数理解析研究所講究録
第 527 巻 1984 年 74-79

「不連続関数のフーリエ級数における invariance principle の成立について」

京都工繊大　小川重義（OGAWA Shigeyoshi）

§1.　不連続関数の三角関数系によるフーリエ級数が、不連続点の近傍で示す一種の行儀の悪さは"Gibbs の現象"の名の下によく知られているところである。しかしながら一方では、Dirichlet-Jordan の定理に見る如く、不連続点そのものに於けるこの級数の落着き具合はむしろ良好な方であって、正規直交系のとり方によってはそれに関するフーリエ級数がこの点において極めて chaotic な挙動を示すことがある。

例えば、階段関数 $1_{[0,a]}(x)$ （$a, x \in [0,1]$）の Haar 関数系 $\{H_{n,i}\}$ によるフーリエ展開を考えてみよう；

$$(1)\quad \tilde{U}_n(x;a) = a + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} H_{k,i}(x)\int_0^1 1_{[0,a]}(y)H_{k,i}(y)\,dy ,$$

$$\Big(H_{0,0}(x) \equiv 1,\ H_{k,i}(x) = 2^{\frac{k-1}{2}}\big\{1_{[2^{-k}2i,\ 2^{-k}(2i+1))}(x) - 1_{[2^{-k}(2i+1),\ 2^{-k}2(i+1))}(x)\big\},\ i=0,1,\dots,2^{k-1}-1,\ k \ge 1 \Big),$$

としたとき，我々は関数列，$u_n(x) \equiv \tilde{u}_n(x;x)$ $(0 \leq x \leq 1,\ n \geq 1)$ の挙動に興味がある。ところでこの場合は，既に前稿（本論究録所載の）に記した通り，u_nは次のように表現される；

$$(2) \quad u_n(x) = T^n \cdot x \qquad (0 \leq x \leq 1),$$

ここに，Tは以下に与える$[0,1]$上の変換である，

(3)； $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n(x)$ $(a_n(x) = 0, 1)$ と2進展開される

数xに対して，$T \cdot x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{n+1}(x)$.

（以後，話を固定する為に(3)にいう2進展開は，可能な場合は常に，有限のものをとることに定めておく。）

さて，上の表現(2)および前稿に示した命題1より，我々は，$w\text{-}\lim_{n \to \infty} u_n(\cdot) = \frac{1}{2}$ であることを知るが，同時に，この関数列は，有限2進展開をもつ数xを除いて，各点収束しないこともわかる。以下において，$\{u_n\}$ を確率空間（$[0,1]$, $\mathcal{B}_{[0,1]}$, dx）上の実数値確率変数列とみなし，その確率論的特徴を調べてみることにする。

§2. $v_n(x) = \frac{1}{2} - u_n(x)$ とおけば，$\{v_n\}$ は次のような

従属確率変数列となる。

(4); $E v_n = 0$, $E v_m v_n = \frac{1}{12} 2^{-(m-n)}$ $(m \geq n)$.

そこで，列 $\{v_n\}$ に対して，相加平均の列：$w_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k(x)$ を考えれば (4) より，$E w_n^2 = \frac{1}{4n} + o(\frac{1}{n})$ であり列 $\{w_n\}$ は $n \to \infty$ において L^2-収束する。実は，次のように更に詳しい主張が成立する．

<u>定理</u>：乱関数列 $\frac{2[nt]}{\sqrt{n}} w_{[nt]}(x)$ $(1 \geq t \geq 0,\ n \geq 1)$ は $n \to \infty$ において，ブラウン運動 $B(t)$ $(1 \geq t \geq 0)$ に法則収束する。

従属確率変数列における *invariance principle* の成立に関する一般論（筆者は余り多くを知らないのであるが）がこの場合にも適用可能であるかどうかの検討はさておき，上の結果は「2進展開」の特長を使って初等的に証明することが可能である．次にその概略を示しておこう：

(証明) 各 v_k は次のように表わされることに注意する．

(5); $v_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} \cdot 2a_{n+k}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} r_{n+k}(x)$

ここに，$r_k(x) = 1 - 2a_k(x)$ は k 次の *Rademacher* 関数である．即ち，$r_k(x) = \mathrm{sgn}\{\sin 2^k \pi x\}$．

