1, \Omega_L] \leq \phi(\frac{1}{L}) + \phi(L)$.

I_2 は Martingale であるから $E[I_2, \Omega_L] = 0$.

I_3 について, $[1,\infty)$ で $|\phi'(x)| = |\int_x^1 \frac{du}{\rho^2(u)}|$ は単調増加であることに注意すると (ii) の条件によって

$$E[|I_3|, \Omega_L] \leq E[\int_0^{\tilde{t}} |\phi'(x(s,\eta)-x(s,\xi))| K(x(s,\eta)-x(s,\xi))ds, \Omega_L]$$
$$= t\{\phi'(2L)K(2L) + \sup_{\frac{1}{m}\leq x\leq 1}|\phi'(x)K(x)|\}.$$

I_4 について $\phi''(x) = 1/\rho^2(x)$ に注意して

$$E[I_4, \Omega_L] \leq E[\int_0^{\tilde{t}} \phi''(x(s,\eta)-x(s,\xi))\rho^2(x(s,\eta)-x(s,\xi))ds, \Omega_L] \leq E[\int_0^{\tilde{t}} \rho^2(x(s,\eta)-x(s,\xi))/\rho^2(x(s,\eta)-x(s,\xi))ds] \leq t.$$

以上, $I_1 \sim I_4$ についての評価により, L と t のみに関係するある定数, $K(L,t) < +\infty$ が存在して

$$E[\phi(x(\tilde{t},\eta)-x(\tilde{t},\xi))] \leq K(L,t) + t\sup_{\frac{1}{m}\leq x\leq 1}|\phi'(x)K(x)|$$ を得る。

さてLを固定して $L \le m$ とする $\sigma_{\frac{1}{m}} < t \wedge \tilde{\sigma}_L$ では

$\phi(x(\tilde{t},\eta) - x(\tilde{t},\xi)) = \phi(\frac{1}{m})$ に注意すると.

$$E[\phi(\tfrac{1}{m}) : \sigma_{\frac{1}{m}} < t \wedge \tilde{\sigma}_L ,\ \Omega_L] \le E[\phi(x(\tilde{t},\eta) - x(\tilde{t},\xi)) : \Omega_L]$$

より $P(\sigma_{\frac{1}{m}} < t \wedge \tilde{\sigma}_L ; \Omega_L)$

$$\le \Big\{ K(L.T) + t \sup_{\frac{1}{m} \le x \le 1} |\phi'(x) K(x)| \Big\} \Big/ \phi(\tfrac{1}{m})$$

$$= \frac{K(L.T)}{\phi(\frac{1}{m})} + t \Big\{ \sup_{\frac{1}{m} \le x \le 1} K(x) \int_x^1 \frac{du}{\rho^2(u)} \Big/ \int_{\frac{1}{m}}^1 \int_x^1 \frac{du}{\rho^2(u)}\, dx \Big\}.$$

こゝで $m \uparrow \infty$ とすると (ii) に注意して

$P(\tau < t \wedge \tilde{\sigma}_L : \Omega_L) = 0$.を得る.

これより $L \uparrow \infty$,ついで $t \uparrow +\infty$ として.

$P(\tau < \zeta) = 0$. すなわち

$P(x(t,\xi) < x(t,\eta) : 0 \le t < \zeta) = 1$.が得られた. 証明終了 ▲

注 1. ρ についての $\int_x^1 \int_y^1 \frac{du}{\rho^2(u)}\, dy = +\infty$ の条件はある意味で最良の条件である.

$\sigma(t.x) = \rho(x).$ $b(t.x) \equiv 0$ としよう

$\rho(0) = 0$, $(-\infty.\ 0)$ で単調非増加, $(0.\infty)$ で非減少.

今 $\int_0^1 \frac{du}{\rho^2(u)} = \infty$, $\int_{-1}^0 \frac{du}{\rho^2(u)} = +\infty$ を仮定すると

$dX_t = \rho(X_t)\, dB_t$ に対して Pathwise 一意性がなりたつことは,よく知られている.

こゝで $\xi \equiv 0$, $\eta = a$ $(a>0)$ としよう.

