数理解析研究所講究録
第527巻 1984年 68-73



# フーリエ級数の概収束に関係した関数空間について

東北大 理 佐藤秀一 (Shuichi Sato)

§1. $T=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $f\in L^1(T)$ に対して $f$ のフーリエ級数の部分和を

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

とする. ここで

$$\hat{f}(k) = \int_T f(t) e^{-2\pi i k t} dt \quad (k\in\mathbb{Z})$$

である. $f\in L^p(T)$ $(1<p\leq\infty)$ ならば $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x)=f(x)$ a.e. が Carleson - Hunt の結果として知られている. しかし, $f\in L^1(T)$ で $S_n(f)(x)$ がすべての点で発散するものが存在することが Kolmogorov によって示されている. $L^1$ に近い関数空間でフーリエ級数の概収束するクラスとして P. Sjölin の $L\log^+L\log^+\log^+L$ が知られている. ここでは, フーリエ級数の概収束する $L^1$ に近い関数空間として, M. H. Taibleson と G. Weiss の $C_q$ クラスと R. Fefferman の $L^1(E)$ クラスについて述べる. さらに多変数への拡張についても

ふれる．

§2. $C_q$クラス． まず $1<q\leq\infty$ に対して関数空間 $B_q$ を定義する．

定義1（[5]）． $b\in L^q(T)$ とする． $b\in B_q$ とは区間 $I\ (\subset T)$ が存在して

(1) $\mathrm{supp}(b)\subset I$

(2) $\|b\|_q \leqq |I|^{\frac{1}{q}-1}\quad (q\neq\infty)$

$\|b\|_\infty \leqq |I|^{-1}\quad (q=\infty)$

が成立することである．

次に関数空間$C_q$を定義する． 複素数列 $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ に対して $N(\{m_k\})=\sum_1^\infty |m_k|\left(1+\log\frac{\sum_{\ell=1}^\infty |m_\ell|}{|m_k|}\right)$ とおく．

定義2（[5]）． $f\in L(T)$ とする． $f\in C_q\ (1<q\leq\infty)$ とは， 複素数列 $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ で $N(\{m_k\})<\infty$ なるものと $b_k\in B_q\ (k=1,2,3,\cdots)$ が存在して

$$f=\sum_{k=1}^\infty m_k b_k$$

とかけることである．

注意1． 定義からすぐわかるように $q_1\geq q_2$ ならば $C_{q_1}\subset C_{q_2}$ である．

注意2． 任意の $f\in L^1(T)$ はたとえば $f=\sum_k c_k b_k$, $b_k\in B_\infty$, $\sum|c_k|<\infty$ の形にかける． $C_\infty$ は条件

$\Sigma |c_k| < \infty$ を $N(\{c_k\}) < \infty$ と少し強くしたものである．

$S^*(f)(x) = \sup_k |S_k(f)(x)|$ とする．Taibleson-Weiss [5] は次を示した．

<u>定理 1 ([5])</u>．正定数 $C$ が存在して，すべての $\lambda > 0$，$f \in C_q$ $(1 < q \leq \infty)$，$f = \Sigma m_k b_k$ に対して

$$|\{x \in T ;\ S^*(f)(x) > \lambda\}| \leqq C \frac{N(\{m_k\})}{\lambda}$$

が成立する．

定理 1 からすぐに次がわかる．

<u>系 1．</u> $f \in C_q$ ならば $\lim_{n \to \infty} S_n(f)(x) = f(x)$ a.e.