$X_n(t,x) = \frac{2^{[nt]}}{\sqrt{n}} w_{[nt]}(x)$ とおき，(5) を使って整理すれば，

(6)： $$X_n(t,x) = Y_n(t,x) + \frac{1}{\sqrt{n}} Z_n(t,x),$$

ここに

$$\begin{cases} Y_n(t,x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} r_k(x), \\ Z_n(t,x) = \sum_{k=1}^{[nt]} 2^{-(k-1)} r_k(x) + \sum_{k=[nt]+2}^{\infty} 2^{-k}(1-2^{[nt]+1}) r_k(x) \end{cases}$$

さて，列 $\{r_n\}$ は独立で同一分布に従う二乗可積分な確率変数列となっている（Rademacher 関数系の特徴である）。従って，Donsker の定理（[1]）より，乱関数列 $\{Y_n\}$ は $n\to\infty$ においてブラウン運動 $B(\cdot)$ に法則収束していることがわかる。

一方，(6) 式右辺の第二項については； $|Z_n(t,x)|$

$$< \sum_{k=1}^{[nt]} 2^{-(k-1)} + \sum_{k=[nt]+2}^{\infty} 2^{-k+[nt]+1} \leq 2 \quad (\forall t \geq 0,\ \forall x \in [0,1],\ \forall n)$$

が成立しているから，このことと上に述べたことより，結論を得る。

§3.　我々は，不連続関数のフーリエ級数にひそむ「混沌」の一面を見たのであるが，ある種の連続関数の級数表現

において観察される同様の混沌的現象についても言及しておくことにしよう。その素材は最近の「カオスの理論」に求めることができる，即ち； M. Yamaguti - M. Hata [2] に次のような指摘がある。

ψ を，関数 $\psi(x) = 2x \ (0 \leq x < \frac{1}{2}), \ = 2 - 2x \ (\frac{1}{2} \leq x < 1)$

によって記述される区間 $[0,1]$ 上の変換とする。このとき，

$$(7): \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \psi^k(x) \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

（但し ψ^k は ψ の k 回 iteration ）とおけば，

関数列 $\{T_n\}$ は $n \to \infty$ において，高木関数 $T(x)$ に一様収束する。（ここに，高木関数 $T(x)$ は，到る所微分不可能な連続関数の具体例として歴史的にも著名なものである。）。

さて，(7) を少し修正して，次のような乱関数の列を考えてみる。

$$(8): \quad T_n(t, x) = \sum_{k=0}^{[nt]} 2^{-k} \psi^k(x), \quad (t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1).$$

関数 $\psi(x)$ は，$\psi(x+1) = \psi(x) \ (x \geq 0)$ によって $x \geq 1$ に対しても拡張しておくものとすれば，次の結果が得られる，

<u>命題</u> 固定した $s\,(>0)$ に対して，乱関数の列

$\frac{2^{-[ns]}}{\sqrt{n}}\frac{d}{dx}T_n(t, 2^{[ns]}x)$ $(t \geq 0,\ n \geq 1)$ は $n \to \infty$ において

乱関数 $B(t+s) - B(s)$ $(t \geq 0)$ に法則収束する。

(証明) 実際，基本的な等式 $2^{-k}\frac{d}{dx}\varphi^k(x) = r_k(x)$,

及び $r_{k+n}(x) = r_k(2^n x)$ により，次の関係式を得る.

$$\frac{2^{-[ns]}}{\sqrt{n}}\frac{d}{dx}T_n(t, 2^{[ns]}x) = \frac{2^{-[ns]}}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{[nt]} 2^{-k}\frac{d}{dx}[\varphi^k(2^{[ns]}x)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{[nt]} r_k(2^{[ns]}x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{[nt]} r_{k+[ns]}(x).$$ これより

直ちに結論に到る。　　　　(1984年4月)

References :

[1] P. Billingsley, "Convergence of Probability Measures" John Wiley, New York (1968)

[2] M. Yamaguti - M. Hata, Weierstrass's Function and Chaos, Hokkaido Math. J. 12 (1983), 333 – 342