(*) $x(t.\xi) = \int_0^t \rho(x(s.\xi))dB_s$ $x(0.\xi) = \xi = 0$

(**) $x(t.\eta) = \int_0^t \rho(x(s.\eta))dB_s$ $x(0.\eta) = \eta = a > 0$

$x(t.\xi) \equiv 0$ $x(t.\eta)$ を比較しよう.

ρ に対して 更に $\int_x^1 \int_y^1 \frac{du}{\rho^2(u)} dy = +\infty$

であれば $x(t.\xi) < x(t.\eta)$ がなりたっている.

ところが $\int_x^1 \int_y^1 \frac{du}{\rho^2(u)} dy < +\infty$ であるとき

$$x(t,x) = x + \int_0^t \rho(x(s.x))dB_s \quad x(0.x) = x$$

をdiffusionとみるとき (Generator は $\frac{1}{2}\rho^2(x)\frac{d^2}{dx^2}$)

$x=0$ は accessible であるので $x(t.a)$ は $x(t.0)$ に合流する. (i.e $x(t.a) > 0$ が保障されない).

このように解について pathwise の一意性は必らずしも解の非合流を保障しない▲

注2 多次元のSDEについては, 係数に Lipshitz 条件を仮定すると, 解の非合流性がなりたつことが分っている. 詳しくは文献 (1) を参照されたい.

[II] SDEの解の逐次近似について.

係数に Lipschitz 条件が仮定されているとき, 逐次近似

法は、解の存在，及び一意性を証明するための極めて有効で強力な手段である． ところで常微分方程式論では，解の存在と一意性が保障されているのに，逐次近似法では解を求めることのできない例がある． このために，1940年代，50年代初頭にかけて，逐次近似（Picard 近似）の成立を保障するための十分条件が色々提出されている． SDEに於ても，係数が Non-Lipschitz の場合に解の存在，一意性の成立のための十分条件は数多く提案されているが，それらの場合に逐次近似が有効か，否かについての研究はほとんどなされていないようである．以下にのべる定理は，この問題に対する解答の試みである。

$\sigma(t,x)$，$b(t,x)$ は $[0,\infty)\times R^1$ 上の実数値関数．

（条件 A） $|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|^2+|b(t,x)-b(t,y)|^2$

$$\leq K(|x-y|^2) \qquad x,y\in R^1,\ t\geq 0.$$

こゝに $K(u)$ は $[0,\infty)$ 上の単調非減少関数で

$K(0)=0$， $\displaystyle\int_{0+}\frac{du}{K(u)}=+\infty$ をみたす concave な関数とする ▲

注 2.1 $|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq\rho(|x-y|)$

$$|b(t,x)-b(t,y)|\leq\rho(|x-y|)$$

の形で σ，b に条件をつけたとき，例として，

$\rho(u) = Cu$ (Lipschitz条件)； $\rho(u) = Cu(\log\frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}$；
$\rho(u) = Cu(\log\frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}(\log_{(2)}\frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}$ ；… 等の場合は
条件(A)がみたされている

.

SDE $\quad dx_t = \sigma(t, x(t))dB_t + b(t, x(t))dt$
を考える、 条件(A)によって、このSDEに対して Path-wise の解の一意性が保障される．（(2)を参照）

さて 逐次近似解 $x_0(t) \equiv \xi$,
$$x_k(t) = \xi + \int_0^t \sigma(s, x_{k-1}(s))dB_s + \int_0^t b(s, x_{k-1}(s))ds,$$
$k = 1, 2, \cdots$ としよう．

$x(t)$ を $\quad x(t) = \xi + \int_0^t \sigma(s, x(s))dB_s + \int_0^t b(s, x(s))ds$
とする、このとき次の定理がなりたつ．

定理 $[0, T]$ を任意の有界区間とする．条件(A)及び $E[|\xi|^2] < +\infty$ の下で
$$\lim_{n\to\infty} E[\sup_{0\le t\le T} |x_n(t) - x(t)|^2] = 0$$ がなりたつ．

（証明） 本質的な部分に限ってのべよう．

（イ） 条件から次のことが簡単に分る

定数 $K_1 > 0$, $K > 0$, $C > 0$ で次の性質をもつものがある．

$$|\sigma(t,x)|^2+|b(t,x)|^2 \leq K(1+x^2)$$

$E[|x_k(t)|^2] \leq K_1(1+E[|\xi|^2])$ （K_1 は k に無関係） $E[\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)-x(0)|^2] \leq Ct$.