系 1 の精密さを見るために次の定理を述べておく．

<u>定理 2 (J.P. Kahne)．</u> $N(\{m_k\}) = \infty$ ならば列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset T$ で

$$\sup_n |S_n(\Sigma_1^{\infty} m_k \delta_{x_k})(x)| = \infty \quad \text{a.e.}$$

となるものが存在する。ここで $\mu = \Sigma m_k \delta_{x_k}$ として，

$$S_n(\mu)(x) = \Sigma_{l=-n}^{n} \int_T e^{-2\pi i l t} d\mu(t)\, e^{2\pi i l x}$$ である．

§3. R. Fefferman の entropy．

定義 3 [1]．Lebesgue 測度を $|T| = \frac{1}{e}$ と正規化する．$S \subset T$ に対して

$E(S) = \inf\{\Sigma_{k=1}^{\infty} |I_k| \log \frac{1}{|I_k|} ;\ S \subset \bigcup_k I_k,\ I_k (\subset T)$ は閉区

間},

とする． T上の可測関数 $f$ に対して

$$J(f) = \int_0^\infty E(\{x \in T;\ |f(x)| > \lambda\})\, d\lambda$$

とし， $L^1(E) = \{ f;\ J(f) < \infty \}$ とする．

R. Fefferman によって

(1) $c > 0$ が存在して

$$J(f) \leqq c\left(\int_T \int_T \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}\, dx dy + \|f\|_1\right)$$

が成立する，

(2) $f \in L^1(E)$ ならば $f \in L\log^+ L$

が示されている．

<u>定理3([4], [5]).</u> $f \in L^1(E)$ ならば

$$\lim_{n \to \infty} S_n(f)(x) = f(x) \quad \text{a.e.}$$

§4. 多変数の場合． $Q_d = \{ x \in \mathbb{R}^d :\ -\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{1}{2},\ i = 1, 2, \cdots, d\}$ とする． $f \in L^1(Q_d)$ に対して $\hat{f}(n) = \int_{Q_d} f(x) e^{-2\pi i n \cdot x} dx$

$n = (n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, $n \cdot x = \sum_{i=1}^d n_i x_i$ とし，

critical index における多変数フーリエ級数 $\sum \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$ の Bochner-Riesz 平均を

$$S_R^{\frac{d-1}{2}}(f)(x) = \sum_{|n| \leq R} \left(1 - \frac{|n|^2}{R^2}\right)^{\frac{d-1}{2}} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n \cdot x}$$

とする． ここで $|n| = (\sum_{i=1}^d n_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

$Q_d$ 上の関数 $f$ に対して $J(f)$ を $T$ におけると同様にし

て定義する．　すなわち　$S \subset Q_d$ に対し

$$E(S) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \log \frac{1}{|I_k|} : S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ I_k (\subset Q_d) \text{ は closed cube} \right\}$$

とし（ただし Lebesgue 測度を $|Q_d| = \frac{1}{e}$ と正規化する），

$$J(f) = \int_0^{\infty} E(\{x \in Q_d : |f(x)| > \lambda\})\, d\lambda$$

とする．

<u>定理4（[2], [4]）.</u>　$J(f) < \infty$　ならば

$$\lim_{R \to \infty} S_R^{\frac{d-1}{2}}(f)(x) = f(x) \quad \text{a.e.}$$

<u>注意3.</u>　$L^1(E) = \{ f : J(f) < \infty \}$，　とすると $L^1(E) \subset H^1$　である．$f \in H^1$ で $S_R^{\frac{d-1}{2}}(f)(x)$ がほとんどすべての点で発散するものが存在することが[3] で示された．

## 文献

[1] R. Fefferman, A theory of entropy in Fourier analysis, Advances in Math. 30 (1978), 171 − 201.

[2] S. Z. Lu, M. Taibleson, and G. Weiss, On the almost-everywhere convergence of Bochner − Riesz means of multiple Fourier series, Lecture Notes in Math. 908 (1982), Springer, 311 − 318.

[3] E. M. Stein, An $H^1$ function with non-summable Fourier expansion, Lecture Notes in Math. 992 (1983), Springer, 193 - 200.

[4] S. Sato, Entropy and almost everywhere convergence of Fourier series, Tôhoku Math. J. 33 (1981), 593-597.

[5] M. Taibleson and G. Weiss, Certain function spaces connected with almost everywhere convergence of Fourier series, Proceedings of the Conference on Harmonic Analysis, in Honor of Antoni Zygmund, Wadsworth, Vol I (1982), 95-113.