$K_1(u) = 8TK(u)$ とおいて $0 < T_1 \leq T$ を

$K_1(Ct) \leq C$, $t\in[0,T_1]$ がなりたつように選んでおく.

(2°) $[0,T_1]$ で定理の主張がなりたつことを示そう

$$\phi_0(t) = Ct,$$

$$\phi_k(t) = \int_0^t K_1(\phi_{k-1}(s))ds, \quad k=1,2,\cdots$$

$$\tilde{\Phi}_k(t) = E[\sup_{0\leq s\leq t}|x_k(s)-x(s)|^2] \quad k=0,1,2\cdots$$

とおく. このとき 次の lemma がなりたつ.

<u>lemma</u> : $k=0,1,2,\cdots$ に対し

$$0 \leq \tilde{\Phi}_k(t) \leq \phi_k(t) \leq \phi_{k-1}(t) \leq \cdots \leq \phi_1(t) \leq \phi_0(t)$$

$t\in[0,T_1]$ がなりたつ.

(lemma の証明)

$k=0$ のとき

$$\tilde{\Phi}_0(t) = E[\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)-x(0)|^2] \leq Ct = \phi_0(t)$$

だからなりたっている.

$k=1$ のとき

$$\widetilde{\Phi}_1(t) = E[\sup_{0\le s\le t} |x_1(s) - x(s)|^2]$$
$$\le 2E[\sup_{0\le s\le t} |\int_0^s \{\sigma(u, x_0(u)) - \sigma(u, x(u))\} dB_u|^2]$$
$$+ 2E[\sup_{0\le s\le t} |\int_0^s \{b(u, x_0(u)) - b(u, x(u))\} du|^2]$$

Martingale 不等式と Schwarz の不等式を用いて，

$$\widetilde{\Phi}(t) \le 8E[|\int_0^t \{\sigma(s, x_0(s)) - \sigma(s, x(s))\} dB_s|^2]$$
$$+ 2E[t\int_0^t |b(s, x_0(s)) - b(s, x(s))|^2 ds]$$
$$\le 8TE[\int_0^t \{|\sigma(s, x_0(s)) - \sigma(s, x(s))|^2 + |b(s, x_0(s)) -$$
$$b(s, x(s))|^2\} ds]$$ ここで (A) を用いて
$$\le 8TE[\int_0^t K(|x_0(s) - x(s)|^2) ds]$$
$$= E[\int_0^t K_1(|x_0(s) - x(s)|^2) ds]$$
$$\le \int_0^t K_1(E[|x_0(s) - x(s)|^2]) ds \quad (\because K_1 \text{ concave})$$

ここで $E[|x_0(s) - x(s)|^2] \le \widetilde{\Phi}_0(s) \le \phi_0(s) = Cs$

($k=0$ での結果）を用いると，K_1，非減少より

$$\widetilde{\Phi}_1(t) \le \int_0^t K_1(\widetilde{\Phi}_0(s)) ds \le \int_0^t K_1(\phi_0(s)) ds = \phi_1(t).$$

ここで $K_1(Ct) \le C \quad t \in [0, T_1]$ を用いると

$$\phi_1(t) = \int_0^t K_1(\phi_0(s)) ds = \int_0^t K_1(Cs) ds \le Ct = \phi_0(t).$$

よって $\widetilde{\Phi}_1(t) \le \phi_1(t) \le \phi_0(t) \quad t \in [0, T_1].$

さて lemma が k についてなりたっているとしよう．$k+1$ について，$\tilde{\Phi}_{k+1}(t) = E[\sup_{0\le s\le t}|x_{k+1}(s)-x(s)|^2]$

$$\le 8TE[\int_0^t \{|\sigma(s,x_k(s))-\sigma(s,x(s))|^2+|b(s,x_k(s))-b(s,x(s))|^2\}ds]$$

$$\le E[\int_0^t K_1(|x_k(s)-x(s)|^2)\,ds \le \int_0^t K_1(E[|x_k(s)-x(s)|^2])ds$$

が先とほゞ同じ計算でなりたつ．

こゝで $E[|x_k(s)-x(s)|^2] \le \tilde{\phi}_k(s)$ と lemma が k までなりたっていることに留意すると K_1 非減少 によって

$$\tilde{\phi}_{k+1}(t) \le \int_0^t K_1(\tilde{\phi}_k(s))\,ds \le \int_0^t K_1(\phi_k(s))\,ds$$

$$= \phi_{k+1}(t) \le \int_0^t K_1(\phi_{k-1}(s))\,ds = \phi_k(t).$$

よって lemma は $k+1$ に対してもなりたつ．lemma 証明了．

定理の証明をつゞけよう．

lemma によって $\phi_k(t)$ は k について単調非増加である

ので $\lim_{k\to\infty}\phi_k(t) = \phi(t)$ $t\in[0,T_1]$ とおく．

$\phi_k(t)$ は t の連続関数であるから $\phi(t)$ は連続で $\phi(0)=0$.

($\because$ $\phi_k(0)=0$, $k=0,1,2\cdots$)

$$\phi(t) = \lim_{k\to\infty}\phi_{k+1}(t) = \lim_{k\to\infty}\int_0^t K_1(\phi_k(s))\,ds$$

$$= \int_0^t K_1(\phi(s))\,ds$$ がなりたつ．

ところが $\int_{0+}\frac{du}{K_1(u)} = \infty$ と $\phi(0)=0$ より

$\phi(t)\equiv 0$，$t\in[0,T_1]$ がなりたつ．（何故なら，常微分方程式 $dy/dt = K_1(y)$，$y(0)=0$ は $\int_{0+}\frac{du}{K_1(u)}=+\infty$ の下では唯一つの解，$y(t)\equiv 0$ をもつ．Osgood の一意性条件）．そこで $0\le \lim_{k\to\infty} E[\sup_{0\le t\le T_1}|x_k(t)-x(t)|^2]$

$$= \lim_{k\to\infty}\tilde{\Phi}_k(T_1) \le \lim_{k\to\infty}\phi_k(T_1) = \phi(T_1)=0$$

によって，定理の主張は，$t\in[0,T_1]$ について確かめられた．あと $t\in[0,T]$ に対して定理の主張の成立を調べる必要があるが，この部分は技術的な複雑さはあるが，本質的なアイディアを必要とする部分ではないので省略する．（文献 (2) を参照のこと）▲

注2.2　条件 (A) を満足しない σ, b に対しても，SDE $dx_t=\sigma(t,x_t)dB_t + b(t,x_t)dt$ に解の pathwise の一意性がなりたつ場合が色々知られているが，それらについて逐次近似がなりたつかどうか，まったく研究されていない．例えば $dx_t = \sigma(t,x_t)dB_t + b(t,x_t)dt$，

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le C|x-y|^{\frac{1}{2}}$$

$$|b(t,x)-b(t,y)|\le C|x-y|,$$

の場合 解の pathwise の一意性がなりたつことがよく知られていて，典型的な具体例がいくつもこの type の方程式で記述される．（Bessel 過程，Pinned Brownian motion，集団遺伝学に出てくる拡散過程 など）ところが，この場合，逐次近似が成

り立つかどうか不明である。報告者は解の合流，非合流問題と解の逐次近似の成立，不成立の間に何らかの関連があるのではないかと空想している。

注 2.3　$dx_t = \sigma(t, x_t)dB_t + b(t \cdot x_t)dt$

において，解の pathwise の一意性がなりたっていて，しかも $\sigma(t \cdot x) \neq 0$，であるとき，逐次近似がなりたいない，具体例も知られていない。

注 2.4　定理は一次元の場合にのべたが（条件 A）の下では多次元でも解の逐次近似が保障される。三次元以上の場合，modulus of continuity（係数の）で条件を与える限り，（条件 A）は解の pathwise の一意性を保障する条件としてほぼ best possible と考えてよい。

文献

（1）Yamada, T., Ogura, Y. : On the strong comparison theorems for solutions of stochastic differential equations. Z. Wahr. 56, pp3-19. (1981)

（2）Yamada, T. : On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations. J. Math. Kyoto Univ. 21, No. 3, pp 501-515 (1981)